การเปรียบเทียบแบบจำลองคำนวณการไหล แบบเปลี่ยนแปลงหนึ่งมิติ

สนิท วงษา [1]
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการเปรียบเทียบแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาการไหลในทางน้ำเปิดแบบไม่คงที่ที่มีผิวอิสระชนิดหนึ่งมิติ โดยใช้กระบวนการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์บนพื้นฐาน Flux vector splitting ร่วมกับค่าประมาณ Jacobian เพื่อแก้สมการตามแบบ Beam & Warming ซึ่งมีพื้นฐานบนการคำนวณแบบ Implicit และกระบวนการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์บนพื้นฐาน Flux difference splitting เพื่อแก้สมการตามแบบ Roe กับ Lax-Wendroff scheme ซึ่งมีพื้นฐานบนการคำนวณแบบ Explicit ซึ่งแบบจำลองสามารถนำไปใช้คำนวณการไหลที่เปลี่ยนแปลงจากการไหลแบบใต้วิกฤติเป็นการไหลแบบเหนือวิกฤติได้เป็นอย่างดี ได้แสดงผลการคำนวณและเปรียบเทียบลักษณะสมบัติของสมการกับผลการทดลองและผลการวิเคราะห์รวมทั้งเวลาที่ใช้และความแม่นยำของการคำนวณเพื่อแสดงความสามารถในการนำเอาแบบจำลองที่พัฒนาขึ้นไปประยุกต์ใช้ศึกษาด้านชลศาสตร์การไหลแบบเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว พบว่าสมการตามแบบ Roe scheme มีความเหมาะที่สุดในการนำเอาไปประยุกต์ใช้

---

[1] *อาจารย์ ภาควิชาครุศาสตร์โยธา*

Comparison of Numerical Computation Schemes for One-dimensional Transition Flow

Sanit Wongsa [1]

King Mongkut's University of Technology Thonburi

Abstract

In this paper, three different schemes, namely, Beam & Warming, Roe, and Lax-Wendroff schemes, are compared in numerical computation of one-dimensional open-channel unsteady free surface flows. Beam & Warming finite difference scheme is based on implicit scheme incorporated with flux vector splitting techniques, Roe and Lax-Wendroff finite difference schemes are based on explicit scheme with flux difference splitting techniques, and using approximate Jacobian in the model formulation. Flows with simultaneous presence of supercritical and subcritical regions can be analyzed by the proposed models. Numerical examples are given and results obtained the computational schemes are compared with existing experiment data and analytical solutions, computer times and accuracy are presented to demonstrate applicability of the models for hydraulic studies involving rapidly vary flow. From this study, it may be concluded that Roe scheme based on flux splitting is preferable for practical applications.

[1] *Lecturer, Department of Civil Technology Education*

บทนำ

การศึกษาด้านชลศาสตร์ของการไหลในทางน้ำเปิดบนพื้นฐานของการไหลแบบเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วมีความสำคัญต่อกิจกรรมของมนุษย์และสิ่งแวดล้อมเป็นอย่างมาก ในกรณีที่เขื่อนด้านเหนือน้ำพังทลายลงมาจะมีผลทำให้เกิดน้ำท่วมอย่างฉับพลัน คลื่นน้ำที่เคลื่อนตัวไปยังพื้นที่ราบด้านท้ายน้ำและข้ามสันคันกั้นน้ำก่อให้เกิดความเสียหายและผลกระทบอย่างใหญ่หลวงต่อชีวิตและทรัพย์สินในบริเวณด้านท้ายน้ำ การเปิด/ปิดบานประตูระบายน้ำอย่างกระทันหันอาจก่อให้เกิดความเสียหายต่ออาคารทางชลศาสตร์ การเกิดปรากฏการณ์น้ำกระโดดในลำน้ำธรรมชาติซึ่งทำให้อากาศสามารถแทรกตัวเข้าไปในหน้าตัดนั้นได้เป็นผลให้คุณภาพของน้ำดี การวิเคราะห์และทำนายความลึก และเวลาในการเคลื่อนที่ของคลื่นน้ำได้อย่างแม่นยำก็จะสามารถแก้ปัญหาและบรรเทาความเสียหายอันจะเกิดขึ้นได้ในระดับหนึ่ง แต่การไหลเหล่านี้กระแสน้ำมีความลึกและความเร็วสูงมากอีกทั้งเกิดหน้าตัดไม่ต่อเนื่อง (discontinuity) ขึ้น ซึ่งการที่จะจำลองสถานการณ์ที่ถูกต้องได้นั้นแบบจำลองที่นำมาใช้ต้องมีลักษณะสมบัติที่สามารถอธิบายปรากฏการณ์ Shock wave ได้เป็นอย่างดี

การศึกษาการไหลแบบเปลี่ยนแปลงในทางน้ำเปิด เช่น ปัญหาน้ำกระโดด ปัญหาการเคลื่อนตัวของคลื่นน้ำที่เกิดจากการเปิด/ปิดประตูน้ำแบบฉับพลัน และปัญหาเขื่อนแตกแบบฉับพลัน เป็นต้น ได้เป็นหัวข้อวิจัยที่สำคัญและกระทำกันอย่างกว้างในหลายทศวรรษที่ผ่านมา ซึ่งสามารถอธิบายปรากฏการณ์และแสดงคำตอบในรูปสมการเชิงวิเคราะห์ โดยการแก้สมการอนุพันธ์ควบคุมการไหล แต่ถึงอย่างไรก็ตามการแก้สมการอนุพันธ์จะสามารถทำได้ในกรณีที่ลดรูปให้เป็นสมการอย่างง่ายเท่านั้น ซึ่งไม่เหมาะสมในการนำมาประยุกต์ใช้กับสภาพความเป็นจริง การศึกษาของ Stoker [1] แสดงสมการเชิงวิเคราะห์สำหรับปัญหาคลื่นน้ำและเขื่อนแตกที่เหมาะสมในการนำเอามาประยุกต์ แต่ก็มีข้อจำกัดเรื่องปัญหาของเวลาและประสิทธิภาพการคำนวณ รวมทั้งการนำเอาลักษณะทางกายภาพของภูมิประเทศเข้าร่วมคำนวณ เมื่อเปรียบเทียบกับการคำนวณเชิงตัวเลขแล้วจะมีความเหมาะสมน้อยกว่า

ในการศึกษาเพื่อแก้สมการของ St. Venant [2] โดยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขที่ผ่านมา เช่น Mahmood และYevjevich [3] ใช้สมการแบบ Preissmann scheme, Abbott [4] ใช้สมการแบบ Abbott-Ionescu scheme, Fennema และ Chaudhry [5] ใช้สมการแบบ Beam & Warming และ Gabutti scheme บนพื้นฐาน Flux vector splitting (FVS) ซึ่ง Beam & Warming scheme สามารถคำนวณอัตราส่วนความลึกของด้านท้ายน้ำกับอ่างเก็บน้ำ h_t/h_r=0.001, Glaister [6] ได้ประยุกต์เทคนิคค่าเฉลี่ยของ Roe กับสมการการไหลน้ำตื้น, Roe [7] ประยุกต์เทคนิค Flux vector splitting และ Flux difference splitting (FDS) คำนวณการไหลของปัญหาเขื่อนแตกในทางน้ำเปิดที่มีความกว้างหนึ่งหน่วย, Alcrudo และคณะ [8] ประยุกต์เทคนิค Flux difference splitting คำนวณการไหลในทางน้ำเปิดโดยแก้สมการแบบ Upwind และ Lax-Wendrof scheme, Navarro และคณะ [9] คำนวณการไหลในทางน้ำเปิดโดยแก้สมการแบบ Total variation diminishing (TVD) MacCormack scheme, Jha และคณะ [10, 11, 12] ใช้ Beam & Warming scheme บนพื้นฐานเทคนิค Flux vector splitting และ TVD MacCormack, Lax-Friedrichs และ Lax-Wendrof scheme บนพื้นฐานเทคนิค Flux difference splitting สามารถคำนวณอัตราส่วน h_t/h_r = 1.0×10^{-4}

สำหรับเรื่องการศึกษาน้ำกระโดด Gharangik และ Chaudhry [13] ได้นำเอาสมการแบบ MacCormack และ Two-Four scheme เพื่อแก้สมการของ Boussinesq และเปรียบเทียบผลการคำนวณกับการทดลองซึ่งพบว่าสมการแบบ MacCormack scheme ไม่มีความเหมาะสมและพจน์ของ Boussinesq มีผลต่อการตัดสินตำแหน่งของการเกิดน้ำกระโดดเพียงเล็กน้อย และต่อมา Rahman และ Chaudhry [14] ได้นำประยุกต์เทคนิคการปรับเปลี่ยนกริด (grid adaptation) มาคำนวณในปัญหาเดียวกันพบว่า เกิดการสั่นเล็กน้อยบริเวณหน้าตัดไม่ต่อเนื่อง, Meselhe และคณะ [15] ศึกษาการไหลแบบเปลี่ยนแปลงโดยพัฒนาสมการแบบ MESH scheme พบว่าผลการคำนวณบริเวณหน้าตัดที่มีความชันมาก (steep slope) เส้นผิวน้ำที่ได้มีลักษณะเกิดการกระจาย (dispersion)

บทความนี้เสนอการศึกษาเกี่ยวกับการคำนวณการไหลในทางน้ำเปิดชนิดหนึ่งมิติ ซึ่งทำได้โดยการแก้สมการของ St. Venant และใช้กระบวนการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบ Beam & Warming scheme บนพื้นฐานเทคนิค Flux vector splitting และ Roe กับ Lax-Wendroff scheme บนพื้นฐานเทคนิค Flux difference splitting ร่วมกับค่าประมาณ Jacobian โดยมีพื้นฐานบนการคำนวณแบบ Implicit กับ Explicit ตามลำดับ ซึ่งรายละเอียดของบทความประกอบด้วยในอันดับแรกแสดงสมการควบคุมการไหล ต่อไปแสดงรายละเอียดของกระบวนการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ สภาพเริ่มต้นและขอบเขตรอบนอกของสมการแบบต่างๆ พร้อมทั้งได้แสดงผลการคำนวณและเปรียบเทียบกับผลการการทดลองกับปัญหาน้ำกระโดด และคำตอบเชิงวิเคราะห์ของปัญหาการคลื่นน้ำที่เกิดจากการปิดประตูน้ำแบบกระทันหันกับปัญหาเขื่อนแตกเพื่อเปรียบเทียบความสามารถและความเหมาะสมของแบบจำลองแบบต่างๆ

สมการพื้นฐาน

สมการของ St. Venant [2] ในรูปเวคเตอร์แบบอนุรักษ์ (conservative) เขียนได้เป็น

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}+G=0 \tag{1}$$

$$U=\begin{bmatrix}A\\Q\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}Q\\Q^2/A+gF_h\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}0\\-gI_1-gA\left(S_0-S_f\right)\end{bmatrix} \tag{2}$$

โดยที่ A เป็น พื้นที่หน้าตัดเปียกน้ำ

Q เป็น อัตราการไหล

F_h เป็น แรงเนื่องจากแรงดันสถิตย์ของน้ำ

I_1 เป็น พจน์การเปลี่ยนแปลงความกว้างของหน้าตัด

S_0 เป็น ความลาดของท้องน้ำ

S_f เป็น ความลาดของแรงเสียดทาน

g เป็น ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

t เป็น เวลา

x เป็น ระยะทางในแนวแกน x

แรงดันสถิตย์ของน้ำ F_h และพจน์การเปลี่ยนแปลงความกว้างของหน้าตัด I_l เขียนได้ตามสมการที่ (3) และ(4) ตามลำดับ ดังนี้

$$F_h = \int_0^{h(x,t)} (h-\eta) w(x,\eta) d\eta \tag{3}$$

$$I_l = \int_0^{h(x,t)} (h-\eta) \frac{\partial w(x,\eta)}{\partial x} d\eta \tag{4}$$

โดยที่ h เป็น ความลึกของน้ำ

$w(x,\eta)$ เป็น ความกว้างที่ความลึก $\eta \left(w(x,\eta) = \frac{\partial A(x,\eta)}{\partial \eta} \right)$

โดยการแปลงสมการที่ (1) ให้อยู่รูปของสมการแบบไม่อนุรักษ์ (non-conservative) และอาศัยการประยุกต์หลักการ Jacobian จะได้ว่า

$$A = \frac{\partial E}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gA/w - Q^2/A^2 & 2Q/A \end{bmatrix} \tag{5}$$

เนื่องจากสมการพื้นฐานของการไหลในทางน้ำเปิดเป็นระบบสมการแบบไฮเปอร์โบลิค จึงสามารถหาค่าไอเกนและไอเกนเวคเตอร์ของ A ได้ดังนี้

$$\lambda^{1,2} = u \pm c \tag{6}$$

$$e^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \pm c \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$u = Q/A \tag{8}$$

$$c = \sqrt{gA/w} \tag{9}$$

โดยการแทนค่าพจน์ต่างๆ ในสมการที่ (5) ถึง (9) ลงในสมการที่ (1) จะได้ว่า

$$\frac{\partial U}{at} + A\frac{\partial U}{ax} + G = O \tag{10}$$

ค่าเฉลี่ยของ Roe

Roe [7] ได้เสนอเทคนิคคำนวณค่าเฉลี่ยโดยการประมาณค่า Jacobian เพื่อแก้สมการของ Euler โดยรักษาลักษณะสมบัติอนุรักษ์ของสมการไว้ได้ และ Glaister [6] ได้นำมาประยุกต์ในสมการของการไหลในทางน้ำเปิด โดยที่ค่าประมาณ Jacobian ของเวลาใดๆ ต้องมีลักษณะสมบัติ 4 ประการดังนี้

(i) $\Delta E_{i+1/2} = \widetilde{A}_{i+1/2}\,\Delta U_{i+1/2}$ เพื่อประกันลักษณะสมบัติอนุรักษ์ของสมการ

(ii) $A_{i+1/2} = \widetilde{A}_{i+1/2}\left(U_i, U_{i+1/2}\right)$ แสดงค่าเฉลี่ย

(iii) $A(U,U) = A(U) = \partial E / \partial U$ เพื่อแสดงการคงอยู่ของสมการดั้งเดิม

(iv) มีเซ็ตไอเกนเวคเตอร์ของค่าไอเกนที่เป็นจำนวนจริง

จากลักษณะสมบัติข้างต้นทำให้สามารถคำนวณค่าเฉลี่ยของค่าไอเกนและไอเกนเวคเตอร์ได้จาก

$$\widetilde{\lambda}^{1,2} = \widetilde{u} \pm \widetilde{c} \qquad \textbf{(11)}$$

$$\widetilde{e}^{1,2} = \left(\frac{1}{\widetilde{u} \pm \widetilde{c}}\right) \qquad \textbf{(12)}$$

Beam & Warming scheme บนพื้นฐานเทคนิค Flux vector splitting

Beam และ Warming [16] ได้พัฒนากระบวนการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบ Implicit เพื่อแก้สมการระบบไฮเปอร์โบลิคสำหรับแก้ปัญหาการไหลของของไหลแบบอนุรักษ์เป็นที่นิยมใช้อย่างกว้างขวางในสาขาอากาศพลศาสตร์ Fennema และ Chaudhry [5] ได้เริ่มนำมาใช้ในการคำนวณการไหลแบบไม่คงที่ในทางน้ำเปิด พบว่าสามารถใช้คำนวณปัญหาเขื่อนแตกเมื่ออัตราส่วนของระดับเก็บกักน้ำในอ่างเก็บน้ำกับด้านท้ายน้ำเท่ากับ 0.001 อย่างไรก็ตามจากผลการคำนวณพบว่าความสูงของคลื่นน้ำด้านหน้าสูงและช้ากว่าผลการวิเคราะห์

สมการของกระบวนการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบ Beam & Warming scheme ของเวลา $t+1$ สามารถเขียนได้เป็น

$$U^{t+1} = U^t + \Delta t\left[\frac{\theta}{1+\xi}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^{t+1}\right] + \frac{1-\theta}{1+\xi}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^{t} + \frac{\xi}{1+\xi}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^{t-1} \qquad \textbf{(13)}$$

โดยที่ θ, ξ เป็น ค่าพารามิเตอร์น้ำหนัก (weighting parameters) เพื่อเปลี่ยนแปลงวิธีการคำนวณ (θ=1 ξ=0 เป็น Euler Implicit, θ=0.5 ξ=0 เป็น Trapezoidal scheme, Richtmyer และ Morton[17])

แทนค่าสมการที่ (13) ลงในสมการควบคุมการไหล (สมการที่ (10)) จะได้ว่า

$$U^{t+1}+\Delta t\left[\frac{\theta}{1+\xi}\left(\frac{\partial A^t U^{t+1}}{\partial x}+\left(Q^t U^{t+1}\right)\right)\right]$$
$$=U^t+\Delta t\left[\frac{\theta}{1+\xi}\left(\frac{\partial A^t U^t}{\partial x}+\left(Q^t U^t\right)\right)-\frac{1}{1+\xi}\left(\frac{\partial E}{\partial x}+S\right)^t\right]+\Delta t\frac{\xi}{1+\xi}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^{t-1} \quad \textbf{(14)}$$

ประยุกต์เทคนิค Flux vector splitting (Steger และ Warming [18]) โดยแยกค่าไอเกนเป็นค่าบวกและลบ ดังแสดงในสมการที่ (15) คือ

$$\left[I+\Delta t\frac{\theta}{1+\xi}\left(\frac{\partial A^{+t}}{\partial x}+\frac{\partial A^{-t}}{\partial x}+Q^t\right)\right]U^{t+1}$$
$$=\left[I+\Delta t\frac{\theta}{1+\xi}\left(\frac{\partial A^{+t}}{\partial x}+\frac{\partial A^{-t}}{\partial x}+Q^t\right)\right]U^t-\frac{1}{1+\xi}\left(\frac{\partial E}{\partial x}+S\right)^t+\frac{\xi}{1+\xi}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^{t-1} \quad \textbf{(15)}$$

โดยที่ I เป็น เวคเตอร์หนึ่งหน่วยขนาด 2x2

สัญลักษณ์ + กับ - แสดงฟลักซ์ที่ส่วนประกอบเป็นค่าบวกกับค่าลบ ตามลำดับ

เนื่องจากค่า E ไม่เป็นฟังก์ชั่น homogenous ลำดับที่ 1 ของ U ในมิติของระยะทาง จึงไม่สามารถประยุกต์ $E=AU$ ในพจน์ที่สองด้านขวามือของสมการที่ (15) ได้ Fennema และ Chaudhry [5] คำนวณค่า E โดยแยกตามทิศทางของส่วนประกอบฟลักซ์ดังนี้

$$\frac{\partial E}{\partial x}=A\frac{\partial U}{\partial x}=A^+\frac{\partial U}{\partial x}+A^-\frac{\partial U}{\partial x} \quad \textbf{(16)}$$

ค่า Jacobian A ที่ปรากฏทางด้านขวามือของสมการที่ (16) ทำให้สมการเปลี่ยนรูปเป็นสมการแบบไม่อนุรักษ์และอาจมีผลกระทบต่อผลการคำนวณ แต่ถ้าประยุกต์ค่าเฉลี่ยของ Roe สามารถลดความปรวนแปรของสภาวะความไม่เท่ากัน (inequality condition) ของ Entropy ได้ เขียนสมการที่ (16) ให้อยู่ในรูปอนุรักษ์ตามแบบค่าเฉลี่ย Jacobian ได้ว่า

$$\frac{\partial E}{a_x}=\tilde{A}\frac{\partial U}{\partial x}=\tilde{A}^+_{i+1/2}\frac{\partial U}{\partial x}+\tilde{A}^-_{i-1/2}\frac{\partial U}{\partial x} \quad \textbf{(17)}$$

โดยที่

$$\tilde{A}^{+}_{i\pm 1/2}=\tilde{A}\left(U_{i\pm 1/2}\right)=\tilde{A}\left(U_i,U_{i\pm 1}\right) \quad \textbf{(18)}$$

ค่า $\tilde{u}$ และ $\tilde{c}$ สามารถคำนวณค่าได้โดยใช้ค่าเฉลี่ยของ Roe ดังนี้

$$\tilde{u}_{i+1/2} = \frac{Q_{i+1}A_{i+1}^{1/2} + Q_i A_i^{1/2}}{A_{i+1}^{1/2} + A_i^{1/2}} \tag{19}$$

$$\tilde{c}_{i+1/2} = g\frac{F_{hi+1} - F_{hi}}{A_{i+1} - A_i} \tag{20}$$

อย่างไรก็ตาม ในการประยุกต์ค่าเฉลี่ย $\tilde{u}$ และ $\tilde{c}$ ของ Roe ยังเกิดความปรวนแปรของสภาวะความไม่เท่ากันของ Entropy ได้ แต่ก็สามารถแก้ไขโดยการปรับแก้ค่าไอเกน เช่น Harten และ Hyman [19], Yee [20] เป็นต้น

Roe scheme บนพื้นฐานเทคนิค Flux difference splitting

สมการของกระบวนการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบ Upwind scheme ของเวลา $t+1$ ใดๆ เขียนได้เป็น

$$U^{t+1} = U^t - \gamma\left[\Delta E_{i+1/2}^{t-} + \Delta E_{i-1/2}^{t+}\right] - (\Delta t)S_i^t \tag{21}$$

โดยที่ γ เป็น อัตราส่วนของช่วงเวลากับระยะทาง ($\Delta t/\Delta x$)

สัญลักษณ์ + กับ - แสดงฟลักซ์ที่ส่วนประกอบเป็นค่าบวกกับค่าลบ ตามลำดับ

เมื่อประยุกต์ค่าประมาณ Jacobian กับสมการที่ (21) จะได้ว่า

$$U^{t+1} = U^t - \gamma\left[\sum_{k=1}^{2}\tilde{\lambda}_{i+1/2}^{k-}\,\tilde{\alpha}_{i+1/2}^{k}\,\tilde{e}_{i+1/2}^{k} + \sum_{k=1}^{2}\tilde{\lambda}_{i-1/2}^{k+}\,\tilde{\alpha}_{i-1/2}^{k}\,\tilde{e}_{i-1/2}^{k}\right] - (\Delta t)S_i^t \tag{22}$$

โดยสามารถแยกค่าไอเกนเป็นค่าบวกและลบได้ดังสมการที่ (23) คือ

$$\tilde{\lambda}^{k+} = 0.5\left(\tilde{\lambda}^k + \left|\tilde{\lambda}^k\right|\right),\ \tilde{\lambda}^{k} = 0.5\left(\tilde{\lambda}^k - \left|\tilde{\lambda}^k\right|\right) \qquad \textbf{(23a)-(23b)}$$

แทนค่าสมการที่ (23) ลงในสมการควบคุมการไหล (สมการที่ (22)) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} U^{t+1} = U^t - \frac{\gamma}{2}\Bigg[& \sum_{k=1}^{2}\left(\tilde{\lambda}_{i+1/2}^{k} - \left|\tilde{\lambda}_{i+1/2}^{k}\right|\right)\tilde{\alpha}_{i+1/2}^{k}\ \tilde{e}_{i+1/2}^{k} \\ & - \sum_{k=1}^{2}\left(\tilde{\lambda}_{i-1/2}^{k} + \left|\tilde{\lambda}_{i-1/2}^{k}\right|\right)\tilde{\alpha}_{i-1/2}^{k}\ \tilde{e}_{i-1/2}^{k}\Bigg] - (\Delta t)S_i^t \end{aligned} \tag{24}$$

จากสมการที่ (24) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบง่ายๆ ตามสมการแบบ Upwind scheme ได้ดังนี้

$$U^{t+1} = U^{t} - \gamma\left[\Delta E^{N}_{i+1/2} + \Delta E^{N}_{i-1/2}\right] - (\Delta t) S^{t}_{i} \tag{25}$$

โดยที่ฟลักซ์เชิงตัวเลข E^{N} (numerical fluxes) ใดๆ เขียนได้เป็น

$$E^{N}_{i\pm 1/2} = 0.5\left(E_{i} + E_{i\pm 1}\right) - 0.5\sum_{k=1}^{2}\left|\tilde{\lambda}^{k}_{i\pm 1/2}\right|\tilde{\alpha}^{k}_{i\pm 1/2}\,\tilde{e}^{k}_{i\pm 1/2} \tag{26}$$

ค่า $\tilde{\alpha}$, $\tilde{u}$ และ $\tilde{c}$ คำนวณได้จาก

$$\tilde{\alpha}^{1,2}_{i+1/2} = \frac{1}{2\tilde{c}}\left[\pm\Delta Q_{i+1/2} + (\tilde{c} \pm \tilde{u})\,\Delta A_{i+1/2}\right] \tag{27}$$

$$\tilde{u}_{i+1/2} = \frac{\sqrt{(A_{i})}u_{i} + \sqrt{(A_{i+1})}u_{i+1}}{\sqrt{A_{i}} + \sqrt{A_{i+1}}} \tag{28}$$

$$\tilde{c}_{i+1/2} = \begin{cases} g\dfrac{F_{h_{i+1}} - F_{h_{i}}}{A_{i+1} + A_{i}} & if\ A_{i+1} - A_{i} \neq 0 \\ c^{2}_{i} = c^{2}_{i+1} & if\ A_{i+1} - A_{i} = 0 \end{cases} \tag{29}$$

ค่าประมาณ Jacobian A ที่ได้มานั้นพบว่าก่อให้เกิดความแปรปรวนของสภาวะความไม่เท่ากัน (inequality condition) ของ Entropy ในการคำนวณ ซึ่งความแปรปรวนของสภาวะความไม่เท่ากันของ Entropy นั้นสามารถแก้ไขโดยการปรับแก้ค่าไอเกน Yee [20] ได้เสนอโมดูลัสปรับแก้ค่าไอเกน ซึ่งได้ถูกนำมาใช้ในการศึกษานี้ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\left|\lambda^{k}_{i\pm 1/2}\right| = max\left(\delta, \left|\lambda^{k}_{i\pm 1/2}\right|\right) \tag{30}$$

โดยที่ δ เป็น ค่าบวกที่มีจำนวนน้อยๆ (δ = 0.1~1.0)

Lax-Wendroff scheme บนพื้นฐานเทคนิค Flux difference splitting

สมการของกระบวนการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบ Lax-Wendroff scheme ของเวลา *t+1* ใดๆ เขียนได้เป็น

$$E^N_{i+1/2} = 0.5(E_i + E_{i+1}) - 0.5\gamma A^2(U_{i+1} - U_i) \quad \textbf{(31)}$$

$$E^N_{i-1/2} = 0.5(E_i + E_{i+1}) - 0.5\gamma A^2(U_i - U_{i-1}) \quad \textbf{(32)}$$

เนื่องจากสมการแบบ Lax-Wendroff scheme มีความแม่นยำลำดับที่ 2 จึงทำให้เกิดการสั่นบริเวณหน้าตัดไม่ต่อเนื่องและอาจทำให้ผลการคำนวณคลาดเคลื่อนจากค่าที่แท้จริง Sweby [22] ได้เสนอเขตจำกัดฟลักซ์ φ (flux limiter) เพื่อปรับแก้การสั่นนั้น เมื่อนำมาประยุกต์กับสมการแบบ Lax-Wendroff (สมการที่ (31) ถึง (32)) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E^N_{i\pm 1/2} &= 0.5(E_i + E_{i\pm 1}) - 0.5\sum_{k=1}^{2}\left|\tilde{\lambda}^k_{i\pm 1/2}\right|\tilde{\alpha}^k_{i\pm 1/2}\tilde{e}^k_{i\pm 1/2} \\ &\quad + 0.5\sum_{k=1}^{2}\varphi\left(r^k_{i\pm 1/2}\right)\left|\tilde{\lambda}^k_{i\pm 1/2}\right|\left[1-\left(\gamma\left|\tilde{\lambda}^k_{i\pm 1/2}\right|\right)\right]\tilde{\alpha}^k_{i\pm 1/2}\tilde{e}^k_{i\pm 1/2} \end{aligned} \quad \textbf{(33)}$$

โดยที่ค่าเขตจำกัดฟลักซ์ φ ทำหน้าที่ควบคุมไม่ให้เกิดการสั่นบริเวณหน้าตัดที่มีความลาดมากหรือเกิด Shock ซึ่งสามารถแสดงเป็นสมการไร้เชิงเส้นได้เป็น

$$r^k_{i\pm 1/2} = \frac{\bar{a}^{\,k}_{i\pm 1/2\text{-}sign\left(\tilde{\lambda}^k_{i\pm 1/2}\right)}}{\tilde{\alpha}^k_{i\pm 1/2}} \quad \textbf{(34)}$$

โดยที่ *sign* เป็น สัญลักษณ์แสดงทิศทางของค่าไอเกน λ

ซึ่งค่า *r* สามารถแสดงเป็นความสัมพันธ์ของฟังก์ชั่นได้หลายรูปแบบ ได้แก่ เขตจำกัดฟลักซ์ Superbee ของ Roe, van Leer และ minmod ของ Sweby ซึ่งเขียนได้ตามสมการที่ (35)

$$\phi(r) = max\left[0, min(2r,1), min(r,2)\right] \quad \textbf{(35a)}$$

$$\phi(r) = \frac{r+|r|}{1+r} \quad \textbf{(35b)}$$

$$\phi(r) = minmod(1, br) \quad \textbf{(35c)}$$

การเลือกใช้นั้นสามารถเลือกแบบไหนก็ได้ โดยที่เขตจำกัดฟลักซ์ Superbee ของ Roe จะมีลักษณะสมบัติเข้มงวดที่สุดและได้ถูกนำมาใช้ในการศึกษานี้

สภาพเริ่มต้นและขอบเขตรอบนอก

การคำนวณเชิงตัวเลขของสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์สามารถหาค่าปริมาณต่างๆ ในพื้นที่การไหลได้โดยตรงแต่ไม่สามารถประยุกต์ใช้กับส่วนที่เป็นขอบเขตรอบนอก เมื่อแก้สมการในส่วนที่เป็นขอบเขตรอบนอกจำเป็นต้องทราบค่าขอบเขตรอบนอกของพื้นที่การไหลก่อน และจะใช้เป็นข้อมูลป้อนเข้า ซึ่งข้อมูลเหล่านี้หาได้จากการเก็บข้อมูลในสนามหรือกำหนดขึ้นหรือวิธีการอื่นๆ ส่วนสภาพเริ่มต้นซึ่งเป็นค่าเริ่มแรกในการคำนวณจะถูกป้อนโดยตรง

ในการศึกษานี้ได้ประยุกต์สมการ Compatibility มาใช้ในการคำนวณค่าของสภาพขอบเขตรอบนอก โดยการนำเอาข้อมูลการไหลที่ถูกส่งผ่านเส้น Characteristics จากด้านเหนือน้ำหรือท้ายน้ำเข้าสู่พื้นที่การคำนวณผ่านไปยังระนาบของเวลาใหม่มาใช้ สามารถสร้างสมการโดยการคูณส่วนกลับไอเกนเวคเตอร์เข้าไปในสมการ Compatibility ผลลัพธ์ที่ได้เป็นดังนี้

$$e^{-1}\frac{\partial U}{\partial t}+ae^{-1}\frac{\partial U}{\partial x}+e^{-1}S=0 \tag{36}$$

เสถียรภาพของการคำนวณสมการแบบ Explicit scheme ถูกจำกัดโดยสภาพของ CFL (Courant-Friedrichs-Levy) ดังนี้

$$C_r=\frac{\Delta t}{\Delta x}max\left(u+\sqrt{gh}\right) \tag{37}$$

โดยที่ C_r เป็น Courant นัมเบอร์ ($C_r \leq 1$)

และการประเมินเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของสมดุลมวล (mass balance errors) คำนวณได้จาก

$$Mass\ balance\ errors=\frac{\sum M_{initial}-\sum M_{remain}}{\sum M_{initial}} \times 100\% \tag{38}$$

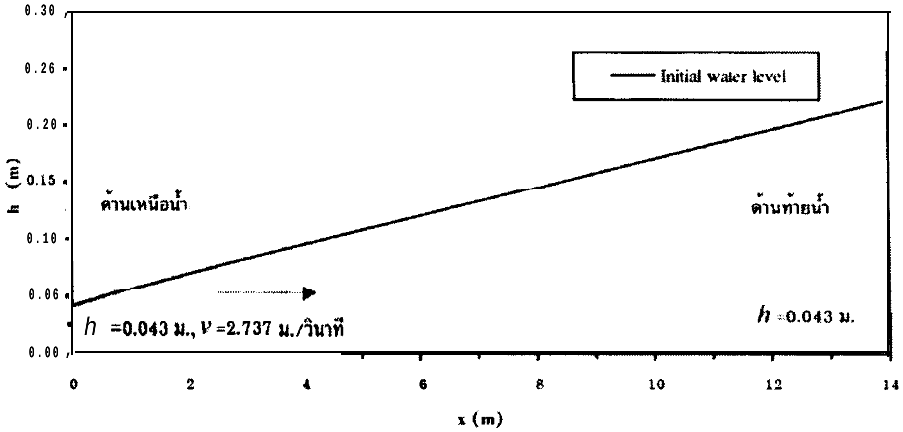
โดยที่ $\sum M_{initial}$ เป็น ผลรวมของมวลสารเริ่มต้น

$\sum M_{remain}$ เป็นผลรวมของมวลสารที่คงเหลือ

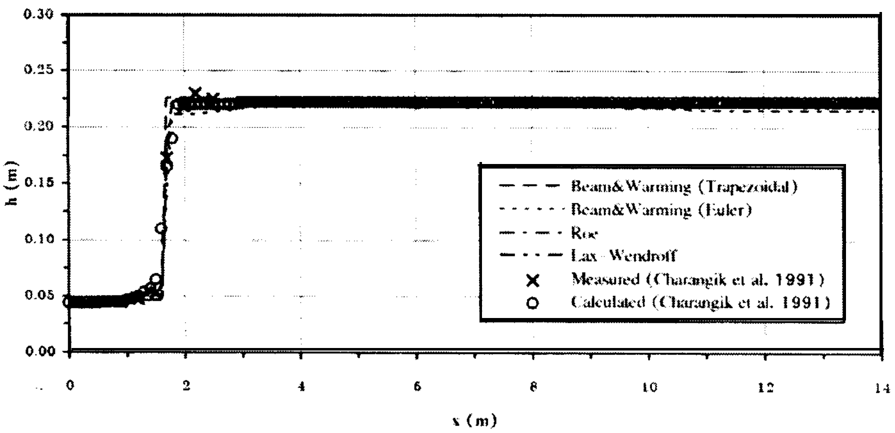
การประยุกต์และผลการคำนวณ

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวข้างต้นได้ถูกนำมาประยุกต์แก้ปัญหาการไหลแบบเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วสามตัวอย่างได้แก่ ปัญหาน้ำกระโดดปัญหาการเคลื่อนที่ของคลื่นน้ำที่เกิดจากการปิด/เปิดประตูน้ำแบบฉับพลันและปัญหาเขื่อนแตก โดยทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณของการแก้สมการแบบ Roe และ Lax-Wendroff scheme กับผลการทดลองและสมการเชิงวิเคราะห์ พร้อมทั้งทดสอบความสามารถของเขตจำกัดแบบต่างๆ ผลการศึกษาทั้งสามตัวอย่างสรุปได้ดังนี้

ตัวอย่างแรกเป็นกรณีศึกษาปัญหาน้ำกระโดดโดยทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณกับผลการศึกษาของ Gharangik และ Chaudhry [13] ซึ่งพวกเขาได้ผลการทดลองกับผลการคำนวณซึ่งแก้สมการแบบ Two-Four scheme โดยนำเอาพจน์ของ Boussinesq มาพิจารณาด้วย รูปที่ 1 แสดงสภาพเริ่มต้นและขอบเขตของการคำนวณมีขนาด 0.46 ม. x 14.0 ม. ความลึกเริ่มแรกด้านเหนือน้ำสูง 0.043 ม. แล้วค่อยๆ ลาดสูงเพิ่มขึ้นทางด้านท้ายน้ำสูง 0.222 ม. ความเร็วของกระแสน้ำ 2.737 ม./วินาที และ Froude นัมเบอร์เท่ากับ 4.23 ค่าพารามิเตอร์ในการคำนวณ Δx = 0.10 ม., C_r = 1.0 ในรูปที่ 2 พบว่าสมการตามแบบ Beam & Warming, Roe และ Lax-Wendroff scheme จากการศึกษานี้สามารถทำนายตำแหน่งของน้ำกระโดดได้แม่นยำกว่าสมการแบบ Two-four scheme โดยที่ผลการคำนวณแบบหลังนั้นพบว่า ที่บริเวณหน้าตัดน้ำกระโดดมีลักษณะเกิดการกระจายบริเวณหน้าตัดด้านเหนือน้ำและเกิดการสั่นเชิงจำนวนด้านท้ายน้ำด้านท้ายน้ำเล็กน้อย อย่างไรก็ตามความลึกด้านท้ายน้ำที่คำนวณได้จากสมการตามแบบ Beam & Warming แบบ Euler นั้นได้ค่าต่ำกว่าผลการทดลองเล็กน้อย



รูปที่ 1 แสดงขอบเขตและสภาพเริ่มต้นกรณีปัญหาน้ำกระโดด

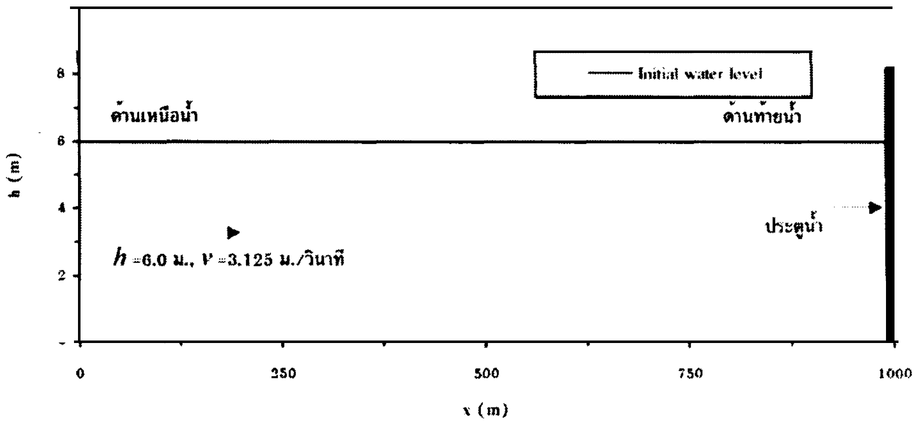


รูปที่ 2 แสดงผลการคำนวณกรณีปัญหาน้ำกระโดด

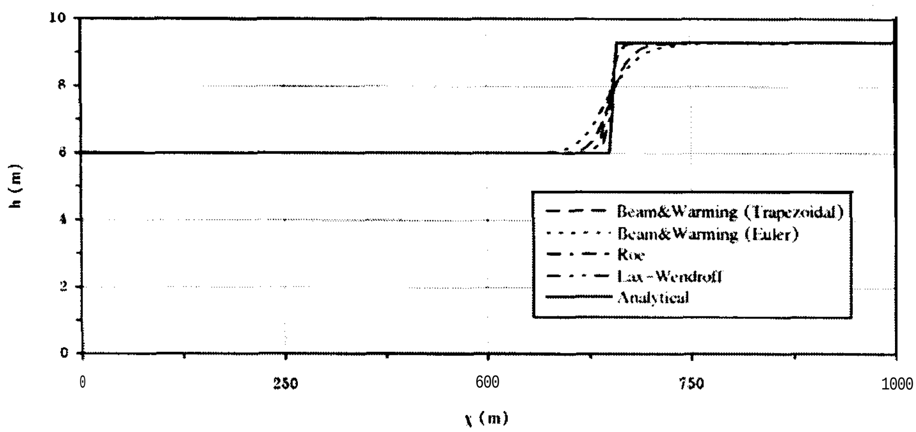
ตัวอย่างที่สองเป็นปัญหาคลื่นน้ำ (Bore) ที่เกิดจากปฏิบัติการปิด/เปิดบานประตูน้ำแบบฉับพลัน การศึกษากระทำโดยเปรียบเทียบผลการคำนวณของสมการแบบต่างๆ กับคำตอบเชิงวิเคราะห์ พื้นที่การคำนวณเป็นทางน้ำเปิดกว้างหนึ่งหน่วยมีความยาว 1000 ม. สภาพเริ่มต้นและขอบเขตของการคำนวณของกรณีปิดบานประตูน้ำแบบฉับพลัน ความลึกเริ่มแรกสูง 6.0 ม. ความเร็วของกระแสน้ำ 3.125 ม./วินาที (ดังแสดงตามรูปที่ 3) ประตูน้ำด้านท้ายน้ำจะถูกปิดอย่างทันทีทันใดเมื่อเริ่มต้นการคำนวณที่เวลา 0.0 วินาที ค่าพารามิเตอร์ในการคำนวณ Δx = 10.0 ม., C_r = 1.0 และ δ = 0.1 รูปที่ 4 แสดงคลื่นน้ำที่ปะทะกับบานประตูน้ำด้านท้ายน้ำแล้วเคลื่อนตัวกลับมายังด้านเหนือน้ำหลังจากเวลาผ่านไป 50+Δt วินาที จะเห็นว่าผลการคำนวณสอดคล้องกับคำตอบเชิงวิเคราะห์เป็นอย่างดี และพบว่าผลการคำนวณของสมการตามแบบ Beam & Warming scheme นั้นบริเวณหน้าตัดไม่ต่อเนื่อง มีลักษณะการกระจายเล็กน้อย ส่วนกรณีเปิดบานประตูน้ำแบบฉับพลันโดยที่สภาพเริ่มต้นนั้นพื้นที่การคำนวณเป็นน้ำนิ่งมีความลึก 1.0 ม. (ดังแสดงตามรูปที่ 5) ประตูน้ำด้านเหนือน้ำจะถูกเปิดอย่างทันทีทันใดเมื่อเวลา 0.0 วินาที มีน้ำไหลเข้ามาด้วยอัตราการไหล 24 ม.3/วินาที ค่าพารามิเตอร์ในการคำนวณที่ใช้เหมือนกับกรณีปิดบานประตูข้างต้น รูปที่ 6 แสดงคลื่นน้ำที่พุ่งออกจากประตูน้ำด้านเหนือน้ำแล้วเคลื่อนตัวไปด้านท้ายน้ำ พบว่าผลการคำนวณสามารถทำนายความสูงและตำแหน่งของคลื่นน้ำได้อย่างถูกต้องสอดคล้องกับคำตอบเชิงวิเคราะห์และจากตารางที่ 1 ซึ่งแสดงผลการเปรียบเทียบของสมการทั้งสามแบบพบว่าแบบ Roe และ Lax-Wendroff scheme ใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุด และพบว่าแบบ Roe scheme มีค่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของสมดุลมวลน้อยที่สุด

ตารางที่ 1 แสดงผลการเปรียบเทียบปัญหาคลื่นน้ำที่เกิดจากการปิด/เปิดบานประตูน้ำแบบฉับพลัน

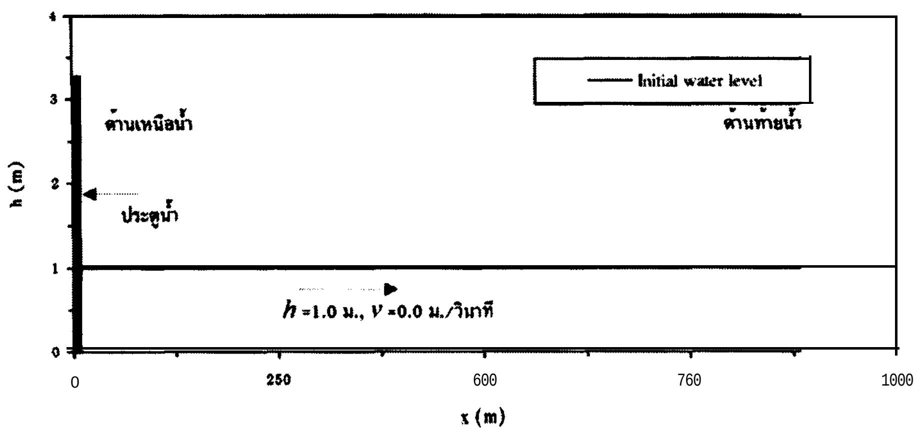
กรณีศึกษา / สมการแบบ	กรณีปิดบานประตูแบบฉับพลัน		กรณีเปิดบานแบบฉับพลัน	
	เวลาที่ใช้ (วินาที)	Errors	เวลาที่ใช้ (วินาที)	Errors
Roe	7	2.01×10^{-5}	8	2.68×10^{-5}
Lax - Wendroff	7	2.56×10^{-5}	8	2.72×10^{-5}
Beam&Warming(Euler)	15	3.52×10^{-4}	16	5.08×10^{-4}
Beam&Warming(Trapezoidal)	17	2.98×10^{-4}	19	3.17×10^{-4}



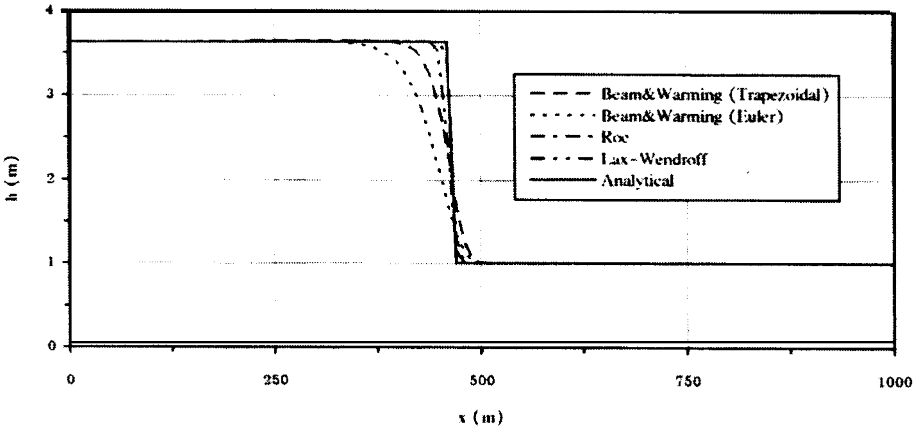
รูปที่ 3 แสดงขอบเขตและสภาพเริ่มต้นกรณีปัญหาคลื่นน้ำที่เกิดจากการปิดประตูแบบฉับพลัน



รูปที่ 4 แสดงผลการคำนวณกรณีปัญหาคลื่นน้ำที่เกิดจากการปิดประตูแบบฉับพลัน

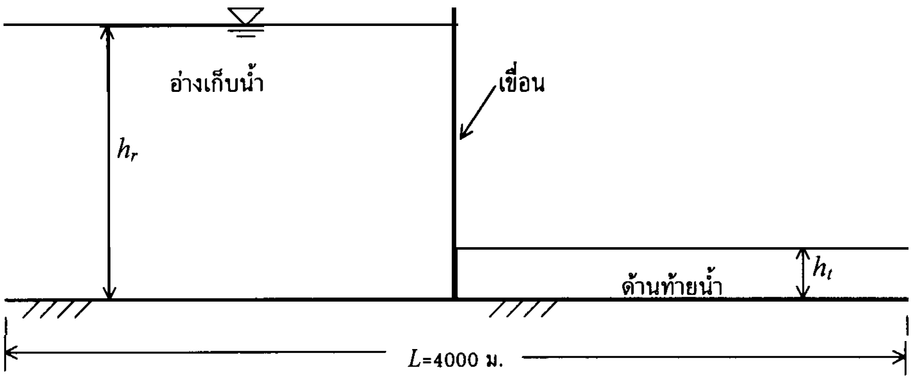


รูปที่ 5 แสดงขอบเขตและสภาพเริ่มต้นกรณีปัญหาคลื่นน้ำที่เกิดจากการเปิดประตูแบบฉับพลัน

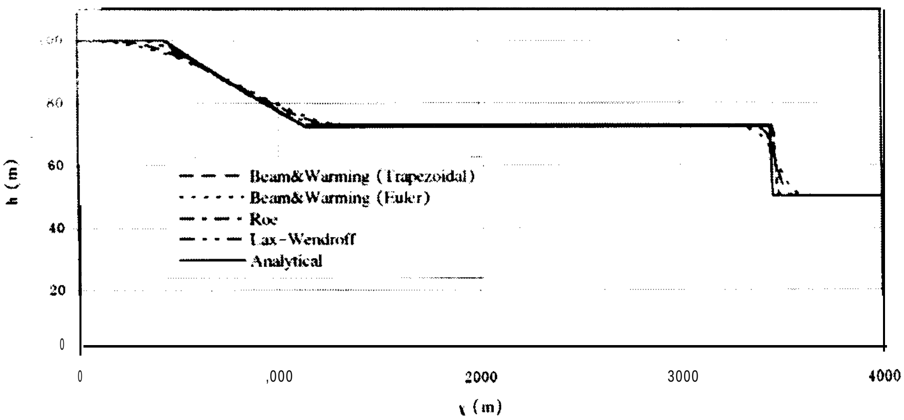


รูปที่ 6 แสดงผลการคำนวณกรณีปัญหาคลื่นน้ำที่เกิดจากการเปิดประตูแบบฉับพลัน

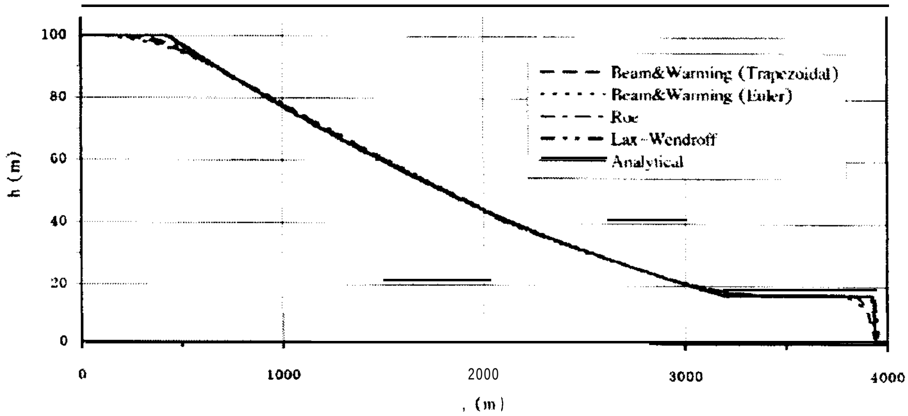
ตัวอย่างที่สามเป็นปัญหาเขื่อนแตกในอุดมคติ (Idealized dam break problem) รูปที่ 7 แสดงสภาพเริ่มต้นและขอบเขตของการคำนวณของกรณีศึกษาพื้นที่การคำนวณกว้างหนึ่งหน่วยมีความยาว 4000 ม. การคำนวณมีสองกรณีคือความลึกเริ่มแรกในอ่างเก็บน้ำ (h_r) 100.0 ม. กับด้านท้ายน้ำ (h_t) 50.0, 1.0 ม. (h_t/h_r=0.5, 0.01) ตำแหน่งของเขื่อนอยู่ที่ระยะ 2000 ม. จากด้านเหนือน้ำ ค่าพารามิเตอร์ในการคำนวณ Δx=10.0 ม., C_r=1.0 และ δ = 0.8 โดยสภาพเริ่มแรกน้ำในอ่างเก็บน้ำและท้ายน้ำจะนิ่งสงบ แล้วเขื่อนจะพังทลายอย่างทันทีทันใดที่เวลา 0.0 วินาที รูปที่ 8 (a) กับ (b) แสดงผลการคำนวณเมื่อเวลา 50+Δt วินาทีของกรณีทั้งสองตามลำดับ พบว่าผลการคำนวณของสมการทั้งสองแบบสอดคล้องเป็นอย่างดีกับคำตอบเชิงวิเคราะห์ ณ ตำแหน่งหน้าตัด Shock front ผลการคำนวณไม่มีลักษณะการกระจายและ/หรือเกิดการสั่นเชิงจำนวน อย่างไรก็ตามผลการคำนวณของสมการแบบ Lax-Wendroff scheme จะเคลื่อนที่เร็วกว่าคำตอบเชิงวิเคราะห์ 1 ช่วงกริด ทั้งสองกรณีมีค่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของสมดุลมวลน้อยกว่า 2.09×10^{-3} สำหรับขีดความสามารถของสมการทั้งสองคำนวณค่าอัตราส่วน h_t/h_r ได้น้อยถึง 1.0×10^{-5}



รูปที่ 7 แสดงขอบเขตและสภาพเริ่มต้นกรณีปัญหาเขื่อนแตก



(a) อัตราส่วน h_l/h_r = 0.5



(b) อัตราส่วน h_l/h_r = 0.01

รูปที่ 8 แสดงผลการคำนวณกรณีปัญหาเขื่อนแตกในอุดมคติเมื่อเวลาผ่านไป 50+Δt วินาที

ตารางที่ 2 แสดงผลการเปรียบเทียบปัญหาเขื่อนแตก

กรณีศึกษา / สมการแบบ	อัตราส่วน h_l/h_r =0.5		อัตราส่วน h_l/h_r =0.01	
	เวลาที่ใช้ (วินาที)	Errors	เวลาที่ใช้ (วินาที)	Errors
Roe	17	7.31×10^{-5}	19	2.04×10^{-4}
Lax - Wendroff	25	2.09×10^{-3}	28	0.0
Beam&Warming(Euler)	36	-4.18×10^{-3}	48	0.0
Beam&Warming(Trapezoidal)	35	-2.09×10^{-3}	47	-3.88×10^{-3}

และจากตารางที่ 2 ซึ่งแสดงผลการเปรียบเทียบของสมการทั้งสามแบบพบว่าแบบ Roe scheme ใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุด และมีความผิดพลาดน้อยที่สุด

สรุป

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แก้สมการน้ำตื้นชนิดหนึ่งมิติ โดยใช้กระบวนการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์บนพื้นฐาน Flux vector splitting ร่วมกับค่าประมาณ Jacobian เพื่อแก้สมการตามแบบ Beam & Warming ซึ่งมีพื้นฐานบนการคำนวณแบบ Implicit กับกระบวนการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบ Roe และ Lax-Wendroff scheme บนพื้นฐาน Flux difference splitting สภาพขอบเขตรอบนอก คำนวณโดยประยุกต์วิธี Modified of Characteristics ได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้เพื่อคำนวณความลึกและการเคลื่อนตัวของคลื่นน้ำของการไหลแบบไม่คงที่ในทางน้ำเปิด ผลการคำนวณแสดงการนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาน้ำกระโดด ปัญหาการเคลื่อนตัวของคลื่นน้ำ และปัญหาเขื่อนแตกในอุดมคติ ซึ่งสามารถทำนายปรากฏการณ์การไหลแบบเปลี่ยนแปลงในทางน้ำเปิดนั้นได้อย่างแม่นยำ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการทั้งสี่แบบมีความเหมาะสมในการนำไปประยุกต์ใช้คำนวณปัญหาการไหลในทางน้ำเปิดได้เป็นอย่างดี โดยที่สมการตามแบบ Roe scheme ความเหมาะสมมากที่สุด

เอกสารอ้างอิง

1. Stoker, J.J., 1957, Water Waves, Interscience Publisher, Inc., Willey and Sons, New York.

2. de St. Venant, B., 187 1, "Theorie du Movemaent Non Permanent des Eaux, Avec Application aux Crues de Riveras et a l'introduction des Marces Dans Leur Lit", *Comptes Rendus* de *l'Acadamic* des Sciences, Vol. 7 3, pp. 14 7 - 15 7.

3. Mahmood, K. and Yevjevich, V., 197 5, Unsteady Flow in Open Channels, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado.

4. Abbott, M.B., 1979, Computational Hydraulics: Elements of the Theory of Free-surface Flows, Pitman Publishing Limited, London.

5. Fennema, R.J. and Chaudhry, M.H., 1987, "Simulation of One-Dimensional Dam-Break Flows", *Journal* of Hydraulics Research, Vol. 2 5, No. 1, pp.4 1 - 5 1.

6. Glaister, P., 1988, "Approximate Reimann Solutions of the Shallow Water", Journal of Hydraulics Research, Vol. 26, No. 3, pp. 293-306.

7. Roe, P., 1981, "Approximate Reimann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes", Journal of Computation Physics, Vo1.43, pp.357-37 2.

8. Alcrudo, F., Garcia-Navarro, P. and Saviron, J.M., 1992, "Flux Difference Splitting for 1D Open Channel Flow Equations", International Journal for Numerical Methods *in* Fluids, Vo1.4, pp.1009-1018.

9. Garcia-Navarro, P., Alcrudo, F., and Saviron, J.M., 1987, "1-D Open-Channel Flow Simulation Using TVD-McCormack Scheme", Journal *of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vo1.118, No.10, pp.1359-1371.

10. Jha, A.K., Akiyama, J., and Ura, M., 1995, "Frist- and Second-order Flux Difference Splitting Schemes for Dam-break Problem", Journal *of* Hydraulic Engineering, ASCE, Vo1.121, No.12, pp.877-884.

11. Jha, A.K., Akiyama, J., and Ura, M., 1994, "Modeling Unsteady Open-channel Flows-Modification to Beam and Warming Scheme", Journal *of* Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.120, No.4, pp.461-476.

12. Jha, A.K., 1995, Characteristic Based Numerical Schemes for 1 -D Transient Free Surface Flows, *Thesis* Presented to the *Kyushu Institute of Technology,* in Partial Fulfillment of the requirement for the degree of Doctor of Philosophy.

13. Gharangik, A.M., and Chaudhry, M.H., 1991, "Numerical Simulation of Hydraulic Jump", Journal *of* Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 117, No. 9, pp.1195-12 11.

14. Ramanh, A.M., and Chaudhry, M.H., 1995, "Simulation of Hydraulic Jump with Grid Adaptation", Journal *of* Hydraulic *Research,* Vo1.33, No.4, pp.555-569.

15. Meselhe, E.A., Sotiropoulos, F., and Holly, F.M., 1997, "Numerical Simulation of Transcritical Flow in Open Channels", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vo1.123, No.9, pp.774-783.

16. Beam, R.M., Warming, R.F., 1976, "An Implicit Finite-differrence Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation-law Form", Journal *of* Computation Physics, No.22, pp.87-110.

17. Richtmyer, R.D., and Morton, K.W., 196 7, Difference Methods *for* Initial -value Problems, 2nd Edition, John Willey and Sons, New York.

18. Steger, J.L., Warming, R.F., 1981, "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamics Equations with Application to Finite Difference Methods", Journal of Computation Physics, No.40, pp.263-293.

19. Harten, A. and Hyman, J.M., 1983, "Self Adjust Grid Methods for One-Dimensional Hyperbolic Conservation Laws", Journal of Computation Physics, No.50, pp. 235-269.

20. Yee, H.C., 1989, "A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock Capturing Methods", NASA-TM 101088, U.S.A.