

การทดสอบการประมาณข้อมูลโดยใช้การแปลงเวฟเล็ตเต็มหน่วย เทียบกับการแปลงโคไซน์เต็มหน่วย

มานิตย์ เกียรติกำจายจร¹ ประภากร สุวรรณะ² และมนัส สัจวรศิลป์³
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

ประโยชน์ประการหนึ่งของการแปลงเวฟเล็ตคือ สัมประสิทธิ์รายละเอียด (Detail coefficients) เป็นจำนวนมากที่ได้จากการแปลงเวฟเล็ตจะมีขนาดเล็กมาก การตัดหรือละสัมประสิทธิ์เหล่านี้ทิ้งไป จะทำให้เกิดความเพี้ยนเพียงเล็กน้อยเท่านั้น และเนื่องจากการวิเคราะห์แบบมัลติเรโซลูชัน (Multiresolution analysis : MRA) จึงเป็นความเพี้ยนที่เกิดในบางบริเวณซึ่งไม่กระทบกับข้อมูลใดๆ ตำแหน่งบทความนี้ได้ทดสอบการประมาณข้อมูลโดยใช้การแปลงเวฟเล็ตเปรียบเทียบกับการแปลงโคไซน์ โดยแสดงการสร้างกลับคืนของสัญญาณและภาพตัวอย่างโดยกลุ่มของสัมประสิทธิ์ที่มีค่าน้อยทิ้งไป ขั้นตอนทั้งหมดใช้โปรแกรม MATLAB ช่วยในการคำนวณ ผลที่ได้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพการประมาณที่เหนือกว่าการแปลงโคไซน์โดยการเปรียบเทียบ

¹ นักศึกษามหาบัณฑิตศึกษา ภาควิชาอิเล็กทรอนิกส์

² อาจารย์ ภาควิชาอิเล็กทรอนิกส์

³ รองศาสตราจารย์ ภาควิชาอิเล็กทรอนิกส์

On the Experimentation of Data Approximation Using the Discrete Wavelet Transform Compared with the Discrete Cosine Transform

Manit Kiatkhamjaikajorn ¹ Prapakorn Suwanna ² and Manas Sangworasil ³

King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

Abstract

One advantage of the **Wavelet** transform is that often a large number of the detail coefficients turn out to be very small in magnitude. Truncating or removing these small coefficients from the representation introduces only small errors in the reconstruction and because of the Multiresolution analysis, they are localization errors. This paper propose the experimentation of data approximation using the **wavelet** transform. The reconstruction of signal and image examples by removing small coefficients from the transform domain are depicted. All processes using **MATLAB** program for computing. Results of the proposed method are compared with the tradition Cosine transform method which supports high efficiency of the **Wavelet** transform.

¹ Graduate Student, *Department of Electronics*

² Lecturer, *Department of Electronics*

³ Associate Professor, *Department of Electronics*

บทนำ

เป็นที่ทราบกันดีว่า ฟังก์ชันใดๆ สามารถแสดงได้ในรูปของการรวมเชิงเส้น (Linear combination) ของฟังก์ชันพื้นฐาน (Basis functions) เช่น การใช้ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ (Sine cosine) เป็นฟังก์ชันพื้นฐานในการวิเคราะห์ฟูเรียร์ (Fourier analysis) เป็นต้น การวิเคราะห์เวฟเล็ตก็เป็น การแสดงฟังก์ชันใดๆ ในรูปของการรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันพื้นฐานเช่นเดียวกัน แต่ด้วยลักษณะที่ พิเศษของฟังก์ชันพื้นฐานเวฟเล็ต (Wavelet basis function) ทำให้สามารถแสดงฟังก์ชันใดๆ ในรูป ของการรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันพื้นฐานด้วยจำนวนที่กระชับรัดกุมกว่า โดยเฉพาะฟังก์ชันที่มีลักษณะ ไม่ต่อเนื่อง (Discontinuities) และมีลักษณะปลายแหลมคม (Sharp spikes) ซึ่งในโดเมนของฟูเรียร์ (Fourier domain) จะต้องไปประกอบด้วยฮาร์มอนิกส์ของไซน์และโคไซน์ เป็นจำนวนมากมายถึง อนันต์ แต่ในโดเมนของเวฟเล็ต (Wavelet domain) จะประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ที่มีค่าน้อยเป็นจำนวน มากและเข้าสู่ศูนย์ในโดเมนที่จำกัดทำให้การตัดหรือละสัมประสิทธิ์ที่มีค่าน้อยบางส่วนจะทำให้เกิดความ เพี้ยนเพียงเล็กน้อยเท่านั้น การวิเคราะห์เวฟเล็ต เป็นการวิเคราะห์แบบมัลติเรโซลูชัน (Multiresolution Analysis : MRA) ซึ่งมีคุณสมบัติพิเศษคือ ถ้า เกิดการเปลี่ยนแปลงที่ใดๆ ในโดเมนของเวฟเล็ตแล้ว จะมีผลกระทบในโดเมนของเวลา (Time domain) ในช่วงตำแหน่งที่สัมพันธ์กัน (Localization) เท่านั้น หรือทำให้เกิดความเพี้ยนในบางช่วงตำแหน่งซึ่ง ไม่กระทบกับข้อมูลทั้งหมด ทำให้ประสิทธิภาพการ ประมาณข้อมูลสูง ด้วยข้อดีดังกล่าวสามารถที่จะนำ มาประยุกต์ใช้ในการอัดข้อมูล โดยเฉพาะกรณีที่ ต้องการอัตราส่วนอัด (Compression Ratio) สูงๆ ซึ่ง จำเป็นที่จะต้องละสัมประสิทธิ์บางส่วนทิ้งไปเพื่อ เพิ่มประสิทธิภาพการเก็บข้อมูลต่อไป ในบทความนี้ได้ทดสอบการประมาณข้อมูลโดยใช้การแปลง เวฟเล็ต (Wavelet Transform) โดยแสดงการทดสอบการสร้างกลับคืน (Reconstruction) ของสัญญาณ ที่มีลักษณะสำคัญและภาพตัวอย่างด้วยจำนวนของสัมประสิทธิ์ที่มีค่ามากจำนวนหนึ่ง และได้เปรียบ เทียบกับวิธีการแปลงโคไซน์เห็นจริงถึงประสิทธิภาพที่เหนือกว่า โดยพิจารณาเปรียบเทียบจากรูปและค่า Percent Relative L_2 Error

1. ทฤษฎี

1.1 การแปลงเวฟเล็ต (The Wavelet Transform) [1][2]

ในปริภูมิ $L_2(\mathbf{R})$ ของ Continuous-time energy function การแปลงเวฟเล็ตนิยามด้วยสมการ

$$WT\{f(t), a, b\} = \left\langle f(t) \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right. \right\rangle \quad (1)$$

โดย $\langle | \rangle$ คือผลคูณภายใน (Inner product) Mother Wavelet $\psi(t)$ เป็นฟังก์ชันพื้นฐาน ที่มีลักษณะของการออสซิลเลท (Oscillatory) และมีแอมพลิจูด (Amplitude) ที่ลดลงสู่ศูนย์ทั้งทางด้าน บวกและลบอย่าง รวดเร็ว [3] (ต่างกับไซน์และโคไซน์ซึ่งแผ่ไปสู่ออนันต์) จะเห็นว่าพารามิเตอร์ a และ b ซึ่งเป็นตัว กำหนดกลุ่มของฟังก์ชันพื้นฐานชั้นใหม่จาก $\psi(t)$ โดย a เป็นตัวกำหนดระดับความละเอียด

(Frequency or Scale) ที่ใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณ $f(t)$ ลักษณะนี้เป็นการวิเคราะห์ด้วยมัลติเรโซลูชัน และ b กำหนดตำแหน่งในการวิเคราะห์สัญญาณ $f(t)$ ในลักษณะของการ Correlation ไปตามแกนเวลานั้นคือสามารถที่จะบอกตำแหน่งที่เกิดการเปลี่ยนแปลงในโดเมนของเวลาได้ เมื่อเกิดการเปลี่ยนแปลงในโดเมนของเวฟเลต ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าการแปลงเวฟเลตเป็นการแปลงไปสู่โดเมนของเวลาและความถี่ (Time-Frequency domain)

1.2 การวิเคราะห์สัญญาณด้วยมัลติเรโซลูชัน (Multiresolution Analysis : MRA)

[1][2]

ด้วยทฤษฎีของ MRA ในปริภูมิของสัญญาณ $L_2(\mathbb{R})$ จะปรากฏปริภูมิย่อยของสัญญาณ (Closed subspaces) ที่มีความละเอียด (Resolution) แตกต่างกันซ้อนทับกันอย่างต่อเนื่องไปดังสมการ

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{j-1} \subset V_j \in L_2(\mathbb{R}), j \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

โดย $\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} V_i$ อยู่กันอย่างหนาแน่น (Dense) ในปริภูมิ $L_2(\mathbb{R})$ และ $\bigcap_{i=-\infty}^{\infty} V_i = \{0\}$ แต่ละปริภูมิย่อย V_i จะประกอบไปด้วยเวกเตอร์พื้นฐาน (Basis vector) ในลักษณะที่ให้ค่าความละเอียดหรือจำนวน basis ในปริภูมิ V_i มากขึ้นเป็นสองเท่า (Twoscale property) เมื่อ i มีค่าเพิ่มขึ้นหนึ่งหรือ $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}, j \in \mathbb{Z}$ และสามารถกำหนด Orthonormal basis สำหรับปริภูมิ V_j ใดๆ ได้โดยสมการ

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \cdot \phi(2^j t - k), j, k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

เมื่อ Scaling function $\phi(t)$ เป็น basis ของปริภูมิอ้างอิง V_0 นั่นคือ สามารถแสดง $\phi(t)$ ในรูปของการรวมเชิงเส้นของ $\sqrt{2}\phi(2t-n) \in V_1$ ได้คือ

$$\phi(t) = \sum_n h(n)\sqrt{2}\phi(2t-n), n \in \mathbb{Z}, h(n) \in l_2(\mathbb{Z}) \quad (3)$$

โดยคุณสมบัติของ $h(n)$ คือ $\sum_n h(n) = \sqrt{2}, \sum_n h^2(n) = 1, \sum_n h(2n) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sum_n h(2n+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ และ $\sum_n h(n)h(n+2l) = 0$ เมื่อ $l \neq 0$ [1][4] และจะปรากฏปริภูมิ W_j ที่เป็น Orthogonal complement ของปริภูมิ V_j ในปริภูมิ V_{j+1} โดยที่ $V_{j+1} = V_j \oplus W_j, j \in \mathbb{Z}$ เช่นเดียวกัน Orthonormal basis สำหรับปริภูมิ W_j ใดๆ แสดงได้โดย Wavelet function $\psi(t)$ ของปริภูมิอ้างอิง W_0 คือ

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \cdot \psi(2^j t - k), j, k \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

นั่นคือ สามารถแสดง $\psi(t)$ ในรูปของการรวมเชิงเส้นของ $\sqrt{2}\phi(2t-n) \in V_1$ ได้คือ

$$\psi(t) = \sum_n g(n)\sqrt{2}\phi(2t-n), \quad n \in Z, \quad g(n) \in l_2(Z) \quad (5)$$

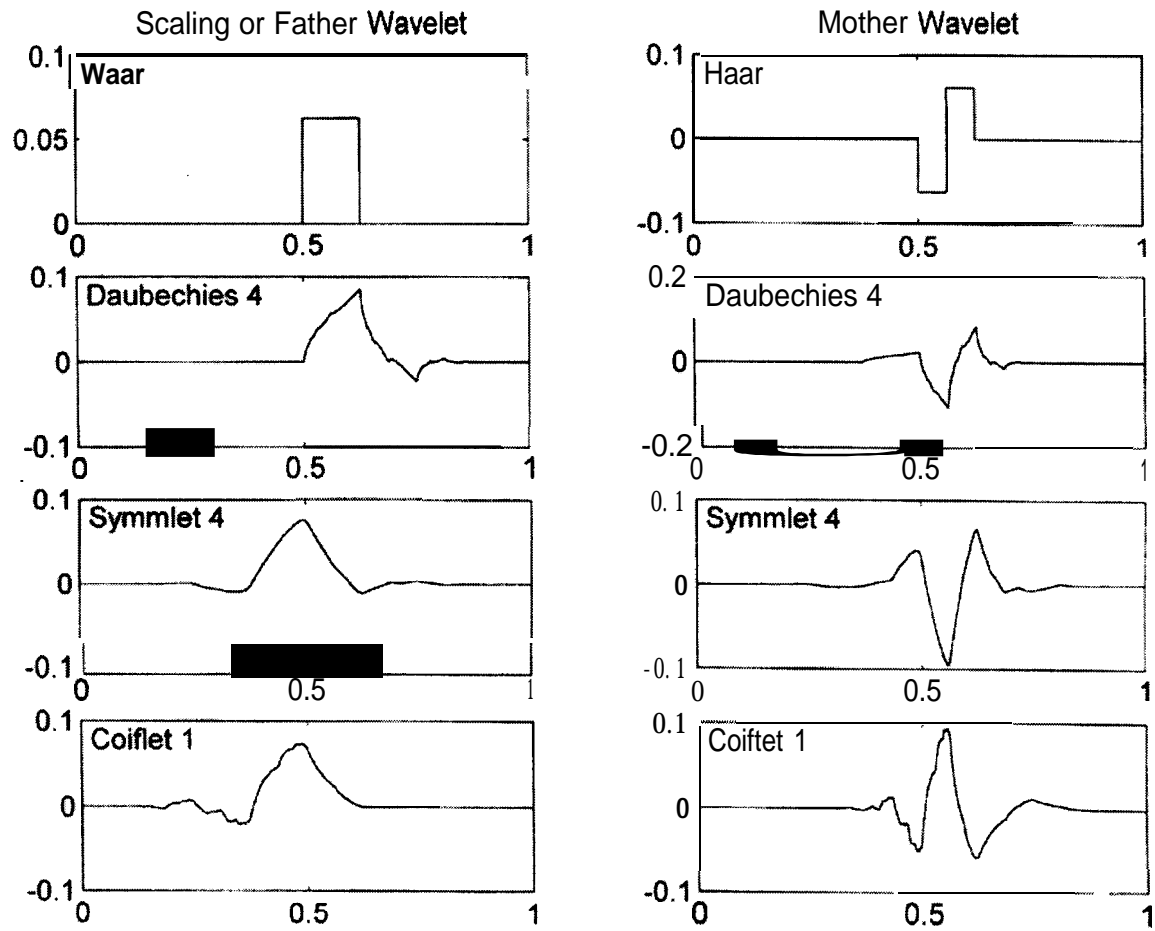
โดย $h(n)$ และ $g(n)$ คือ Quadrature Mirror Filter (QMF) มีความสัมพันธ์กันคือ $g(n) = (-1)^{(N-1-n)}h(N-1-n)$ เมื่อ N คือจำนวนสัมประสิทธิ์ของ $h(n)$ (มีจำนวนเป็นคู่สำหรับ Perfect reconstruction condition) ถ้าให้ $f(t) \in V_j$ พิจารณาเมื่อแยก (Decomposite) เป็นปริภูมิย่อย ถึงระดับ $i \geq 0$ ดังนั้นปริภูมิ V_j สามารถแสดงโดย $V_j = V_i \oplus W_i \oplus W_{i+1} \oplus \dots \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1}$, $i, j \in Z$ นั่นคือ สัญญาณ $f(t)$ ประกอบไปด้วยฟังก์ชันพื้นฐานของแต่ละปริภูมิย่อย ซึ่งสามารถแสดงสมการอนุกรมเวฟเล็ต (Wavelet series expansion) ได้คือ

$$f(t) = \sum_{m=0}^{2^j-1} c_{i,m} \phi_{i,m}(t) + \sum_{n=i}^{j-1} \sum_{m=0}^{2^n-1} d_{n,m} \psi_{n,m}(t) \quad (6)$$

เมื่อ c_{im} และ d_{nm} คือ Coarse และ Detail expansion coefficients ตามลำดับ

1.3 ตระกูลของเวฟเล็ต (Family of Wavelets)

ตระกูลของเวฟเล็ตที่เป็น Orthonormal (ตระกูลอื่นๆ สามารถดูได้จาก[5]) ได้แก่ Haar, Daubechies, Symmlet และ Coiflet เป็นต้น แต่ละตระกูลจะแตกต่างกันที่ลักษณะของ Basis function โดยเฉพาะความราบเรียบ (Smooth) เช่น Haar มี Basis function เป็นลักษณะสัญญาณสี่เหลี่ยม (Piecewise constant) Symmlet มีลักษณะของ Least Asymmetric และ Coiflet มีลักษณะของ Nearly Symmetric เป็นต้น ตัวอย่าง Basis function ของ Orthonormal Wavelet ทั้ง Scaling function (Father Wavelet) และ Wavelet function (Mother Wavelet) แสดงในรูปที่ 1 ในการเลือกชนิดของเวฟเล็ตสามารถกำหนดได้จากค่า Impulse response $h(n)$ ที่จะนำไปใช้กับสมการที่ (7), (8) และ (9) สำหรับตระกูล Daubechies, Symmlet และ Coiflet แต่ละตระกูลยังสามารถแยกได้อีกหลายชนิดตาม Number of Vanishing Moments : NVM ท้ายชื่อ (Daubechies 4, 6, 8,...20, Symmlet 4, 5, 6,..., 10 และ Coiflet 1, 2,..., 5) ซึ่งแต่ละชนิดจะมีจำนวนสัมประสิทธิ์ของ $h(n)$ แตกต่างกัน (มากขึ้นตาม NVM) เมื่อค่า NVM มากขึ้น Basis function จะมีแนวโน้มที่ราบเรียบขึ้น ค่าของ $h(n)$ สามารถดูได้จาก [5] หรือใช้คำสั่ง MakeOnFilter ของ Toolbox Wavelab [6] ในที่นี้จะแสดงเพียงบางค่าเท่านั้น



รูปที่ 1 ลักษณะของ Wavelet basis บางชนิด คอลัมน์ซ้ายแสดง Scaling หรือ Father Wavelet
คอลัมน์ขวาแสดง Mother Wavelet

ตารางที่ 1 แสดงค่า $h(n)$ ของเวฟเล็ตบางค่า

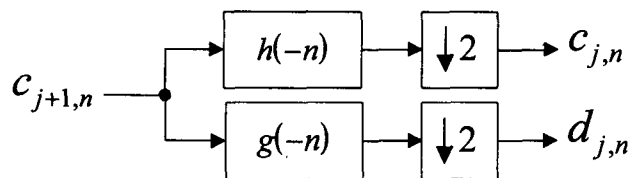
n	Haar	Daubechies 4	Symmlet 4	Coiflet 1
0	$1/\sqrt{2}$	0.482982913145	-0.075785714789	0.038580777748
1	$1/\sqrt{2}$	0.838518303738	-0.029835527848	-0.128989125398
2		0.224143888042	0.497818887832	-0.077181555498
3		-0.129409522551	0.803738751805	0.807491841388
4			0.297857795808	0.745887558934
5			-0.099219543577	0.228584285197
6			-0.012803987282	
7			0.032223100804	

1.4 การแปลงเวฟเล็ตเต็มหน่วย (The Discrete Wavelet Transform : DWT) [1]

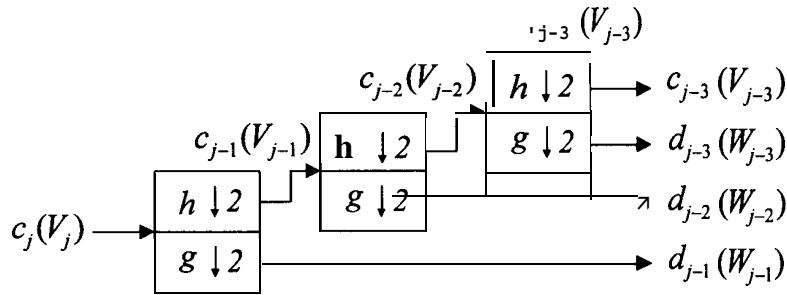
สัญญาณ $f(t) \in V_{j+1}$ สามารถแสดงโดยอนุกรมของ Scaling และ Wavelet functions ในปริภูมิ V_j และ W_j นั่นคือด้วยคุณสมบัติ Orthonormal สามารถคำนวณหาค่า Coarse และ Detail expansion coefficients ของปริภูมิระดับ j ได้จากค่า Coarse expansion coefficients ของปริภูมิระดับ $j+1$ ด้วยสมการที่ (7) และ (8) ตามลำดับ โดยสามารถแสดงด้วย Analysis filter bank ในรูปที่ 2 ส่วนรูปที่ 3 แสดงการแปลงเวฟเล็ตเต็มหน่วย 3 ระดับ

$$c_{j,m} = \sum_n h(n-2m) \cdot c_{j+1,n} = h(-n) * c_{j+1,n} \Big|_{n=2m} \tag{7}$$

$$d_{j,m} = \sum_n g(n-2m) \cdot c_{j+1,n} = g(-n) * c_{j+1,n} \Big|_{n=2m} \tag{8}$$

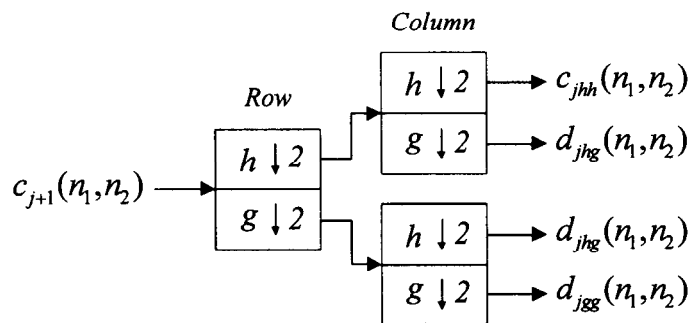


รูปที่ 2 Analysis filter bank



รูปที่ 3 การแปลงเวฟเล็ตเติมหน่วยจากระดับ j ไประดับ $j-3$

สำหรับการแปลงเวฟเล็ต 1 ระดับของข้อมูล 2 มิติ แสดงในรูปที่ 4 โดยจะแปลงในข้อมูลทุกแถวในแนวนอน (Row) ก่อนแล้วจึงแปลงทุกแถวในแนวตั้ง (Column) การแปลงแต่ละแถวใช้ตัวกรองในรูปที่ 2 สำหรับการแปลงในระดับต่อ 9 ไปมีลักษณะเป็น Octave band เช่นเดียวกับกรณี 1 มิติ โดยใช้ Coarse expansion coefficients c_{jhh} เป็นอินพุทของตัวกรองในชุดถัดไป

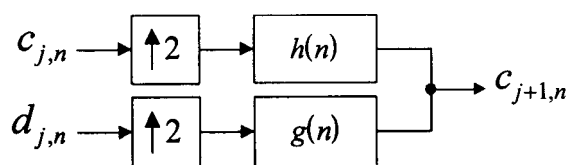


รูปที่ 4 การแปลงเวฟเล็ตเติมหน่วย 1 ระดับของข้อมูล 2 มิติ

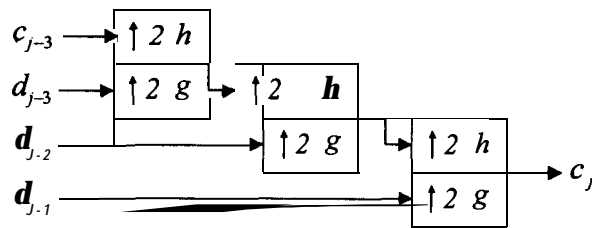
1.5 การแปลงกลับเวฟเล็ตเติมหน่วย (The Inverse Discrete Wavelet Transform : IDWT) [1]

ในทางกลับกัน เมื่อทราบค่า Coarse และ Detail expansion coefficients ของปริภูมิตะดับ j สามารถคำนวณหาค่า Coarse expansion coefficients ของปริภูมิตะดับ $j+1$ ได้โดยสมการที่ (9) สามารถแสดงด้วย Synthesis filter bank ในรูปที่ 5 และการแปลงกลับเวฟเล็ตเติมหน่วย 3 ระดับ แสดงในรูปที่ 6

$$c_{j+1,n} = \sum_m h(n-2m) \cdot c_{j,m} + \sum_m g(n-2m) \cdot d_{j,m} \tag{9}$$

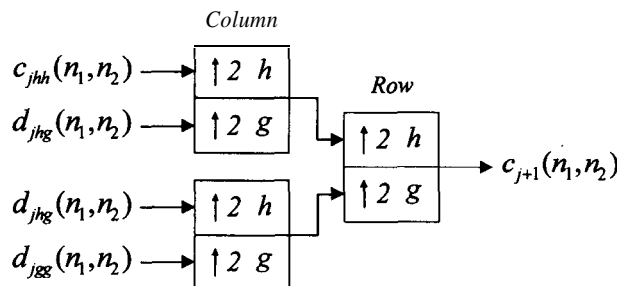


รูปที่ 5 Synthesis filter bank



รูปที่ 6 การแปลงกลับเวฟเล็ตเต็มหน่วยจากระดับ $j-3$ ไประดับ j

เช่นเดียวกับรูปที่ 4 การแปลงกลับเวฟเล็ตเต็มหน่วย 2 มิติสามารถใช้ชุดตัวกรองในรูปที่ 7



รูปที่ 7 การแปลงกลับเวฟเล็ตเต็มหน่วย 1 ระดับของข้อมูล 2 มิติ

1.6 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการแปลงด้วย L_2 error [7]

พิจารณาสัญญาณ $f(t)$ แสดงด้วยการรวมเชิงเส้นของ Orthonormal basis $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ เมื่อ c_1, c_2, \dots, c_m คือสัมประสิทธิ์ และในการประมาณ $f(t)$ ด้วยฟังก์ชันพื้นฐานจำนวน $\hat{m} < m$ พจน์ แสดงด้วย $\hat{f}(t) = \sum_{i=1}^{\hat{m}} c_i u_i(t)$ ดังนั้นกำลังสองของ L_2 error ในการประมาณคือ

$$\left(L_2 \text{ error} \right)^2 = \left\| f(t) - \hat{f}(t) \right\|_2^2 = \left\langle f(t) - \hat{f}(t) \mid f(t) - \hat{f}(t) \right\rangle = \sum_{i=\hat{m}+1}^m c_i^2 \quad (10)$$

จะเห็นว่า L_2 error จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อสัมประสิทธิ์ c_1, c_2, \dots, c_m เรียงอยู่ในลักษณะที่ทำให้มีขนาดจากมากไปหาน้อย นั่นคือการประมาณ $f(t)$ ด้วย \hat{m} พจน์เพื่อให้มีประสิทธิภาพมากที่สุด นั้นจะต้องประมาณด้วย \hat{m} พจน์ที่สัมประสิทธิ์มีค่ามากที่สุด สมการที่ (10) สามารถนำไปใช้เปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการแปลง (ที่แสดงด้วยการรวมเชิงเส้น) แบบต่างๆ ได้ และ Percent relative L_2 error ของ $\hat{f}(t)$ สามารถหาได้จาก

$$\text{Percent relative } L_2 \text{ error} = \frac{\|f(t) - \hat{f}(t)\|_2}{\|f(t)\|_2} \times 100\% \quad (11)$$

2. การทดสอบการประมาณสัญญาณ 1 มิติและภาพ 2 มิติโดยใช้การแปลงเวฟเล็ต

บทความนี้ได้ใช้โปรแกรม Matlab ในการคำนวณและแสดงผล ในการทดสอบจะใช้เวฟเล็ตหลายชนิด (Haar, D4-20, S4-10 และ C1-5) กับสัญญาณทดสอบ เพื่อให้เห็นผลของการเลือกใช้เวฟเล็ตชนิดต่างๆ กับข้อมูลหลายลักษณะ การทดสอบกับสัญญาณ 1 มิติลักษณะต่างๆ ขนาด 2^{11} จุด โดยแปลงจากระดับ $j=11$ ไประดับ $j=4$ โดยการโปรแกรมตามสมการที่ (7) และ (8) หรือตัวกรองในรูปที่ 1 และทำการแปลงกลับด้วยสัมประสิทธิ์ค่ามากจำนวน 64 ค่า (จากทั้งหมด 2048 ค่า) โดยการโปรแกรมสมการที่ (9) หรือตัวกรองในรูปที่ 5 สัญญาณทดสอบได้แก่

- สัญญาณ Blocks มีลักษณะคงที่เป็นช่วงๆ (Piecewise constants)
- สัญญาณ Bumps มีลักษณะปลายแหลม(Sharp spikes)
- สัญญาณ Heavisine มีลักษณะต่อเนื่องเป็นช่วงๆ (Piecewise continuous)
- สัญญาณ Doppler มีลักษณะขนาดเพิ่มขึ้นแต่ความถี่ลดลง

และข้อมูลภาพ "Lenna" ขนาด $2^8 \times 2^8$ จุด โดยแปลงจากระดับ $j=8$ ไประดับ $j=3$ โดยใช้ชุดตัวกรองในรูปที่ 4 และทำการแปลงกลับด้วยร้อยละ 5 ของจำนวนสัมประสิทธิ์ที่มีค่ามาก (จากทั้งหมด 65536 ค่า) โดยใช้ชุดตัวกรองในรูปที่ 7 และผลการแปลงกลับของสัญญาณและภาพได้เปรียบเทียบกับวิธีการแปลงโคไซน์เต็มหน่วยแบบที่ 4 (Discrete Cosine Transform type IV : DCT-IV) [8] ซึ่งเป็นวิธีนิยมใช้กันมาก โดยนิยามด้วยสมการ

$$\text{สำหรับ 1 มิติ :} \quad F(u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f(j) \cos \frac{(2j+1)(2u+1)\pi}{4N}, \quad u = 0, 1, \dots, N-1 \quad (12)$$

และ 2 มิติ :

$$F(u,v) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} f(j,k) \times \cos \frac{(2j+1)(2u+1)\pi}{4N} \times \cos \frac{(2k+1)(2v+1)\pi}{4N}, \quad u,v = 0, 1, \dots, N-1 \quad (13)$$

โดย คือขนาดของข้อมูล ส่วนการแปลงกลับใช้สมการเดียวกัน

3. ผลการทดสอบ

จากตารางที่ 2 จะเห็นว่าที่จำนวนสัมประสิทธิ์ค่ามาก 64 ค่า วิธี DWT โดยรวมแล้วจะให้ค่า Percent Relative L_2 error ต่ำกว่าวิธี DCT ยกเว้นสัญญาณ Doppler ซึ่งจะต้องเลือกชนิดของเวฟเล็ตอย่างเหมาะสม เช่น Symmlet 10 และ Coiflet 5 เป็นต้น รูปที่ 8 และ 9 แสดงการเปรียบเทียบการประมาณสัญญาณทั้ง 4 ชนิดด้วยวิธี DCT และ DWT (โดยเลือกใช้ชนิดของเวฟเล็ตที่เหมาะสมกับสัญญาณที่สุด) จากรูปจะเห็นว่าวิธี DWT สามารถคงสาระสำคัญของข้อมูลได้อย่างมีประสิทธิภาพกว่ามาก ถึงแม้จะใช้สัมประสิทธิ์ค่ามากเพียง 64 ค่า และความเพี้ยนที่เกิดขึ้นเป็นเพียงบางช่วงตำแหน่งเท่านั้น เมื่อเทียบกับวิธี DCT จะเห็นว่าเกิดความเพี้ยนสูงโดยเกิดขึ้นทุกๆ ตำแหน่ง รูปที่ 10 แสดงการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของทั้งสองวิธี โดยเป็นการพล็อตแสดงค่ากำลังสองของ L_2 error ตามสมการที่ 10 แกนนอนคือจำนวนสัมประสิทธิ์ค่ามากที่ใช้ในการแปลงกลับ ในรูปได้เลือกพล็อต DWT 2 ชนิดที่ให้ค่า Percent Relative L_2 error ต่ำสุดและสูงสุด (ที่จำนวนสัมประสิทธิ์ค่ามาก 64 ค่า) จะเห็นว่า การเลือก Basis ที่ไม่เหมาะสมวิธี DWT อาจมีประสิทธิภาพใกล้เคียงหรือต่ำกว่า DCT ได้ เช่น การใช้ Haar กับสัญญาณ Heavisine ประสิทธิภาพจะใกล้เคียงกัน (เส้นกราฟใกล้เคียงกัน อาจสูงหรือต่ำกว่าบางช่วง) และ การใช้ Haar กับสัญญาณ Doppler วิธี DCT จะมีประสิทธิภาพที่สูงกว่าในช่วงกว้าง (เส้นกราฟของ DCT ต่ำกว่า DWT ในช่วงกว้าง) สำหรับสัญญาณ Bumps กราฟแสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่าการเลือกใช้ D4 จะไม่มีประสิทธิภาพเหนือกว่า Haar เสมอไป Haar จะมีประสิทธิภาพเหนือกว่า D4 ที่จำนวนสัมประสิทธิ์ประมาณตั้งแต่ 300 ค่าขึ้นไป

รูปที่ 11 แสดงการเปรียบเทียบการประมาณสัญญาณภาพด้วยวิธี DCT และ DWT (โดยเลือกใช้ชนิดของเวฟเล็ตที่เหมาะสมกับภาพที่สุด) จะเห็นได้ชัดว่าภาพที่ได้จากวิธี DWT ซึ่งมีความคมชัดสูงกว่า และสังเกตเห็นความเพี้ยนเป็นบางบริเวณ โดยไม่กระทบกับข้อมูลทั้งภาพ ถึงแม้จะใช้สัมประสิทธิ์ค่ามากเพียงร้อยละ 5 ส่วนวิธี DCT ภาพที่ได้มีความคมชัดต่ำ เกิดความเพี้ยนในลักษณะ Block ทั่วภาพ และจากกราฟกำลังสองของ L_2 error วิธี DWT จะให้ค่า L_2 error น้อยกว่าวิธี DCT เมื่อแปลงกลับด้วยจำนวนสัมประสิทธิ์ค่ามากที่เท่ากันและการเลือกใช้ S8 จะมีประสิทธิภาพเหนือกว่า Haar ในช่วงที่จำกัด

ตารางที่ 2 เปรียบเทียบค่า Percent relative L_2 error ของสัญญาณที่ได้จากการประมาณ
ด้วยวิธี DWT และ DCT โดยใช้สัมประสิทธิ์ค่ามากจำนวน 64 ค่าในการแปลงกลับ

	NVM	Blocks	Bumps	HeaviSine	Doppler	Lena
DCT type IV	-	15.7288	40.5399	19.0280	3.0223	2.8801
Haar		3.4816*	23.0081	5.1358**	17.1220**	2.0189**
Daubechies	4	8.8904	18.2545*	0.7950	8.2275	1.8489
	8	9.8840	19.7748	0.2274	5.5887	1.8508
	8	10.9925	21.3417	0.2985	4.5599	1.7385
	10	11.5007	22.2702	0.3790	3.9923	1.8418
	12	14.1484	22.3178	0.3956	3.4811	1.5400
	14	13.2517	25.8058	0.4898	3.6944	1.8384
	18	13.3528	29.5475**	0.8058	3.5138	1.8039
	18	13.8354	28.4911	0.9159	3.8689	1.9705
	20	14.6502**	28.1531	1.0838	4.2934	1.8781
Symmlet	4	9.8453	18.9010	0.1691*	3.4211	1.5275
	5	8.9393	21.8124	0.2733	3.1842	1.4989
	8	11.5132	18.9979	0.2801	2.4702	1.3872
	7	12.0880	20.2743	0.2580	2.3245	1.4288
	8	10.8885	20.1785	0.3288	1.9986	1.3734*
	9	11.9189	22.5324	0.4281	1.8218	1.4887
	10	11.6983	22.0830	0.4091	1.8384	1.3873
Coitlet	1	11.3750	18.9582	0.5999	5.2958	1.8820
	2	9.5652	19.9779	0.2218	3.4148	1.5322
	3	11.0388	18.8380	0.2145	2.3323	1.4850
	4	11.4874	20.5522	0.2909	1.8727	1.4551
	5	11.9026	21.7025	0.4137	1.6016*	1.5833

* Percent relative L_2 error ที่น้อยที่สุดในการทดสอบสำหรับ DWT

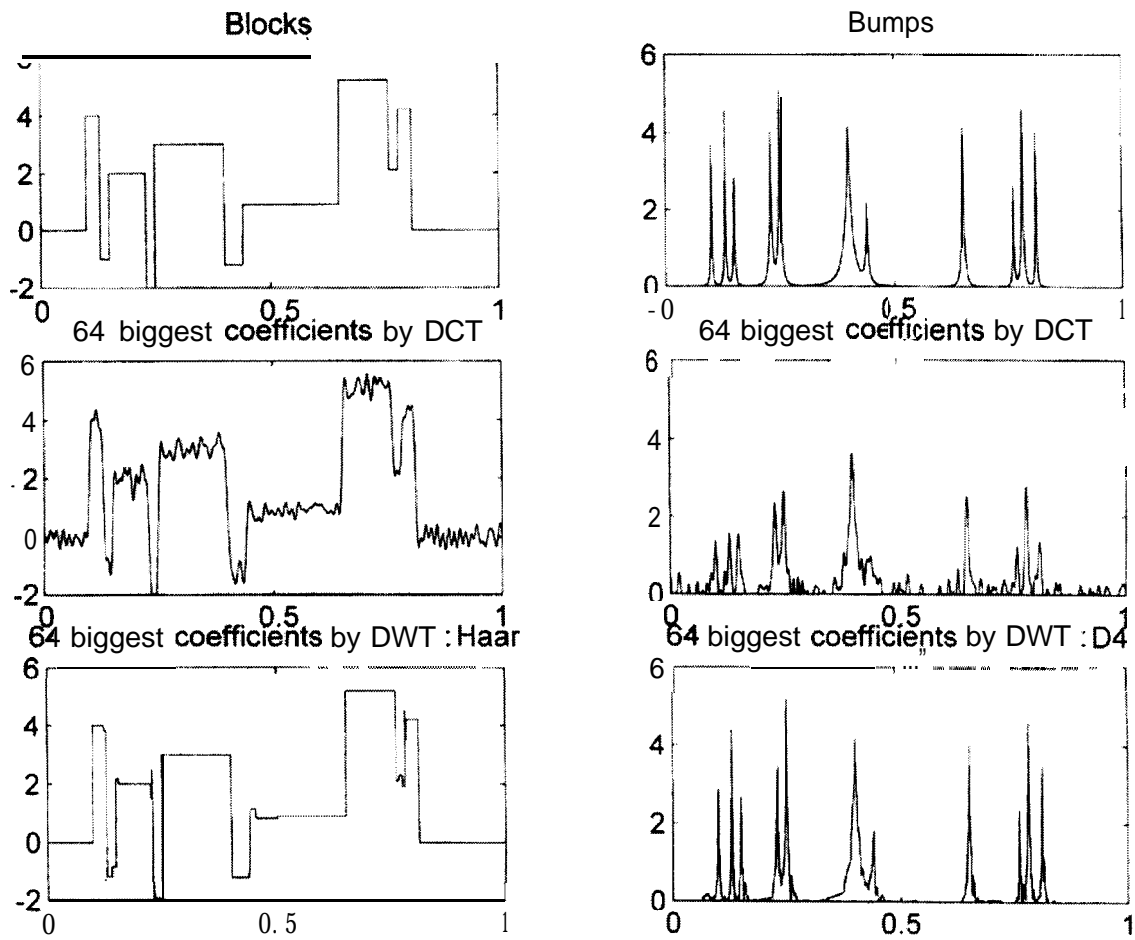
** Percent relative L_2 error ที่มากที่สุดในการทดสอบสำหรับ DWT

4. สรุป

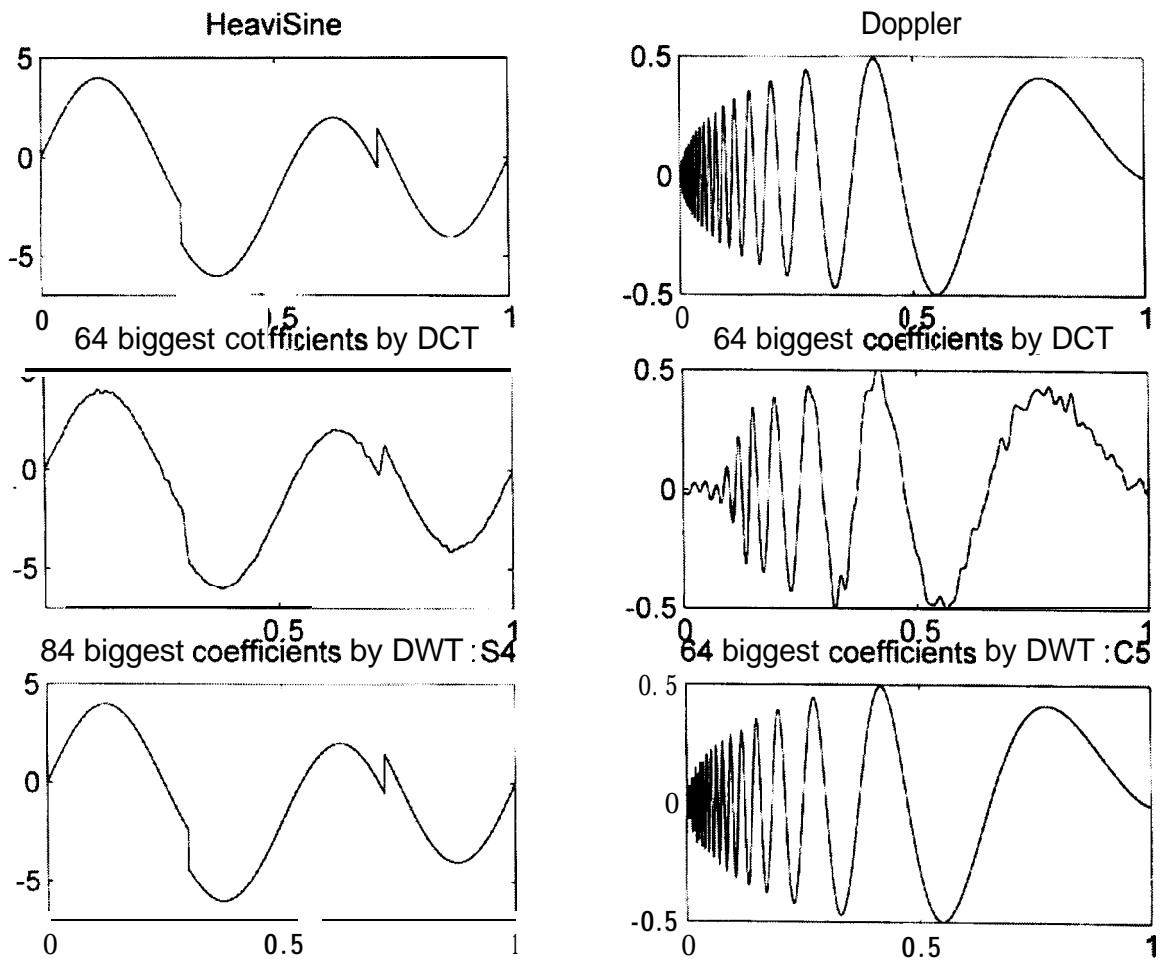
จากผลการทดสอบแสดงให้เห็นว่า สัมประสิทธิ์ที่ได้จากวิธี DWT จะมีขนาดเล็กและลู่เข้าสู่ศูนย์ได้รวดเร็วกว่าวิธี DCT มากโดยเฉพาะเมื่อเลือกใช้ชนิดของเวฟเล็ตที่เหมาะสมกับข้อมูลที่สุดการเลือกใช้ชนิดของเวฟเล็ตกับข้อมูลใดๆ นั้น ใช้ความคล้ายคลึงกันของสัญญาณ (ข้อมูล) และ Wavelet basis เป็นเกณฑ์สังเกตได้ง่ายจากการทดสอบสัญญาณ Blocks ซึ่งมีลักษณะของ Piecewise constant เช่นเดียวกับ Basis ของ Haar และสัญญาณ Bumps มีลักษณะที่คม (Sharp) คล้าย Basis ของ Daubechies 4 เป็นต้น สำหรับกรณีที่ไม่สามารถสังเกตความคล้ายคลึงได้อย่างชัดเจน ก็จำเป็นที่จะต้องใช้การทดสอบเป็นตัวตัดสิน การแปลงเวฟเล็ตเป็นการแปลงที่มีประสิทธิภาพสูงในเรื่องของการประหยัดจำนวนของสัมประสิทธิ์ที่ใช้และคุณสมบัติ Localization ทำให้เป็นการแปลงที่เหมาะสมสำหรับประยุกต์ใช้กับการอัดข้อมูลที่ต้องการอัตราส่วนอัด (Compression Ratio) สูงๆ

เอกสารอ้างอิง

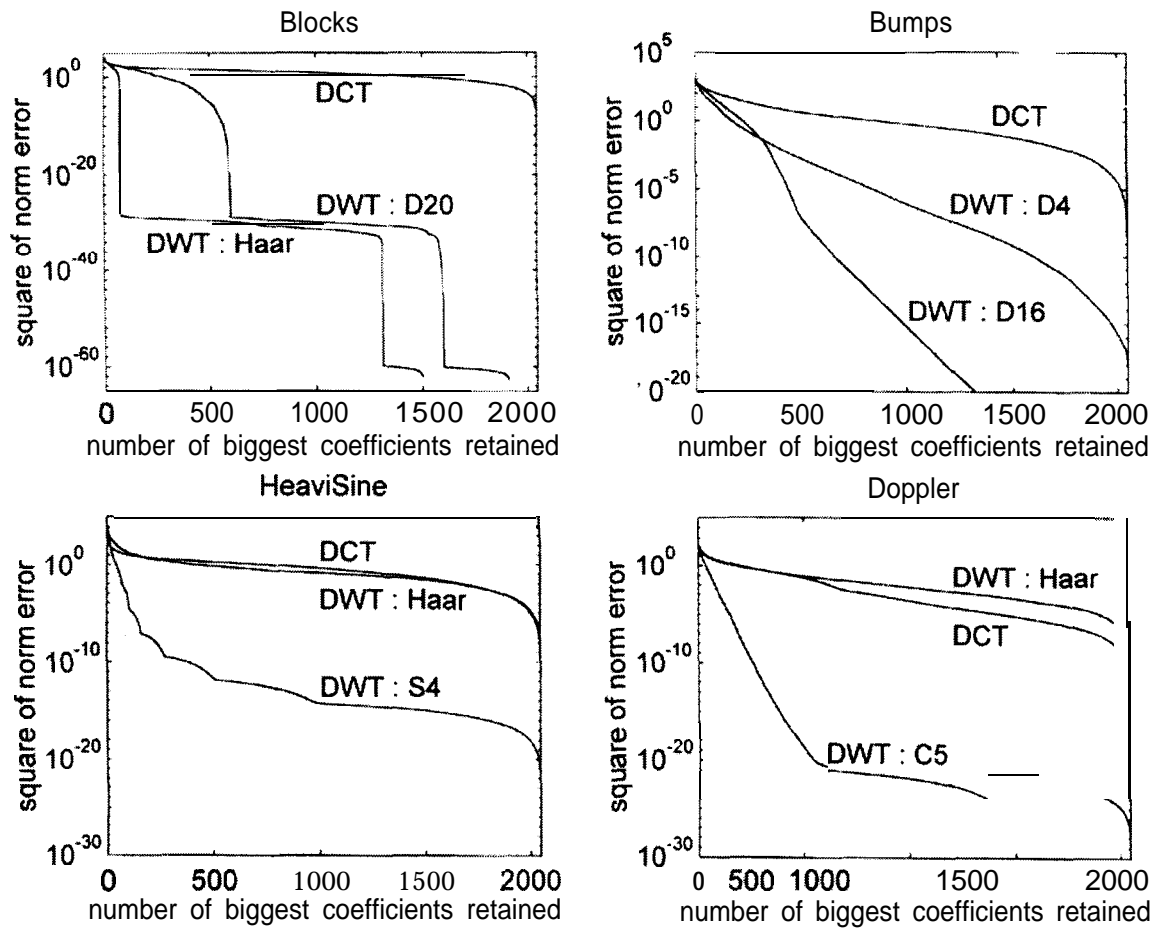
1. Fliege. N. J., 1994, *Multirate digital signal processing : multirate systems, filter banks and wavelets*. John Wiley & Sons Ltd., England. pp. 151-152 and pp. 251-271.
2. Vidakovic. B.. and Muller. P., 1994, *Wavelets for Kids*, Available by FTP at [ftp://ftp.isds.duke.edu/pub/brani/papers/wav4kids\[A\].ps.z](ftp://ftp.isds.duke.edu/pub/brani/papers/wav4kids[A].ps.z)
3. Young, R. K., 1993, *Wavelet theory and its applications*, Kluwer Academic Publishers, pp. 1-2.
4. Cody, M. A., 1992. *The fast Wavelet transform beyond Fourier transforms*, Available by FTP at <ftp://ftp.dfw.net> in directory [/pub/users/mcody/fwt.ps.gs](ftp://ftp.dfw.net/pub/users/mcody/fwt.ps.gs)
5. Daubechies. I., 1992. "Ten Lectures on Wavelets", *CBMS-NSF Regional Conference Series on Applied Mathematics*. SIAM, Vol. **16**, pp. 195-199.
6. Buckheit, J., Chen, S., Donoho, D., Johnstone, I. and Scargle, J., 1995, *WaveLab Reference Manual*, Available by HTTP at <http://playfair.stanford.edu/reports/wavelab/wavelabref.pdf>, pp. 162.
7. Stollnitz, E. J., Deroose. A. D., and Salesin, D. H., 1995. "Wavelets for Computer Graphics : A Primer, Part I", *IEEE Computer Graphics and Applications*, **15(3)**: pp. 76-84.
8. Elllott, D. F., 1987, *Handbook of Digital Signal Processing : Engineering Applications*, Academic Press, Inc., California. pp. 486-492.



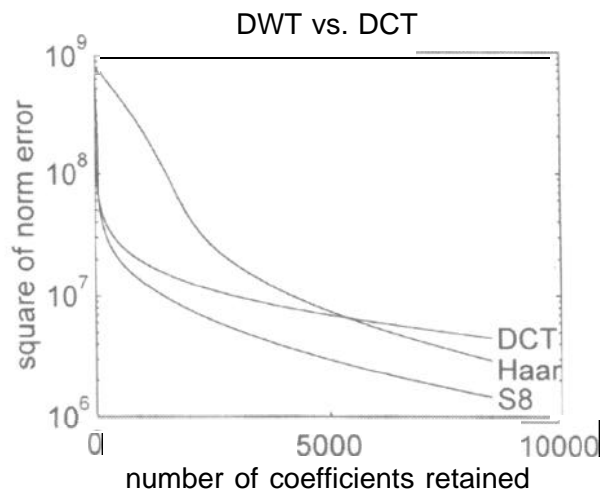
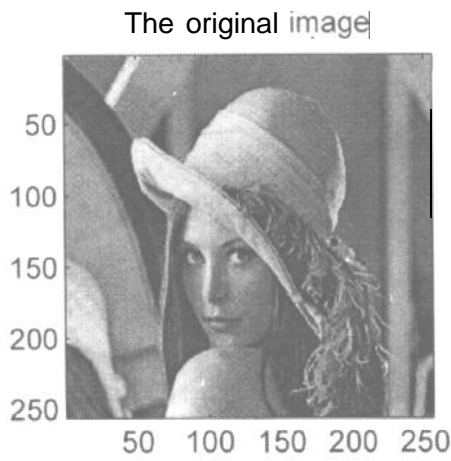
รูปที่ 8 การประมาณสัญญาณ Blocks และ Bumps ด้วยวิธี DCT (แถวที่ 2) และวิธี DWT (แถวที่ 3)
ทั้ง 2 วิธีสร้างกลับคืนด้วยสัมประสิทธิ์ค่ามากจำนวน 64 เท่า



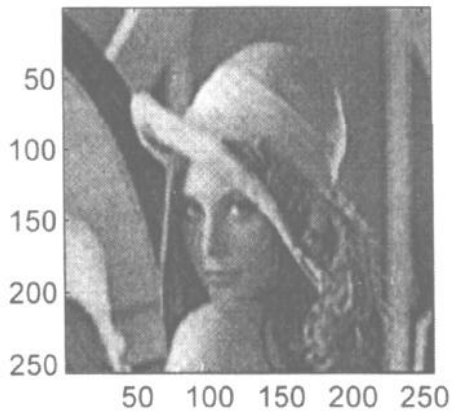
รูปที่ 9 การประมาณสัญญาณ HeaviSine และ Doppler ด้วยวิธี DCT (แถวที่ 2) และวิธี DWT (แถวที่ 3) ทั้ง 2 วิธีสร้างกลับคืนด้วยสัมประสิทธิ์ค่ามากที่สุดจำนวน 64 เท่า



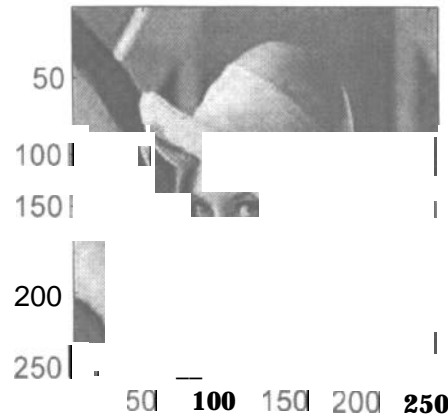
รูปที่ 10 เปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างวิธี DWT และ DCT ด้วยค่ากำลังสองของ L_2 error



5% of biggest coefficients by DCT



5% of biggest coefficients by DWT (S8)



รูปที่ 11 การประมาณข้อมูลภาพด้วยวิธี DWT : S8 (รูปล่างขวา) มีค่า Relative L_2 error 1.3734% และวิธี DCT (รูปล่างซ้าย) มีค่า Relative L_2 error 2.8801% ทั้ง 2 วิธีสร้างกลับคืนด้วยสัมประสิทธิ์ค่ามากจำนวน 5% ของทั้งหมด กราฟรูปบนขวา แสดงค่ากำลังสองของ L_2 error ของวิธี DWT และ DCT ด้วยจำนวนสัมประสิทธิ์จาก 8500 ค่าลงมา