

# การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในโครงสร้างตัวนำ ทรงกลมสามมิติโดยวิธีผลต่างสี่บเนื่องเชิงเวลา

เอกจิต คุ่มวงศ์<sup>1</sup> ชูวงศ์ พงศ์เจริญพาณิชย์<sup>1</sup> และ โมไนย ไกรฤกษ์<sup>2</sup>  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

---

## บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในโครงสร้างทรงกลม โดยใช้วิธีผลต่างสี่บเนื่องเชิงเวลา ซึ่งสร้างขึ้นจากสมการของแมกซ์เวลล์ ในบทความนี้กล่าวถึงรายละเอียดในการสร้างสมการผลต่างสี่บเนื่องเชิงเวลา จุดเอกฐานในการคำนวณสนามที่เกิดขึ้น เนื่องจากรูปทรงกลมพร้อมทั้งเสนอแนวทางแก้ไข เงื่อนไขขอบเขตการแพร่กระจายคลื่นของพื้นผิวชั้นนอกสุดที่เสนอขึ้นใหม่ รวมถึงสมการเกณฑ์เสถียรภาพสำหรับพิกัดทรงกลม พร้อมทั้งการเลือกค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมในการคำนวณขั้นเวลาสุดท้าย เป็นการวิเคราะห์ปัญหาที่มีแหล่งกำเนิดเป็นพัลส์แม่เหล็กไฟฟ้าและคลื่นต่อเนื่อง เพื่อแสดงให้เห็นถึงพฤติกรรมของระเบียบวิธีนี้ต่อแหล่งกำเนิดคลื่นที่มีลักษณะแตกต่างกัน

---

<sup>1</sup> นักศึกษาระดับบัณฑิตศึกษา คณะวิศวกรรมศาสตร์และ สำนักวิจัยการสื่อสารและเทคโนโลยีสารสนเทศ

<sup>2</sup> รองศาสตราจารย์ คณะวิศวกรรมศาสตร์และ สำนักวิจัยการสื่อสารและเทคโนโลยีสารสนเทศ

# Electromagnetic Field Analysis of the Three-Dimensional Finite-Difference Time-Domain Method in Spherical Coordinates

Ekajit Khoomwong<sup>1</sup> Chuwong Phongcharoenpanich<sup>1</sup> and Monai Krairiksh<sup>2</sup>

King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

---

## Abstract

This paper presents analysis of electromagnetic fields by using the finite-difference time-domain (FD-TD) method in three-dimensional spherical coordinates which is constructed from a set of Maxwell's equations. The details of formulations are shown and three main singularities, which occur due to spherical geometry, are described including their treatments. Some alternative easy-implementing radiation boundary conditions (RBCs) are also introduced. Then, a stability criterion for three-dimensional spherical coordinates and time step determinations are considered. Finally, effects of simulating RBCs on calculating field unknowns and behaviors of this F'D-TD algorithm due to different types of applying sources such as pulse and continuous wave, will be illustrated.

---

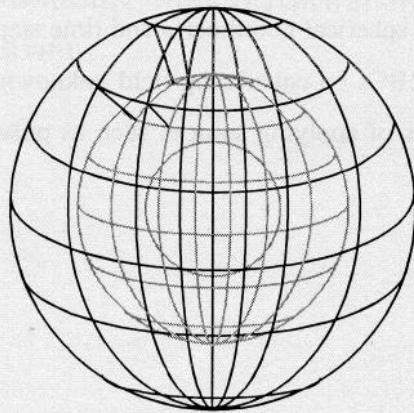
<sup>1</sup> Graduate Student, Faculty of Engineering and Research Center for Communications and Information Technology

<sup>2</sup> Associate Professor, Faculty of Engineering and Research Center for Communications and Information Technology

## 1. บทนำ

วิธีผลต่างสืบเนื่องเชิงเวลา (Finite-Difference Time-Domain Method) คือ การประยุกต์ใช้วิธีการเชิงเลขที่เรียกว่า วิธีผลต่างสืบเนื่อง เพื่อประมาณผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เทียบกับเวลาและตำแหน่ง โดยเฉพาะสมการของแมกซ์เวลล์ บุคคลแรกที่เสนอแนวคิดนี้ในปี ค.ศ. 1966 [1] คือ Kane Yee เขาได้เสนอปัญหาในพิกัดมุมฉากสองมิติ ซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตและแหล่งก่อกวนภายในเป็นตัวนำสมบูรณ์ แต่เกณฑ์เสถียรภาพ (stability criterion) ที่เขาเสนอนั้นไม่ถูกต้อง ต่อมาในปี ค.ศ. 1975 Allen Taflove ได้เสนอบทความเพื่อขยายแนวความคิดนี้ไปสู่พิกัดมุมฉากสามมิติ และได้เสนอเกณฑ์เสถียรภาพใหม่ที่ถูกต้องและทั่วไปมากขึ้น [2] รวมถึงผลงานวิจัยในลำดับถัดมาของเขา เช่น [3]-[4] ต่อจากนั้นนักวิจัยในแขนงที่เกี่ยวข้องกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าก็เริ่มให้ความสนใจในวิธีการนี้มากขึ้น และสร้างผลงานวิจัยต่างๆ มากมายจนถึงปัจจุบัน หนึ่งในจำนวนนั้น คือ Richard Holland ซึ่งเริ่มเสนอบทความเกี่ยวกับวิธีผลต่างสืบเนื่องเชิงเวลาเมื่อปี ค.ศ. 1977 [5] และผลงานถัดมา เช่น [6]-[7] ผลงานในปี ค.ศ. 1983 [7] ของเขา คือ THREDS ซึ่งเป็นปัญหาเกี่ยวกับพัลส์แม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic pulse, EMP) ในพิกัดทรงกลมสามมิติ

ในบทความฉบับนี้จึงได้เลือกที่จะเสนอแนวคิดในรายละเอียดเกี่ยวกับปัญหานี้ รวมถึงสมการเกณฑ์เสถียรภาพและปัญหาในกรณีที่แหล่งกำเนิดเป็นคลื่นต่อเนื่องซึ่งไม่ได้กล่าวไว้ใน [7] ผลที่ได้จากบทความฉบับนี้จะนำไปประยุกต์ใช้ในการสร้างแบบจำลองสายอากาศแบบแถวลำดับบนผิวตัวนำทรงกลมต่อไป



รูปที่ 1ก ลักษณะของบริเวณที่จะวิเคราะห์ปัญหา

การใช้พิกัดทรงกลมในปัญหานี้มีข้อดีกว่าการใช้พิกัดมุมฉากสองประการด้วยกัน (1) เนื่องจากรูปทรงกลมของระบบพิกัด ทำให้สามารถป้อนแหล่งกำเนิดหรือเก็บข้อมูลที่ตำแหน่งใดๆ ในบริเวณที่สนใจ ให้มีลักษณะเป็นคลื่นทรงกลม (spherical wave) ได้ง่าย โดยการอ้างถึงพารามิเตอร์ทั้งสามตัว ได้แก่  $r$   $\theta$  และ  $\phi$  ในทางกลับกัน ถ้าใช้พิกัดมุมฉากจะต้องมีการแปลงจุดพิกัดให้อยู่ในรูปแบบของพิกัดทรงกลมก่อนซึ่งยุ่งยากกว่า (2) ในการคิด เงื่อนไขขอบเขตที่พื้นผิวสิ้นสุด (truncated boundary) หรือเงื่อนไขขอบเขตของการแพร่กระจายคลื่น ในกรณีของพิกัดทรงกลม ถ้าใช้พื้นผิวทรงกลมทั้งลูก (รูปที่ 1ก) จะคิดเพียงพื้นผิวเดียวที่อยู่นอกสุดเท่านั้น แต่ในกรณีพิกัดมุมฉากเราจะต้องคิดที่พื้นผิวทั้งหมดด้าน (ในสามมิติ) และการคิดเงื่อนไขขอบเขตของการแพร่กระจายคลื่นจะยุ่งยากกว่ามาก



ในบทความนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดในการสร้างสมการผลต่างสปีบเนื่องเชิงเวลาจากสมการของแมกซ์เวลล์ก่อนเป็นอันดับแรก ต่อจากนั้นจะกล่าวถึงจุดเอกฐานที่เป็นปัญหาในการคำนวณผลต่างสปีบเนื่องเชิงเวลาในพิกัดทรงกลมพร้อมทั้งเสนอแนวทางแก้ไข หลังจากนั้นจะเป็นส่วนการสร้างสมการเกณฑ์เสถียรภาพ และในส่วนสุดท้ายจะกล่าวถึงผลที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาต่างๆ ด้วยสมการผลต่างสปีบเนื่องเชิงเวลาที่สร้างขึ้น

## 2. สมการของแมกซ์เวลล์ และสมการผลต่างสปีบเนื่องเชิงเวลา

ชุดของสมการแมกซ์เวลล์ที่รู้จักกันดีมีอยู่สองรูปแบบ คือ รูปแบบอินทิกรัล และรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์ สมการของแมกซ์เวลล์ในรูปแบบหลังนี้เท่านั้นที่เป็นประโยชน์ในการสร้างสมการผลต่างสปีบเนื่องเชิงเวลา จากสมการของแมกซ์เวลล์ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่มีแหล่งจ่ายความหนาแน่นกระแสแม่เหล็ก (impressed magnetic current density)

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (1ก)$$

และ

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}_i + \bar{J}_c + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (1ข)$$

โดยที่  $\bar{E}$  คือ ความเข้มสนามไฟฟ้า มีหน่วยเป็นโวลต์ต่อเมตร

$\bar{H}$  คือ ความเข้มสนามแม่เหล็ก มีหน่วยเป็นแอมแปร์ต่อเมตร

$\bar{D}$  คือ ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า มีหน่วยเป็นคูลอมบ์ต่อตารางเมตร

$\bar{B}$  คือ ความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก มีหน่วยเป็นเวเบอร์ต่อตารางเมตร

$\bar{J}_i$  คือ ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าแหล่งจ่าย มีหน่วยเป็นแอมแปร์ต่อตารางเมตร

$\bar{J}_c$  คือ ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำ มีหน่วยเป็นแอมแปร์ต่อตารางเมตร

ในกรณีที่ตัวกลางเป็นแบบเชิงเส้น ไอโซทรอปิก และไม่กระจายตามความถี่ (nondispersive)  $B$  และ  $D$  มีความสัมพันธ์กับ  $H$  และ  $E$  ตามลำดับดังนี้

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \quad (2ก)$$

และ

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad (2ข)$$

โดยที่  $\mu$  และ  $\epsilon$  คือ ความซึมซาบได้สนามแม่เหล็ก (เฮนรีต่อเมตร) และสภาพยอมสนามไฟฟ้า (ฟารัดต่อเมตร) ตามลำดับ และ  $\bar{J}_c$  สัมพันธ์กับ  $\bar{E}$  คือ

$$\bar{J}_c = \sigma \bar{E} \quad (2ค)$$

โดยใช้สมการ (2ก) ถึง (2ค) กับสมการ (1ก) และ (1ข) จะได้



$$\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\nabla \times \bar{E} \quad (3ก)$$

และ

$$\varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \sigma \bar{E} = -\bar{J}_i + \nabla \times \bar{H} \quad (3ข)$$

โดยใช้คุณสมบัติทางเวกเตอร์ของเคิร์ลของเวกเตอร์ใดๆ ในพิกัดทางกลม

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{A} &= \frac{\hat{a}_r}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\ &+ \frac{\hat{a}_\theta}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \\ &+ \frac{\hat{a}_\phi}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

ร่วมกับสมการ (3ก) และ (3ข) และแยกออกเป็น 6 สมการตามจำนวนองค์ประกอบของสนามได้เป็น

$$\mu \frac{\partial H_r}{\partial t} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\phi \sin \theta) \right] \quad (5ก)$$

$$\mu \frac{\partial H_\theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \right] \quad (5ข)$$

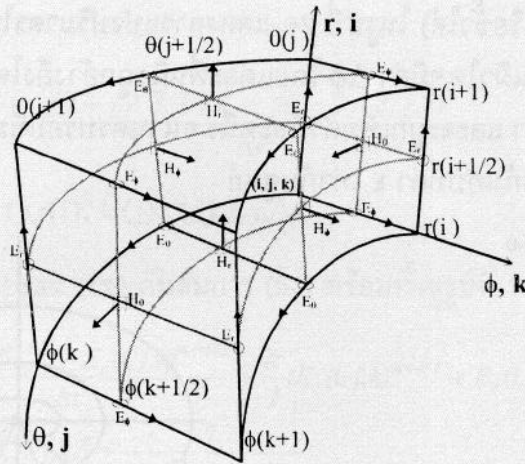
$$\mu \frac{\partial H_\phi}{\partial t} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial E_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) \right] \quad (5ค)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} + \sigma E_r = -J_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (H_\phi \sin \theta) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right] \quad (5ง)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_\theta}{\partial t} + \sigma E_\theta = -J_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) \right] \quad (5จ)$$

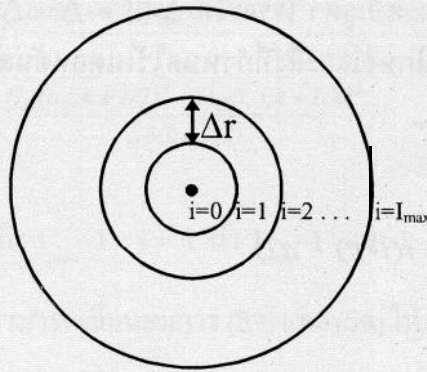
$$\varepsilon \frac{\partial E_\phi}{\partial t} + \sigma E_\phi = -J_\phi + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \quad (5ฉ)$$

สมการที่ได้นี้อยู่ในรูปแบบที่พร้อมสำหรับการสร้างสมการผลต่างสี่เหลี่ยมเชิงเวลา โดยจะประมาณพจน์อนุพันธ์เทียบกับเวลา (ทางซ้ายมือ) และอนุพันธ์เทียบกับตำแหน่ง (ทางขวามือ) ด้วยสูตรผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลาง (central difference) อันดับสอง หรือสูงกว่า



รูปที่ 1x ตำแหน่งขององค์ประกอบสนามทั้ง 6

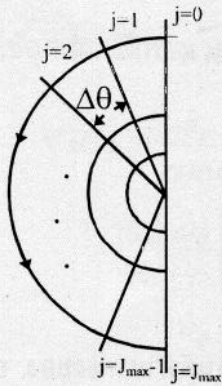
ก่อนที่จะสร้างสมการผลต่างสี่บเนื่องเชิงเวลาได้จะต้องกำหนดตำแหน่งของ องค์ประกอบสนามทั้ง 6 ตัว ซึ่งได้แก่  $E_r$   $E_\theta$   $E_\phi$   $H_r$   $H_\theta$  และ  $H_\phi$  บนแต่ละปริมาตรย่อยที่แบ่ง (รูปที่ 1ก) ก่อนตามที่ได้เสนอไว้ใน [7] หรือเทียบเคียงกับงานวิจัย [1] (กรณีพีทัดมุมฉาก) จะได้ตำแหน่งขององค์ประกอบทั้ง 6 ตัว บนแต่ละปริมาตรย่อยดังรูป 1x ซึ่งจะนำไปใช้ในการสร้างสมการผลต่างสี่บเนื่องเชิงเวลาต่อไป เพื่อความสะดวกในการสร้างสมการผลต่างสี่บเนื่อง และได้สมการที่พร้อมสำหรับนำไปเขียนโปรแกรม จึงควรกำหนดสัญลักษณ์ต่างๆ พร้อมทั้งอธิบายถึงการแบ่งปริมาตรย่อยดังจะกล่าวต่อไปนี้



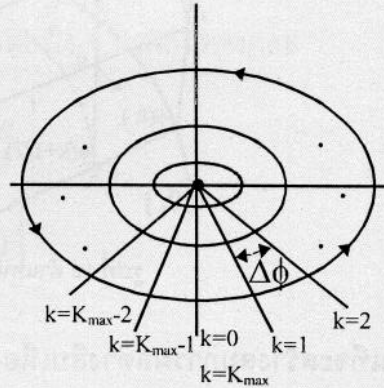
รูปที่ 2ก การแบ่งปริมาตรย่อยในทิศของรัศมี

ในรูปที่ 2ก แสดงปริมาตรรูปทรงกลมถูกแบ่งออกเป็นชั้นๆ โดยพื้นผิวทรงกลมที่มีรัศมีต่างๆ กัน แต่ละชั้นมีระยะห่างกัน  $\Delta r$  และใช้ตัวดัชนี  $i$  เพื่ออ้างถึงพื้นผิวทรงกลมแต่ละชั้น โดยที่ชั้นในสุดอยู่ที่จุดศูนย์กลาง (รัศมีเท่ากับศูนย์) มีค่าดัชนีเป็นศูนย์ และมีค่าเพิ่มขึ้นทีละหนึ่งในแต่ละพื้นผิวที่อยู่รอบนอกออกมาเรื่อยๆ จนถึง  $i$  เท่ากับ  $I_{\max}$  ที่พื้นผิวทรงกลมที่อยู่นอกสุด (รัศมีเท่ากับ  $R_{\max}$ ) ในรูป 2ข แสดงการแบ่งปริมาตรในแนวมุม  $\theta$  ที่มีพื้นผิว  $\theta$  เป็นค่าคงที่ๆ มุมค่าต่างๆ กัน แต่ละพื้นผิวนั้นถูกอ้างถึงด้วยตัวดัชนี  $j$  ระยะห่างของมุมที่แบ่ง คือ  $\Delta\theta$   $j$  มีค่าเท่ากับศูนย์ที่มุม  $\theta$  เท่ากับศูนย์องศา (หรือซั้วเหนือ) และค่าดัชนีจะมีค่าเพิ่มขึ้นทีละหนึ่งที่พื้นผิวถัดลงมาจนถึงพื้นผิวสุดท้ายที่มุม  $\theta$  เท่ากับ

180 องศา  $j$  เท่ากับ  $J_{\max}$  (หรือข้าวใต้) ในรูปที่ 2ค แสดงการแบ่งปริมาตรในแนวมุม  $\phi$  ด้วยพื้นผิว  $\phi$  คงที่ ระยะห่างระหว่างสองพื้นผิวใด ๆ มีค่า  $\Delta\phi$  โดยแต่ละพื้นผิวถูกอ้างถึงโดยตัวดัชนี  $k$   $k$  มีค่าเท่ากับ ศูนย์ที่มุม  $\phi$  เท่ากับศูนย์องศา และจะถูกเพิ่มค่าทีละหนึ่ง จนวนครบรอบที่มุม  $\phi$  เท่ากับ 360 องศา ( $k$  เท่ากับ  $K_{\max}$ ) ซึ่งเป็นจุดเดียวกันกับที่ค่า  $k$  เท่ากับศูนย์



รูปที่ 2ข การแบ่งปริมาตรย่อยในทิศทาง  $\theta$



รูปที่ 2ค การแบ่งปริมาตรย่อยในทิศทาง  $\phi$

โดยทั่วไปแล้วพารามิเตอร์  $r$   $\theta$  และ  $\phi$  จะถูกอ้างถึงในลักษณะที่เป็นฟังก์ชันของ  $i$  (หรือ  $r(i)$ )  $j$  (หรือ  $\theta(j)$ ) และ  $k$  (หรือ  $\phi(k)$ ) ตามลำดับ และเช่นเดียวกันสำหรับ  $\Delta r$   $\Delta\theta$  และ  $\Delta\phi$  ที่อาจมีค่าไม่คงที่ตลอดบริเวณที่วิเคราะห์ปัญหา ดังนั้นพารามิเตอร์เหล่านี้จะถูกอ้างถึงในลักษณะที่เป็นฟังก์ชันของ  $i$  (หรือ  $\Delta r(i)$ )  $j$  (หรือ  $\Delta\theta(j)$ ) และ  $k$  (หรือ  $\Delta\phi(k)$ ) ในกรณีนี้  $\Delta r$   $\Delta\theta$  และ  $\Delta\phi$  ถูกกำหนดให้มีค่าคงที่ตลอดบริเวณที่วิเคราะห์ปัญหา เราจะได้  $\Delta r(i) = \Delta r$   $\Delta\theta(j) = \Delta\theta$  และ  $\Delta\phi(k) = \Delta\phi$  สำหรับค่า  $i$   $j$  และ  $k$  ค่าใดๆ สัญลักษณ์และสิ่งที่กำหนดไว้ในตอนต้นสามารถเขียนสรุปได้อีกครั้ง ดังนี้

$$\begin{aligned}
 r(0) &= 0 \\
 r(J_{\max}) &= R_{\max} \\
 \Delta r(i) &= r(i+1) - r(i)
 \end{aligned}
 \tag{6ก}$$

$$\begin{aligned}
 \theta(0) &= 0^\circ \\
 \Delta(J_{\max}) &= 180^\circ \\
 \Delta\theta(i) &= \theta(i+1) - \theta(i)
 \end{aligned}
 \tag{6ข}$$

$$\begin{aligned}
 \phi(0) &= 0^\circ \\
 \phi(K_{\max}) &= 360^\circ \\
 \Delta\phi(k) &= \phi(k+1) - \phi(k)
 \end{aligned}
 \tag{6ค}$$

สูตรการประมาณแบบผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลาง (ครึ่งขั้น) สำหรับอนุพันธ์เทียบกับเวลา และอนุพันธ์เทียบกับตำแหน่ง สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial f(i, j, k)^n}{\partial t} \cong \frac{f(i, j, k)^{n+1/2} - f(i, j, k)^{n-1/2}}{\Delta t}
 \tag{7ก}$$



และ

$$\frac{\partial f(i, j, k)^n}{\partial r} = \frac{f(i+1/2, j, k)^n - f(i-1/2, j, k)^n}{\Delta r} \quad (7ข)$$

โดย  $f(i, j, k)^n \equiv f(r(i), \theta(j), \phi(k), n\Delta t)$ 

โดยใช้สมการ (7ก) และ (7ข) กับสมการ (5) พร้อมทั้งดูรูปที่ 1ข จะได้

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{E_r(i, j, k)^{n+1/2} - E_r(i, j, k)^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{\sigma}{2} (E_r(i, j, k)^{n+1/2} + E_r(i, j, k)^{n-1/2}) \\ = -J_r(i, j, k)^n + \frac{1}{r(i+1/2)\sin\theta(j)} \\ \times \left[ \frac{\sin\theta(j+1/2)H_\phi(i, j+1/2, k)^n - \sin\theta(j-1/2)H_\phi(i, j-1/2, k)^n}{\Delta\theta(j-1/2)} \right. \\ \left. - \frac{H_\theta(i, j, k+1/2)^n - H_\theta(i, j, k-1/2)^n}{\Delta\phi(k-1/2)} \right] \end{aligned} \quad (8ก)$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$\begin{aligned} E_r(i, j, k)^{n+1/2} = \frac{\varepsilon/\Delta t - \sigma/2}{\varepsilon/\Delta t + \sigma/2} E_r(i, j, k)^{n-1/2} \\ + \frac{1}{\varepsilon/\Delta t + \sigma/2} \left\{ -J_r(i, j, k)^n + \frac{1}{r(i+1/2)\sin\theta(j)} \right. \\ \times \left[ \frac{\sin\theta(j+1/2)H_\phi(i, j+1/2, k)^n - \sin\theta(j-1/2)H_\phi(i, j-1/2, k)^n}{\Delta\theta(j-1/2)} \right. \\ \left. - \frac{H_\theta(i, j, k+1/2)^n - H_\theta(i, j, k-1/2)^n}{\Delta\phi(k-1/2)} \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (8ข)$$

ซึ่งใช้ได้สำหรับ  $i = 0$  ถึง  $I_{\max} - 1$   $j = 1$  ถึง  $J_{\max} - 1$  และ  $k = 1$  ถึง  $K_{\max}$ 

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถเขียนสมการ (5) และ (5บ) ให้อยู่ในรูปสมการผลต่างสี่บเนื่องได้

$$\begin{aligned} E_\theta(i, j, k)^{n+1/2} = \frac{\varepsilon/\Delta t - \sigma/2}{\varepsilon/\Delta t + \sigma/2} E_\theta(i, j, k)^{n-1/2} \\ + \frac{1}{\varepsilon/\Delta t + \sigma/2} \left\{ -J_\theta(i, j, k)^n + \frac{1}{r(i)} \right. \\ \times \left[ \frac{H_r(i, j, k+1/2)^n - H_r(i, j, k-1/2)^n}{\sin\theta(j)\Delta\phi(k-1/2)} \right. \\ \left. - \frac{r(i+1/2)H_\phi(i+1/2, j, k)^n - r(i-1/2)H_\phi(i-1/2, j, k)^n}{\Delta r(i-1/2)} \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (8ค)$$

ใช้ได้สำหรับ  $i = 1$  ถึง  $I_{\max} - 1$   $j = 0$  ถึง  $J_{\max} - 1$  และ  $k = 1$  ถึง  $K_{\max}$

$$\begin{aligned}
E_\phi(i, j, k)^{n+1/2} &= \frac{\varepsilon/\Delta t - \sigma/2}{\varepsilon/\Delta t + \sigma/2} E_\phi(i, j, k)^{n-1/2} \\
&+ \frac{1}{\varepsilon/\Delta t + \sigma/2} \left\{ -J_\phi(i, j, k)^n + \frac{I}{r(i)} \right. \\
&\times \left[ \frac{r(i+1/2)H_\theta(i+1/2, j, k)^n - r(i-1/2)H_\theta(i-1/2, j, k)^n}{\Delta r(i-1/2)} \right. \\
&\left. \left. - \frac{H_r(i, j+1/2, k)^n - H_r(i, j-1/2, k)^n}{\Delta \theta(j-1/2)} \right] \right\} \quad (8ง)
\end{aligned}$$

ใช้ได้สำหรับ  $i = 1$  ถึง  $I_{\max} - 1$   $j = 1$  ถึง  $J_{\max} - 1$  และ  $k = 0$  ถึง  $K_{\max} - 1$

จากการสร้างสมการผลต่างสี่เหลี่ยมเชิงเวลาข้างต้นพจน์  $\sigma E$  ในสมการ (5ง) ถึง (5ฉ) ถูกประมาณโดยใช้ค่าเฉลี่ยของสนาม  $E$  ที่เวลาปัจจุบัน ( $n+1/2$ ) และ เวลาก่อนหน้านั้น ( $n-1/2$ ) วิธีการนี้เรียกว่าการประมาณกึ่งโดยนัย (semi-implicit approximation [8])

โดยใช้สมการ (7ก) (7ข) และ (5ก) พร้อมทั้งดูรูปที่ 1ข จะได้

$$\begin{aligned}
&\mu \frac{H_r(i, j, k)^{n+1} - H_r(i, j, k)^n}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{r(i)\sin\theta(j+1/2)} \left[ \frac{E_\theta(i, j, k+1)^{n+1/2} - E_\theta(i, j, k)^{n+1/2}}{\Delta \phi(k)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin\theta(j+1)E_\phi(i, j+1, k)^{n+1/2} - \sin\theta(j)E_\phi(i, j, k)^{n+1/2}}{\Delta \theta(j)} \right] \quad (9ก)
\end{aligned}$$

หรือ เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
H_r(i, j, k)^{n+1} &= H_r(i, j, k)^n \\
&+ \frac{\Delta t}{\mu r(i)\sin\theta(j+1/2)} \left[ \frac{E_\theta(i, j, k+1)^{n+1/2} - E_\theta(i, j, k)^{n+1/2}}{\Delta \phi(k)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin\theta(j+1)E_\phi(i, j+1, k)^{n+1/2} - \sin\theta(j)E_\phi(i, j, k)^{n+1/2}}{\Delta \theta(j)} \right] \quad (9ข)
\end{aligned}$$

ซึ่งใช้ได้เมื่อ  $i = 1$  ถึง  $I_{\max}$   $j = 0$  ถึง  $J_{\max} - 1$  และ  $k = 0$  ถึง  $K_{\max} - 1$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถเขียนสมการ (5ข) และ (5ค) ให้อยู่ในรูปสมการผลต่างสี่เหลี่ยมได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
H_\theta(i, j, k)^{n+1} &= H_\theta(i, j, k)^n \\
&+ \frac{\Delta t}{\mu r(i+1/2)} \left[ \frac{r(i+1)E_\phi(i+1, j, k)^{n+1/2} - r(i)E_\phi(i, j, k)^{n+1/2}}{\Delta r(i)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{E_r(i, j, k+1)^{n+1/2} - E_r(i, j, k)^{n+1/2}}{\sin\theta(j)\Delta \phi(k)} \right], \quad (9ค)
\end{aligned}$$

ใช้ได้เมื่อ  $i = 0$  ถึง  $I_{\max} - 1$   $j = 1$  ถึง  $J_{\max} - 1$  และ  $k = 0$  ถึง  $K_{\max} - 1$

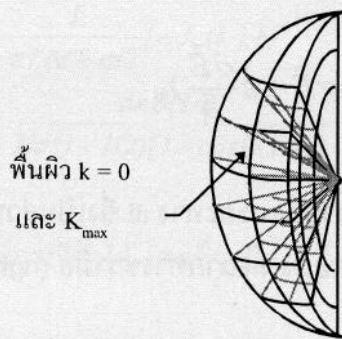
$$H_\phi(i, j, k)^{n+1} = H_\phi(i, j, k)^n + \frac{\Delta t}{\mu r(i+1/2)} \left[ \frac{E_r(i, j+1, k)^{n+1/2} - E_r(i, j, k)^{n+1/2}}{\Delta \theta(j)} - \frac{r(i+1)E_\theta(i+1, j, k)^{n+1/2} - r(i)E_\theta(i, j, k)^{n+1/2}}{\Delta r(i)} \right] \quad (9g)$$

ใช้ได้เมื่อ  $i = 0$  ถึง  $I_{\max} - 1$   $j = 0$  ถึง  $J_{\max} - 1$  และ  $k = 0$  ถึง  $K_{\max} - 1$

ในสมการ (8ก) ถึง (9ง) นั้น ค่าของ  $\varepsilon$  และ  $\mu$  ต้องเป็นค่าที่ตำแหน่งซึ่งเราต้องการคำนวณหาค่าสนาม

### 3. จุดเอกฐาน

ในสมการที่ผ่านมานั้น ((8ข)-(8ง) และ (9ข)-(9ง)) จะมีช่วงค่าบางค่าของตัวแปรดัชนี  $i$   $j$  และ  $k$  เท่านั้นที่ใช้ได้ เช่น ตัวแปรดัชนี  $j$  ในสมการ (8ข) มีช่วงที่ใช้ได้จาก 1 ถึง  $J_{\max} - 1$  เท่านั้น ส่วนจุดที่  $j = 0$  และ  $J_{\max}$  จะใช้สมการ (8ข) ไม่ได้ ดังนั้นเราจะนิยามจุดที่ไม่สามารถใช้สมการ (8ข) ถึง (9ง) ในการคำนวณสนามได้ว่า จุดเอกฐาน ในปัญหาจะมีจุดเอกฐานอยู่ 3 จุดใหญ่ๆ ซึ่งในบางจุดเราสามารถหาวิธีการแก้ไขได้ แต่ในบางจุดก็ไม่สามารถทำได้



รูปที่ 3ก จุดเอกฐานที่หนึ่ง ที่  $k=0$  และ  $K_{\max}$

จุดเอกฐานจุดแรก เกิดที่พื้นผิว  $\phi$  คงที่ ที่  $\phi = 0$  และ  $360$  องศา ซึ่งเป็นพื้นผิวเดียวกัน (รูปที่ 3ก) จากสมการ (8ข) ถึง (9ง) จะเห็นว่าองค์ประกอบสนามทั้งหมด (6 องค์ประกอบ) จะได้รับผลกระทบจากจุดเอกฐานจุดนี้ กล่าวคือ ถ้าเราใช้ค่าตัวแปรดัชนี  $k$  จาก 0 ถึง  $K_{\max}$  ตามปกติ เราจะพบว่าที่จุดเอกฐานนี้สนามจะถูกคำนวณซ้ำสองครั้งที่ ( $k = 0$  และ  $K_{\max}$ ) ทำให้ผลที่ได้ไม่ถูกต้อง เราสามารถแก้ไขปัญหานี้ได้ง่ายโดยใช้ เงื่อนไขเชื่อมต่อนี้ (joining conditions [7]) ซึ่งสามารถสร้างได้โดยตรงจากสมการ (8ข) ถึง (9ง) พร้อมทั้งดูรูปที่ 1ข ดังนี้

$$E_r(i, j, 0)^{n+1/2} = E_r(i, j, K_{\max})^{n+1/2} \quad (10ก)$$

$$E_q(i, j, 0)^{n+1/2} = E_q(i, j, K_{\max})^{n+1/2} \quad (10ข)$$



$$E_{\phi}(i|j, K_{\max})^{n+1/2} = E_{\phi}(i, j, 0)^{n+1/2} \quad (10ค)$$

$$H_r(i|j, K_{\max})^{n+1} = H_r(i|j, 0)^{n+1} \quad (10ง)$$

$$H_{\theta}(i|j, K_{\max})^{n+1} = H_{\theta}(i, j, 0)^{n+1} \quad (10จ)$$

$$H_{\phi}(i, j, K_{\max})^{n+1} = H_{\phi}(i, j, 0)^{n+1} \quad (10ฉ)$$

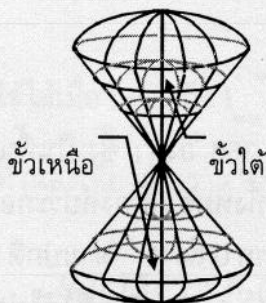
จุดเอกฐานที่สอง เกิดขึ้นที่ขั้วเหนือ ( $\theta = 0^\circ$ ) และขั้วใต้ ( $\theta = 180^\circ$ ) ตามรูปที่ 3ข จากรูปจะเห็นว่า มีสนามอยู่สามองค์ประกอบ ( $E_r$ ,  $E_{\phi}$  และ  $H_{\theta}$ ) ที่ได้รับผลกระทบ กล่าวคือ สนามทั้งสามองค์ประกอบจะรวมกันอยู่ในแกนกลาง (ขั้ว) ทำให้ไม่สามารถแยกได้ว่าองค์ประกอบสนามใดอยู่ ณ ตำแหน่งใดในขั้วนั้น จนถึงปัจจุบัน เราสามารถหาวิธีการประมาณได้เฉพาะองค์ประกอบ  $E_r$  เพียงตัวเดียว (สำหรับ  $E_{\phi}$  และ  $H_{\theta}$  จะถูกกำหนดให้ศูนย์ตลอดการคำนวณ) วิธีการประมาณองค์ประกอบ  $E_r$  วิธีการหนึ่งได้เสนอไว้ใน [7] โดยการใช้สมการอินทิกรัลของเคิร์ลของสนาม  $\bar{H}$

$$\oint_c \bar{H} \cdot d\bar{l} = \iint_c (\bar{J}_i + \sigma \bar{E} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}) \cdot d\bar{A} \quad (11ก)$$

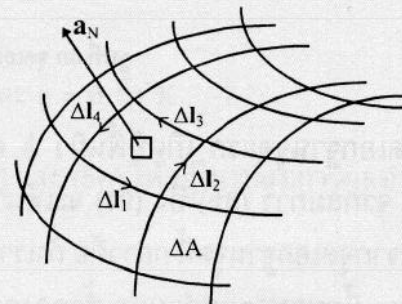
โดย  $\int_c$  คือ อินทิกรัลตลอดวงปิด  $c$  และเวกเตอร์เขียนสมการ (11ก) ให้อยู่ในรูปการประมาณได้เป็น

$$\frac{\oint_c \bar{H} \cdot d\bar{l}_{\Delta A}}{\Delta A} \cong (\bar{J}_i + \sigma \bar{E} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t})_N \quad (11ข)$$

โดยที่ ตัวห้อย  $\Delta A$  ของ  $d\bar{l}$  หมายถึง ระยะทาง  $d\bar{l}$  ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของวงปิด  $c$  (ดูรูป 3ค) เป็นขอบของพื้นที่  $\Delta A$  และตัวห้อย  $N$  หมายถึง ตั้งฉากทางขวามือ (right-hand normal) กับ  $\bar{A}$



รูปที่ 3ข จุดเอกฐานที่สอง ที่ขั้วเหนือ และขั้วใต้



รูปที่ 3ค ส่วนของวงปิด  $\Delta l$  ล้อมรอบพื้นที่  $\Delta A$

โดยใช้สมการ (7ก) กับทางขวามือของสมการ (11ข) จะได้

$$E_r(i, j, k)^{n+1/2} = \frac{\varepsilon/\Delta t - \sigma/2}{\varepsilon/\Delta t + \sigma/2} E_r(i, j, k)^{n-1/2} + \frac{1}{\varepsilon/\Delta t + \sigma/2} \left\{ -J_r(i, j, k)^n + \frac{\int H_\phi \cdot dl_{\Delta A}}{\Delta A} \right\} \quad (11ค)$$

ในกรณีของขั้วเหนือ ( $J=0$ ) วงปิด  $c$  คือ วงกลม  $\theta(1/2)$  ที่อยู่บนพื้นผิว  $r(i+1/2)$  พจน์อินทิกรัลในสมการ (11ค) สามารถประมาณได้โดยใช้ผลรวมของผลคูณของ  $H_\theta$  และ  $dl_{\Delta A}$  ดังนี้

$$\int_c H_\phi \cdot dl_{\Delta A} \cong \sum_{k=0}^{K_{max}-1} H_\phi r(i+1/2) \sin \theta(1/2) \Delta \phi(k) \quad (11ง)$$

และพื้นผิว  $\Delta A$  จะถูกแทนด้วยพื้นที่ ที่อยู่บนพื้นผิว  $r(i+1/2)$  ซึ่งถูกล้อมรอบด้วยวงปิด  $c$

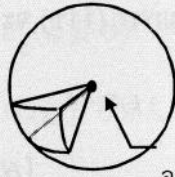
$$\Delta A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta(1/2)} r^2(i+1/2) \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi r^2(i+1/2) [1 - \cos \theta(1/2)] \quad (11จ)$$

เมื่อแทน (11ง) และ (11จ) ลงใน (11ค) จะได้

$$E_r(i, j, k)^{n+1/2} = \frac{\varepsilon/\Delta t - \sigma/2}{\varepsilon/\Delta t + \sigma/2} E_r(i, j, k)^{n-1/2} + \frac{1}{\varepsilon/\Delta t + \sigma/2} \left\{ -J_r(i, j, k)^n + \frac{\sin \theta(1/2)}{2\pi r(i+1/2) [1 - \cos \theta(1/2)]} \sum_{k=0}^{K_{max}-1} H_\phi \Delta \phi(k) \right\} \quad (12)$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับกรณีขั้วใต้ โดยที่วงปิด  $c$  คือ วงกลม  $\theta(J_{max}-1/2)$  ซึ่งอยู่บนพื้นผิว  $r(i+1/2)$  จะได้

$$E_r(i, j, k)^{n+1/2} = \frac{\varepsilon/\Delta t - \sigma/2}{\varepsilon/\Delta t + \sigma/2} E_r(i, j, k)^{n-1/2} + \frac{1}{\varepsilon/\Delta t + \sigma/2} \left\{ -J_r(i, j, k)^n - \frac{\sin \theta(J_{max}-1/2)}{2\pi r(i+1/2) [1 + \cos \theta(J_{max}-1/2)]} \sum_{k=0}^{K_{max}-1} H_\phi \Delta \phi(k) \right\} \quad (13)$$



จุดศูนย์กลาง

รูปที่ 3 จุดเอกฐานที่สาม ที่จุดศูนย์กลาง

จุดเอกฐานที่สามอยู่ที่จุดศูนย์กลางตามรูปที่ 3 เนื่องจากปริมาตรย่อยในบริเวณนี้มีลักษณะเป็นรูปทรงพีระมิด ทำให้องค์ประกอบสนามสามตัว คือ  $E_\theta$ ,  $E_\phi$  และ  $H_r$  รวมกันอยู่ที่จุดศูนย์กลาง จึงไม่สามารถแยกองค์ประกอบสนามออกมาได้ ซึ่งคล้ายกับกรณีจุดเอกฐานที่สอง แต่ในกรณีนี้จะไม่สามารถประมาณองค์ประกอบใดๆ ได้เลยด้วยสมการอินทิกรัล วิธีที่พอจะใช้แก้ปัญหานี้ได้บ้าง เช่น กำหนดระเบียบวิธีในการคำนวณของปริมาตรย่อยที่อยู่ใกล้จุดศูนย์กลางใหม่ โดยให้เป็นแบบผลต่างย้อนหลัง (backward-difference) หรือผลต่างไปข้างหน้า (forward-difference) แทนที่จะเป็นผลต่างตรงกลาง หรือ อีกวิธีหนึ่งคือ กำหนดให้จุดศูนย์กลางเป็นตัวนำสมบรูณ์ที่มีขนาดเล็กมาก ซึ่งมีรัศมีจำกัดค่าหนึ่ง ทำให้ได้ว่าองค์ประกอบสนามที่จุดนี้มีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด แต่อย่างไรก็ตาม วิธีที่กล่าวไปข้างต้นนั้นอาจส่งผลกระทบต่อการคำนวณผลต่างสืบเนื่องเชิงเวลา กล่าวคือ วิธีแรกอาจทำให้ความถูกต้องลดลง (ค่าความผิดพลาดสูงขึ้น) เนื่องจากผลต่างย้อนหลัง หรือ ผลต่างไปข้างหน้า มีความวามแม่นยำน้อยกว่าผลต่างตรงกลาง และในวิธีที่สองอาจทำให้เกิดการสะท้อนอย่างมาก เนื่องจากจุดศูนย์กลางเป็นตัวนำสมบรูณ์ ซึ่งอาจทำให้ระบบการคำนวณขาดเสถียรภาพได้

#### 4. เงื่อนไขขอบเขตที่พื้นผิวสิ้นสุด

นอกเหนือจากที่กล่าวแล้วในส่วนของจุดเอกฐาน ยังมีจุดที่ไม่สามารถใช้สมการ (8ข) ถึง (9ง) ในการคำนวณได้ คือ พื้นผิวที่อยู่นอกสุด เนื่องจากการคำนวณที่เราใช้เป็นแบบผลต่างตรงกลาง ซึ่งต้องการค่าเฉลี่ยระหว่างสนามที่อยู่ข้างหลังและข้างหน้า (ตามรูปที่ 1ข จะเห็นว่าที่พื้นผิวนอกสุดจะขาดสนามที่อยู่ข้างหน้า) ทำให้ไม่สามารถคำนวณสนามที่อยู่บนพื้นผิวนี้ได้ ดังนั้นเราต้องหาวิธีการในการประมาณสนาม ณ พื้นผิวนี้ พร้อมทั้งทำให้สนามภายในมองไม่เห็นพื้นผิวสิ้นสุดนี้ด้วย (เสมือนบริเวณที่วิเคราะห์ปัญหานี้ขยายกว้างสู่อินฟินิตี้) ในกรณีที่วิเคราะห์ปัญหาเป็นบริเวณเปิด วิธีการเหล่านี้รู้จักในนาม เงื่อนไขขอบเขตดูดกลืน (absorbing boundary conditions (ABCs)) หรือเงื่อนไขขอบเขตการแพร่กระจาย (radiation boundary conditions (RBCs)) วิธีการในยุคแรกๆ เสนอขึ้นโดย A. Bayliss และ E. Turkel [8] และวิธีการอื่นๆ ในยุคถัดมา [8] ซึ่งมีความถูกต้องมากขึ้น แต่มักจะเป็นประโยชน์ในกรณีพิกัดมุมฉากมากกว่าพิกัดทรงกลม วิธีการหนึ่งซึ่งเสนอไว้ [7] มีความง่ายและเหมาะสมสำหรับพิกัดทรงกลม ซึ่งจะประมาณเฉพาะองค์ประกอบสนาม  $E_\theta$  และ  $E_\phi$  ที่อยู่พื้นผิวนอกสุดเท่านั้น ดังจะกล่าวต่อไป

สมมติว่าเราสามารถประมาณสนามที่วิ่งออกจากพื้นผิวชั้นนอกสุดได้เป็น

$$U = \frac{f(t - r/v)}{r} \quad (14)$$



โดยที่  $U$  คือ องค์ประกอบของสนามใดๆ ที่วิ่งออกจากพื้นผิวสิ้นสุด  $t$  คือ เวลา  $r$  คือ ระยะทางตามแนวรัศมีวัดจากจุดศูนย์กลาง และ  $v$  คือ ความเร็วเฟสของคลื่น

จากที่ได้กล่าวไปแล้วว่าเราจะประมาณเฉพาะองค์ประกอบสนาม  $E_\theta$  และ  $E_\phi$  เท่านั้น ดังนั้นเพื่อความชัดเจนเราจะเขียนตัวแปร  $E$  แทน  $U$  และพารามิเตอร์ต่างๆ จะถูกเขียนในรูปสัญลักษณ์ที่กำหนดไว้ในส่วนต้นของบทความ ดังนี้

$$E(i, j, k)^{n+1/2} = \frac{f((n+1/2)\Delta t - r(i)/v)}{r(i)} \quad (14ก)$$

และเนื่องจากว่า เราจะใช้สมการ (14ก) กับพื้นผิวที่อยู่นอกสุด จะได้

$$E(I_{max}, j, k)^{n+1/2} = \frac{f((n+1/2)\Delta t - r(I_{max})/v)}{r(I_{max})} \quad (14ข)$$

วิธีการที่ดีที่สุดที่จะหาค่า  $E(I_{max}, j, k)^{n+1/2}$  ในสมการ (14ข) คือ ใช้ค่าสนามที่ทราบค่าแล้ว และอยู่ใกล้  $E(I_{max}, j, k)^{n+1/2}$  มากที่สุด ซึ่งก็คือ  $E(I_{max}-1, j, k)^{n-1/2}$  เราสามารถเขียน  $E(I_{max}-1, j, k)^{n-1/2}$  ให้อยู่ในรูปแบบสมการ (14ก) ได้

$$E(I_{max}-1, j, k)^{(n-1/2)-\beta} = \frac{f((n-1/2)\Delta t - r(I_{max}-1)/v - \beta\Delta t)}{r(I_{max})} \quad (14ค)$$

โดย  $\beta$  คือ จำนวนครั้งของขั้นเวลา (time step) ในอดีตของ  $E(I_{max}-1, j, k)^{n-1/2}$  ปกติจะมีค่าเป็นจำนวนเต็ม เช่น  $\beta = -1$  หมายถึง ณ ขั้นเวลาปัจจุบัน หรือ  $E(I_{max}-1, j, k)^{n+1/2}$

เราสามารถจัดสมการ (14ข) ให้อยู่ในรูปคล้าย (14ค) ได้เป็น

$$E(I_{max}, j, k)^{n+1/2} = \frac{f((n-1/2)\Delta t - r(I_{max}-1)/v + \tau\Delta t)}{r(I_{max})} \quad (14ง)$$

$$\text{โดย } \tau = 1 - \frac{(r(I_{max}) - r(I_{max}-1))}{v\Delta t} = 1 - \frac{(\Delta r(I_{max}-1))}{v\Delta t}$$

จากสมการ (14ค) และ (14ง) จะเห็นว่าตัวพารามิเตอร์ต่างๆ มีลักษณะเหมือนกัน ถ้ากำหนดให้  $-\beta$  สมมูลกับ  $\tau$  ดังนั้น เราสามารถเขียน  $f$  ในรูปใหม่ได้เป็น

$$f((n-1/2)\Delta t - r(I_{max}-1)/v - \beta\Delta t) \equiv f((n-1/2)\Delta t - r(I_{max}-1)/v + \tau\Delta t) \equiv f(u) \quad (14จ)$$

โดยที่  $u$  เป็นได้ทั้ง  $-\beta\Delta t$  หรือ  $\tau\Delta t$

ถ้าเราสามารถอธิบาย  $E(I_{\max} - 1, j, k)^{n-1/2}$  ได้ด้วยสมการ (14ค) เราก็สามารถประมาณค่าของ  $E(I_{\max}, j, k)^{n+1/2}$  ด้วยสมการ (14ง) ได้เช่นเดียวกัน โดยใช้ค่า  $E(I_{\max} - 1, j, k)^{n-1/2}$  ซึ่งทราบค่าแล้ว ค่า  $\beta$  สามารถเลือกให้มีลักษณะการประมาณแบบต่างๆ เช่น การประมาณในช่วง หรือ การประมาณนอกช่วง เป็นต้น และตัวฟังก์ชัน  $f$  มักจะเลือกให้มีอันดับความแม่นยำ (order of accuracy) ใกล้เคียงกับสมการผลต่างสลับเนื่องที่ใช้ ในที่นี้เราใช้การประมาณแบบผลต่างตรงกลาง ซึ่งมีอันดับความแม่นยำเท่ากับสอง จึงควรเลือก  $f$  ให้มีอันดับความแม่นยำใกล้เคียงสอง เช่น สมการพหุนามอันดับสอง เป็นต้น ดังนั้นเราจะเลือก  $f$  เป็นสมการพหุนามอันดับสอง ดังนี้

$$f(u) = A + Bu + Cu^2 \tag{14ฉ}$$

โดยที่  $A$   $B$  และ  $C$  เป็นค่าคงที่สัมประสิทธิ์ ซึ่งจะต้องหา

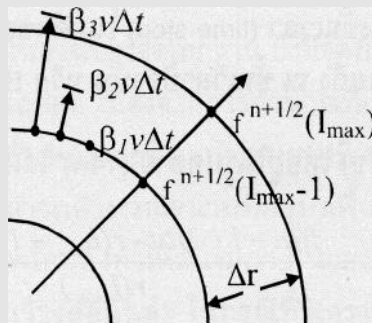
ในการประมาณในช่วงของสนาม  $E(I_{\max}, j, k)^{n+1/2}$  โดยสนาม  $E(I_{\max} - 1, j, k)^{n-1/2-\beta}$  ที่ทราบค่าแล้ว เราจะต้องแก้ชุดสมการเชิงเส้นซึ่งได้จากการเขียนสมการ (14ค) ใหม่ โดยอ้างอิงสมการ (14จ) และแทนค่า  $\beta$  ที่เลือกไว้ ดังนี้

$$f(-\beta_1 \Delta t) = A - B\beta_1 \Delta t + C(\beta_1 \Delta t)^2 = r(I_{\max} - 1)E(I_{\max} - 1, j, k)^{n-1/2-\beta_1} \tag{15ก}$$

$$f(-\beta_2 \Delta t) = A - B\beta_2 \Delta t + C(\beta_2 \Delta t)^2 = r(I_{\max} - 1)E(I_{\max} - 1, j, k)^{n-1/2-\beta_2} \tag{15ข}$$

และ

$$f(-\beta_3 \Delta t) = A - B\beta_3 \Delta t + C(\beta_3 \Delta t)^2 = r(I_{\max} - 1)E(I_{\max} - 1, j, k)^{n-1/2-\beta_3} \tag{15ค}$$



รูปที่ 4 ตำแหน่งของ  $f^{n+1/2}(I_{\max})$  และ  $f^{n+1/2}(I_{\max} - 1)$

ถ้า  $\beta_1$   $\beta_2$  และ  $\beta_3$  จะตั้งถูกเพียงเท่าไรแสดงในรูปที่ 4 กล่าวคือ ถ้า  $\beta_1 v \Delta t$  จะตั้งอยู่ที่พื้นผิว  $I_{\max} - 1$  (หรือถัดเข้ามา) ค่า  $\beta_3 v \Delta t$  จะต้องอยู่บนพื้นผิว  $I_{\max}$  (หรือถัดออกไป) และค่า  $\beta_2 v \Delta t$  จะต้องอยู่ระหว่างสองพื้นผิวข้างต้น ค่าที่แนะนำไว้ใน [5] คือ  $\beta_1$   $\beta_2$  และ  $\beta_3$  เท่ากับ  $-1$   $0$  และ  $1$  ตามลำดับ ในกรณีที่  $\Delta r / 2v \Delta t = 1$  ซึ่งเงื่อนไขนี้เป็นไปได้ในพิกัดมุมฉาก แต่สำหรับพิกัดทรงกลม ค่าอัตราส่วน  $\Delta r / 2v \Delta t$  มักจะมีค่าเกิน 1 เสมอ (เป็นสิบๆ เท่า) ทำให้ช่วงของการประมาณในช่วง กว้างมากๆ (ผลที่ได้ไม่ถูกต้องเท่าที่ควร) ดังนั้น เราอาจจำเป็นต้องใช้วิธีการที่มีเสถียรภาพน้อยกว่า (แต่ให้ผลที่ดีกว่าและนำไปใช้ง่ายกว่า) คือ การประมาณนอกช่วง โดยใช้  $\beta_1 = -1$   $\beta_2 = 0$  และ  $\beta_3 = 1$  และทำการประมาณนอกช่วงในทุกๆ ระยะเวลาแทน

เมื่อเราได้ค่า A B และ C แล้วจากสมการ (15ก)-(15ค) เราสามารถประมาณค่าสนาม  $E(I_{\max}, j, k)^{n+1/2}$  โดยใช้สมการ (14ฉ) และ (14ง) ดังนี้

$$E(I_{\max}, j, k)^{n+1/2} = \frac{f(\tau\Delta t)}{r(I_{\max})} \quad (16)$$

วิธีการที่ใช้ได้อีกวิธีหนึ่ง คือ การประมาณในช่วงแบบเชิงเส้น (ใช้พหุนามอันดับหนึ่ง) ซึ่งจะใช้วิธีการเทียบอัตราส่วนง่ายๆ คือ  $r(I_{\max} - 1)/r(I_{\max})$  แต่จะต้องใช้หน่วยความจำเพิ่มเติมเพื่อเก็บค่าสนาม E (องค์ประกอบ  $E_\theta$  และ  $E_\phi$ ) ในอดีต ซึ่งมีจำนวนประมาณ  $\Delta r/v\Delta t$  ตัว สำหรับแต่ละองค์ประกอบ ถ้าสมมติให้  $N = \Delta r/v\Delta t$  เราจะประมาณสนาม  $E(I_{\max}, j, k)^{n+1/2}$  ได้โดยใช้ค่าที่  $N-1$  ในอดีตของสนาม  $E(I_{\max} - 1, j, k)^{n+1/2}$  ที่เก็บไว้ ดังนี้

$$E(I_{\max}, j, k)^{n+1/2} = \frac{r(I_{\max} - 1)E_{(N-1)}(I_{\max} - 1, j, k)^{n+1/2}}{r(I_{\max})} \quad (17)$$

โดย ตัวห้อย (N-1) หมายถึง ใช้ค่าที่ N-1 ในอดีตของสนาม  $E(I_{\max} - 1, j, k)^{n+1/2}$  ที่เก็บไว้

## 5. เกณฑ์เสถียรภาพ

เนื่องจากเสถียรภาพในการคำนวณของวิธีผลต่างสืบเนื่องเชิงเวลาขึ้นอยู่กับ การเลือกขนาดของขั้นเวลา ( $\Delta t$ ) กล่าวคือ ถ้าเลือกใช้ค่า  $\Delta t$  น้อยเท่าใดระบบการคำนวณจะมีเสถียรภาพมากขึ้นเท่านั้น แต่ไม่ทำให้ผลจากการคำนวณถูกต้องมากขึ้นและเสียเวลาในการคำนวณมาก ในทางกลับกัน ถ้าใช้ค่า  $\Delta t$  มากเกินไปจะทำให้ระบบการคำนวณขาดเสถียรภาพได้ แต่ใช้เวลาในการคำนวณน้อย เราจึงมีความจำเป็นต้องหาสมการเกณฑ์เสถียรภาพเพื่อที่จะประมาณค่า  $\Delta t$  ที่พอเหมาะที่จะทำให้ระบบการคำนวณมีเสถียรภาพดีและใช้เวลาในการคำนวณไม่มากเกินไป สมการเกณฑ์เสถียรภาพมีรูปแบบแตกต่างกันไปในแต่ละระบบพิกัด เช่น สมการเกณฑ์เสถียรภาพในพิกัดมุมฉากสามมิติ แสดงใน [2] เป็นต้น ในบทความฉบับนี้จะเสนอการหาสมการเกณฑ์เสถียรภาพในพิกัดทรงกลม ซึ่งจะใช้สมการที่ได้หาไว้สำหรับระบบพิกัดนอนออร์โทโกนัลใดๆ [8] ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

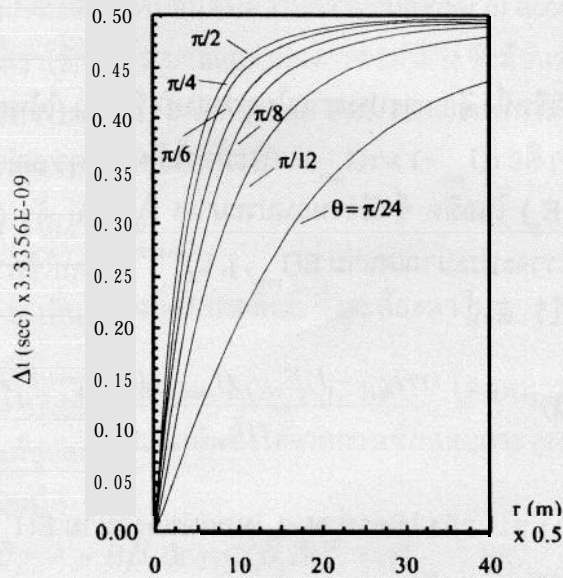
$$\Delta t \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{g^{i,j}}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Delta u^i \Delta u^j}} \quad (18ก)$$

โดย  $g^{i,j}$  คือ เมตริกซ์เทนเซอร์ผกผันของเมตริกซ์เทนเซอร์  $g_{i,j}$  และ  $\Delta u$  คือ การเพิ่มขึ้นในทิศทางของพารามิเตอร์ของระบบพิกัด

สำหรับระบบพิกัดที่มีพารามิเตอร์ตั้งฉากกันทั้งหมด (orthogonal coordinates) รวมถึงพิกัดทรงกลม จะมีคุณสมบัติ คือ  $g^{i,j} = 0$  เมื่อ  $i \neq j$  และ  $g^{i,i} = g^{i,i} = 1/g_{i,i} = 1/(h_i)^2$  เมื่อ  $i = j$  โดยการแทนค่า  $\Delta u^1 = \Delta r$   $\Delta u^2 = \Delta \theta$   $\Delta u^3 = \Delta \phi$   $h_1 = 1$   $h_2 = r$  และ  $h_3 = r \sin \theta$  ในสมการ (18ก) จะได้



$$\Delta t \leq \frac{l}{c \sqrt{\frac{l}{(\Delta r)^2} + \frac{l}{(r\Delta\theta)^2} + \frac{l}{(r\sin\theta\Delta\phi)^2}}} \quad (18ข)$$



รูปที่ 5 การแปรค่าของ  $\Delta t$  เนื่องจาก  $r$  และ  $\theta$

จากสมการที่ได้จะเห็นว่าค่า  $\Delta t$  นอกจากจะเป็นฟังก์ชันของ  $\Delta r$   $\Delta\theta$  และ  $\Delta\phi$  แล้ว ยังมีค่าขึ้นกับ  $r$  และ  $\theta$  อีกด้วย ดังแสดงในรูปที่ 5 ดังนั้น ค่าพารามิเตอร์ทั้งหมดในสมการ (18ข) จะต้องหาค่าปริมาตรย่อยที่มีขนาดเล็กที่สุดในบริเวณที่วิเคราะห์สนาม แต่ถึงอย่างไรก็ตามค่า  $\Delta t$  ที่คำนวณได้จากขีดจำกัดบนในสมการ (18ข) มักจะทำให้ระบบการคำนวณมีเสถียรภาพอยู่เพียงชั่วขณะเท่านั้น ดังนั้น ในทางปฏิบัติมักจะมีการลดค่านี้อลงโดยการหาร  $\Delta t$  ด้วยค่าคงที่ เช่น 5 หรือ 10 หรือจะใช้ค่าครึ่งหนึ่งของการเพิ่มขึ้น ( $\Delta r/2$   $\Delta\theta/2$  และ  $\Delta\phi/2$ ) ใน (18ข) ซึ่งทำให้ได้เสถียรภาพดี

## 6. ผลการวิเคราะห์เชิงเลข

ในบทความนี้จะเสนอการวิเคราะห์ที่อยู่สองปัญหา ปัญหาแรกจะมีลักษณะปัญหาคล้ายกับ [7] ซึ่งเป็นการวิเคราะห์เมื่อแหล่งกำเนิดเป็นพัลส์แบบเกาส์ แต่จะใช้เงื่อนไขที่พื้นผิวนอกสุดเป็นแบบการประมาณนอกช่วงอันดับสอง และการประมาณในช่วงเชิงเส้นแทน ซึ่งได้กล่าวไปแล้วในตอนต้น หลังจากนั้นจะเสนอปัญหาใหม่ซึ่งมีแหล่งกำเนิดเป็นคลื่นต่อเนื่อง

ในปัญหาแรก สมการของแหล่งกำเนิดพัลส์แบบเกาส์ เขียนได้เป็น

$$\bar{f}(r;t) = \hat{a}_1 I_0 \exp\left[-\frac{(t-r/v-t_0)^2}{\sigma^2}\right] \quad (19ก)$$

โดย  $\hat{a}_1$   $I_0$   $t_0$  และ  $\sigma$  คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (ทิศทางใดๆ) ขนาดสนาม การประวิงเวลา และความกว้างของพัลส์ ตามลำดับ

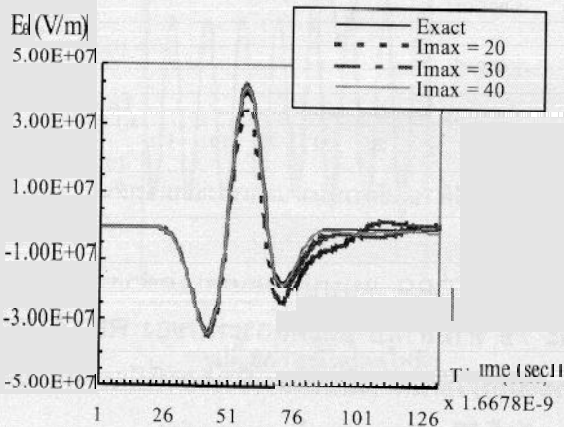
สมมติให้แหล่งกำเนิดเป็นไดโพลไฟฟ้าวางตามแนวแกน  $z$  และมีค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ดังนี้  
 $R_{\max} = 10\text{m}$   $\Delta r = 0.5\text{m}$  ( $I_{\max} = 20$ )  $\Delta\theta = \pi/12$  ( $15^\circ$  และ  $J_{\max} = 12$ )  $\Delta\phi = \pi/9$  ( $20^\circ$  และ  $K_{\max} = 18$ )  
 และ  $\sigma = 2 \times 10^{-8}$  สมการสนามที่ไดโพลไฟฟ้านี้สร้างขึ้น คือ

$$E_r = \frac{\cos\theta}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{f'(t-r/v)}{r^2 v} + \frac{f(t-r/v)}{r^2} \right] \quad (19\text{ข})$$

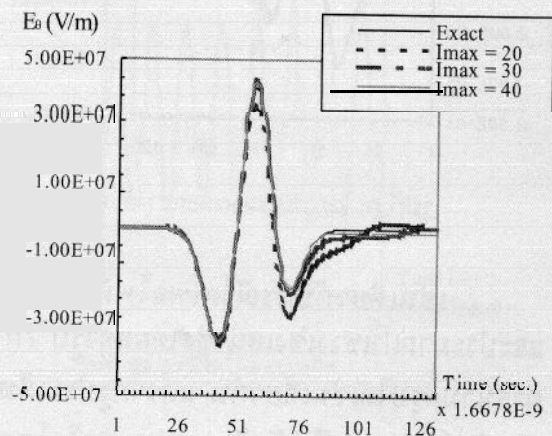
$$E_\theta = \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{f''(t-r/v)}{rv^2} + \frac{f'(t-r/v)}{r^2 v} + \frac{f(t-r/v)}{r^3} \right] \quad (19\text{ค})$$

โดย  $f'$  และ  $f''$  คือ ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และสอง ของ  $f$  เทียบกับเวลา ตามลำดับ

โดยใช้สมการ (19ค) เพื่อป้อนสนามเป็นเงื่อนไขขอบเขตสำหรับ  $E_\theta$  ตลอดการคำนวณ ที่  $j = 4$  ( $r = 2\text{m}$ ) จากสมการ (18ข) ได้  $\Delta t \cong 1.85 \times 10^{-11}$  และใช้  $t_0 = 6 \times 10^{-8}$  จะได้ผลดังรูปที่ 6ก และ 6ข ซึ่งเป็นค่าสนามที่ระยะ  $r = 10\text{m}$  และมุม  $\theta = 97.5^\circ$



รูปที่ 6ก ใช้การประมาณนอกช่วงอันดับสอง



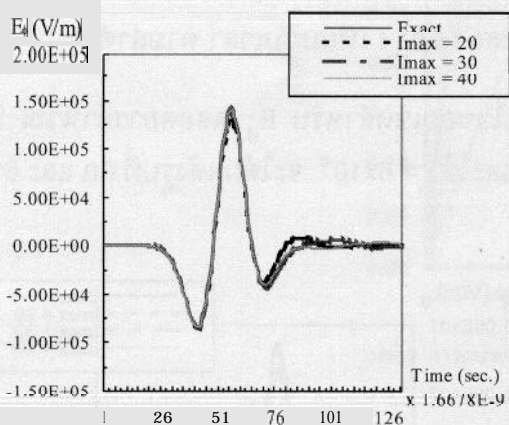
รูปที่ 6ข ใช้การประมาณในช่วงแบบเชิงเส้น

ในรูปที่ 6ก และ 6ข นั้นเป็นกรณีที่เงื่อนไขพื้นผิวสิ้นสุดใช้การประมาณนอกช่วงอันดับสอง และการประมาณในช่วงเชิงเส้น ตามลำดับ ซึ่งแสดงไว้ด้วยเส้นประและมีอักษรกำกับว่า  $I_{\max} = 20$  จากรูป จะเห็นว่า เงื่อนไขพื้นผิวนอกสุดทั้งสองแบบให้ผลที่ใกล้เคียงกันมาก และใกล้เคียงกับที่ได้เสนอไว้ใน [7] ซึ่งเป็นกรณีที่ใช้การประมาณในช่วงอันดับสอง นอกจากนี้เราได้แสดงให้เห็นถึงผลของ RBC ที่มีต่อค่าสนาม โดยการเพิ่มขึ้นของปริมาตรย่อย 10 ( $I_{\max} = 30$ ) และ 20 ( $I_{\max} = 40$ ) ชั้น ระหว่างพื้นผิว  $i = 20$  (พื้นผิวที่เราเก็บข้อมูล) และพื้นผิว RBC (พื้นผิวที่เราคำนวณการประมาณนอกช่วงอันดับสอง และการประมาณในช่วงเชิงเส้น) ดังที่เห็นในรูป 6ก และ 6ข สรุปได้ว่า เมื่อเราแยกพื้นผิว RBC ออกจากจุดสังเกต (เก็บข้อมูล) มากเท่าใด ยิ่งทำให้ผลที่ได้มีค่าใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำมากยิ่งขึ้นเท่านั้น แต่สิ่งที่ควรทราบ คือ การเพิ่มขึ้นของปริมาตรย่อยเกินกว่าสองเท่าของดัชนี  $i$  สูงสุดในตอนแรก ( $2I_{\max}$  หรือ 40) จะไม่ให้ค่าที่ถูกต้องมากขึ้นเท่าใดนัก

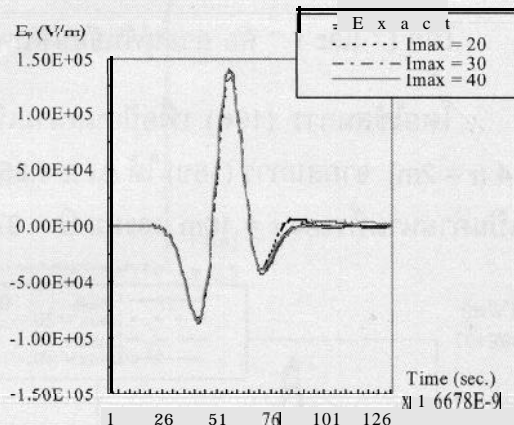
ในกรณีไดโพลแม่เหล็ก สมการสนามที่ไดโพลแม่เหล็กสร้างขึ้น คือ

$$E_{\phi} = -\frac{\sin\theta}{4\pi r} \left[ \frac{f''(t-r/v)}{v} + \frac{f'(t-r/v)}{r} \right] \tag{19ง}$$

โดยที่  $f'$  และ  $f''$  คือ ค่าฟังก์ชันเชิงซ้อนของอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และอันดับสองของ  $f$  เทียบกับเวลา ตามลำดับ โดยใช้สมการ (19ง) เพื่อป้อนสนามเป็นเงื่อนไขขอบเขตสำหรับ  $E_{\phi}$  ตลอดจนการคำนวณ และใช้พารามิเตอร์ต่างๆ เหมือนในกรณีไดโพลไฟฟ้าทั้งหมด จะได้ผลการคำนวณดังรูป 7ก และ 7ข



รูปที่ 7ก ใช้การประมาณนอกช่วงอันดับสอง



รูปที่ 7ข ใช้การประมาณในช่วงแบบเชิงเส้น

เช่นเดียวกับกรณีไดโพลไฟฟ้า เราได้ทดลองใช้ RBC แบบประมาณนอกช่วงอันดับสอง และประมาณในช่วงเชิงเส้น ซึ่งได้ผลดังรูป 7ก และ 7ข ตามลำดับ และผลกระทบของ RBC ที่มีต่อค่าสนามสรุปได้เช่นเดียวกัน แต่จากรูปจะเห็นว่าระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมเชิงเวลาที่มีแหล่งกำเนิดเป็นพัลส์นี้ประยุกต์ใช้กับปัญหาประเภทไดโพลแม่เหล็กได้ดีกว่า (ผลถูกต้องมากกว่า)

ในปัญหาที่สอง เราจะป้อนแหล่งจ่ายที่มีลักษณะเป็นคลื่นต่อเนื่องโดยใช้สมการสำหรับไดโพลไฟฟ้าจิว (infinitesimal electric dipole) ถ้ากำหนดให้กระแสกระตุ้นเป็น

$$\bar{I} = \hat{a}_z I_0 \cos(\omega t) \tag{20ก}$$

ทำให้ได้สมการสนามในแนว  $\theta$  หรือ  $E_{\theta}$  ได้เป็น [9]

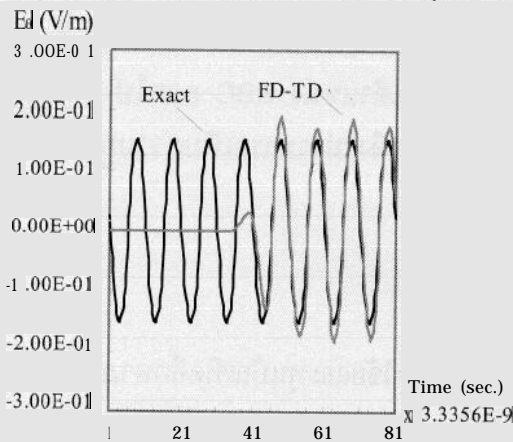
$$E_{\theta} = \frac{I_0 d \eta \sin\theta}{4\pi r} \left[ \frac{\cos\omega(t-r/v)}{r} + \frac{k \sin\omega(t-r/v)}{r^2} - \frac{\sin\omega(t-r/v)}{k} \right] \tag{20ข}$$



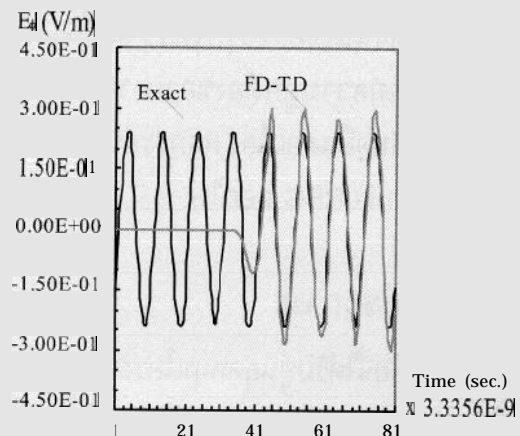
โดย  $d$   $\eta$  และ  $k$  คือ ความยาวของไดโพล อิมพีแดนซ์คลื่น และค่าคงตัวเฟส ตามลำดับ สมมติเราเลือกใช้ความถี่ 30 MHz และ  $I_0 = 40\pi$  r/d $\eta$  กำหนดให้พารามิเตอร์ต่างๆ มีค่าดังนี้  $R_{\max} = 40\text{m}$   $\Delta r = 1\text{m}$  ( $I_{\max} = 40$ )  $\Delta\theta = \pi/12$  ( $15^\circ$  และ  $J_{\max} = 12$ ) และ  $\Delta\phi = \pi/9$  ( $20^\circ$  และ  $K_{\max} = 18$ ) ใช้สมการ (20ข) เพื่อป้อนสนามเป็นเงื่อนไขขอบเขตสำหรับ  $E_\theta$  ที่  $r = 2\text{m}$  ( $i = 2$ ) และเก็บค่าสนามที่  $r = 40\text{m}$  ที่มุม  $\theta = 97.5^\circ$  จะได้ผลดังรูป 8ก ในกรณีไดโพลแม่เหล็กจิ๋ว (infinitesimal magnetic dipole) จะให้สมการสนามไฟฟ้าสมมูล  $E_\phi$  [9] คือ

$$E_\phi = -\frac{I_0 d \eta \sin\theta}{4\pi r} \left[ \frac{\cos\omega(t-r/v)}{r} - k \sin\omega(t-r/v) \right] \quad (20ค)$$

โดยใช้วิธีการและค่าพารามิเตอร์เหมือนกับกรณีไดโพลไฟฟ้าจิว และใช้สมการ (20ค) เพื่อป้อนสนามเป็นเงื่อนไขขอบเขตสำหรับ  $E_\phi$  จะได้ผลดังรูปที่ 8ข



รูปที่ 8ก กรณีไดโพลไฟฟ้า



รูปที่ 8ข กรณีไดโพลแม่เหล็ก

จากรูปที่ 8ก และ 8ข จะเห็นว่าทั้งไดโพลไฟฟ้าจิว และไดโพลแม่เหล็กจิ๋ว มีลักษณะที่คล้ายกันเมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงของมัน นอกจากนั้นเราได้ทดลองเพิ่มชั้นของปริมาตรย่อย และเปลี่ยนรูปแบบของ RBC เหมือนในปัญหาแรก ปรากฏว่าผลที่ได้ไม่แตกต่างจากที่แสดงในรูป 8ก และ 8ข เลย

## 7. บทสรุป

ในบทความฉบับนี้ได้แสดงรายละเอียดในการสร้างสมการผลต่างสี่เหลี่ยมเชิงเวลาจากสมการของแมกซ์เวลล์ในพิกัดทรงกลม ซึ่งมีจุดเอกฐานอยู่สามจุดใหญ่ๆ พบว่าจุดเอกฐานสองจุดแรกพอที่จะแก้ไขได้ โดยใช้เงื่อนไขเชื่อมต่อ และสมการอินทิกรัลของเคิร์ลของสนามแม่เหล็ก ตามลำดับ แต่ในจุดเอกฐานที่สามยังไม่พบวิธีการแก้ไขที่ดีเท่าใดนัก มีเพียงแนวทางที่พอจะใช้ได้สองแนวทาง คือ การกำหนดระเบียบวิธีในการคำนวณของปริมาตรย่อยที่อยู่ใกล้จุดศูนย์กลางใหม่ โดยให้เป็นแบบผลต่างย้อนหลังหรือผลต่างไปข้างหน้า และการกำหนดให้จุดศูนย์กลางเป็นตัวแทนสมบูรณที่มีขนาดเล็กมากซึ่งมีรัศมีจำกัดค่าหนึ่ง หลังจากนั้นผู้วิจัยได้เสนอแนวทางใหม่ในการคิดเงื่อนไข

ที่พื้นผิวนอกสุดสองแบบที่ให้ความถูกต้องในการประมาณใกล้เคียงกัน (สำหรับปัญหานี้) คือ การประมาณนอกช่วงอันดับสอง และการประมาณในช่วงเชิงเส้น ซึ่งง่ายต่อการนำไปใช้งาน ก่อนจะถึงส่วนที่เป็นผลจากการวิเคราะห์สนาม ผู้วิจัยก็ได้เสนอสมการเกณฑ์เสถียรภาพสำหรับพิกัดทรงกลม ที่หาจากสมการเกณฑ์เสถียรภาพสำหรับพิกัดนอนออร์โธโกนัลใดๆ และได้แนะนำค่าพารามิเตอร์ ในการหาค่า  $\Delta t$  จากสมการ (18d) ( $\Delta r/2$   $\Delta \theta/2$  และ  $\Delta \phi/2$ ) ซึ่งทำให้ได้เสถียรภาพในการคำนวณที่ดี ในส่วนสุดท้ายได้แสดงผลจากการวิเคราะห์ปัญหาสองปัญหาด้วยกัน คือ สนามที่ป้อนเป็นพัลส์ และคลื่นต่อเนื่อง ในปัญหาแรกพบว่าในกรณีที่ป้อนไดโพลแม่เหล็กจะให้ผลที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำ ตรงมากกว่ากรณีของไดโพลไฟฟ้า สำหรับทั้งสองกรณีสามารถทำให้ผลถูกต้องมากขึ้นได้โดยการเลื่อนตำแหน่งของ RBC ออกไป แต่อย่างไรก็ตาม ถ้าเลื่อน RBC ออกไปเกินกว่า ( $I_{\max} = 40$ ) สองเท่า ของค่าของดัชนี  $i$  ณ ตำแหน่งเก็บข้อมูล ( $i = 20$ ) จะไม่ให้ผลที่ถูกต้องมากขึ้นเท่าใดนัก ในปัญหาที่สองพบว่าทั้งกรณีที่ป้อนไดโพลแม่เหล็กและไดโพลไฟฟ้าจะมีพฤติกรรมใกล้เคียงกันมาก เมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงของมัน และผลที่ได้จะมีค่าไม่แตกต่างกันไม่ว่าจะเลื่อนตำแหน่ง RBC ออกไปไกลเท่าใดก็ตาม ดังนั้นจึงอาจสรุปได้ว่า ผลกระทบของ RBC ต่อปัญหาที่มีแหล่งจ่ายเป็นพัลส์จะมีมาก และสามารถเพิ่มความถูกต้องของการคำนวณได้โดยการเลื่อนตำแหน่ง RBC ออกไป แต่ในปัญหาที่มีแหล่งจ่ายเป็นคลื่นต่อเนื่อง ผลกระทบจาก RBC จะมีน้อยมาก จึงไม่สามารถเพิ่มความถูกต้องได้โดยการเลื่อนตำแหน่ง RBC ออกไป

## กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนโครงการทุนส่งเสริมวิชาชีพนักวิจัยและทุนบัณฑิตศึกษาภายในประเทศ จากสำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ

## เอกสารอ้างอิง

1. Yee, K. S., , May 1966, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Trans. Ant. & Prop.*, vol. AP-14, pp. 302-307.
2. Taflove, A. and Brodwin, M. E., Aug. 1975, "Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-23, pp.623-630.
3. Umashankar, K. and Taflove, A., Nov. 1982, "A novel method to analyze electromagnetic scattering of complex objects," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. EMC-24, pp. 397-405.
4. Joseph, R. M. and Taflove, A., Mar. 1997, "FD-TD Maxwell's equations models for nonlinear electrodynamics and optics," *IEEE Trans. Ant. & Prop.*, vol. AP-45,

pp. 364-374.

5. Holland, R., Dec. 1977, "THREDE: A free-field EMP coupling and scattering code," IEEE Trans. *Nucll Sci.*, vol. NS-24, pp. 2416-2421.
6. Holland, R., Simpson, L. and Kunz, K. S., Aug. 1980, "Finite-difference analysis of EMP coupling to lossy dielectric structures," IEEE Trans. *Electromagnl Compat.*, vol. EMC-22, pp. 203-209.
7. Holland, R., Dec. 1983, "THREDS: A finite-difference time-domain EMP code in 3D spherical coordinates," IEEE Trans. *Nucll Sci.*, vol. NS-30, pp. 4592-4595.
8. Taflove, A., 1995, Computational electrodynamics the finite-difference *time-domainl* method, Artech House, pp. 353-361 and 145-199.
9. Balanis, C. A., 1982, Antenna theory analysis and **design**, John Wiley & Sons,