

การเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ความเค้นของปัญหากลศาสตร์ของแข็ง ใน 2 มิติ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีไฟโตอีลาสติคซิติ

วิโรจน์ ลิมตระการ¹

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต คลองหลวง ปทุมธานี 12121

รับเมื่อ 30 กรกฎาคม 2547 ตอบรับเมื่อ 1 พฤศจิกายน 2547

บทคัดย่อ

บทความนี้กล่าวถึงการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีไฟโตอีลาสติคซิติเพื่อหาการกระจายความเค้นที่เกิดขึ้นในปัญหากลศาสตร์ของแข็ง โดยเริ่มจากทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ ทฤษฎีกลศาสตร์ของแข็งใน 2 มิติ การหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ขั้นตอนการคำนวณ และการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต จากนั้นอธิบายถึงทฤษฎีไฟโตอีลาสติคซิติ ต่อมาแสดงผลการประยุกต์กับปัญหา 2 ตัวอย่าง คือ ปัญหาการตัดคานด้วยแรงกระทำ 4 จุด และปัญหาการสัมผัสกันระหว่างโซ่และเฟือง ผลลัพธ์ที่ได้จากการประยุกต์ทั้ง 2 เทคนิคแสดงให้เห็นถึงผลลัพธ์ที่สอดคล้องกัน

คำสำคัญ : ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ / ไฟโตอีลาสติคซิติ

¹ อาจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

Comparison in the Stress Analysis of 2D Solid Mechanics Problems of Finite Element Method and Photoelasticity

Wiroj Limtrakarn ¹

Thammasat University, Rangsit Campus, Klong Luang, Pathum Thani 12121

Received 30 July 2004 ; accepted 1 November 2004

Abstract

Finite Element Method and photoelasticity technique are presented to predict the stress distribution for solid mechanics problems. The paper first describes 2D solid mechanics theory. Finite element formulation, the computational procedure and its boundary conditions are then represented. Photoelasticity theory and its procedure are described. The validated examples of both techniques are four-point bending problem and chain-gear contact problem. The solutions show the efficiency of finite element method and have a good agreement with the photoelasticity results.

Keywords : Finite Element Method / Photoelasticity

¹ Lecturer, Department of Mechanical Engineering.

1. บทนำ

ความเสียหายที่เกิดขึ้นบนชิ้นงานส่วนใหญ่เกิดจากการรับภาระที่มากเกินไป ทำให้เกิดความเค้นสูงเกินกว่าที่วัสดุจะทนได้ ดังนั้นงานวิจัยที่สามารถหาความเค้นที่เกิดขึ้นบนชิ้นงานขณะใช้งานได้แม่นยำจึงมีความสำคัญต่องานด้านการออกแบบผลิตภัณฑ์สมัยใหม่เป็นอย่างยิ่ง งานวิจัยดังกล่าวสามารถทำได้ทั้งในรูปแบบการทดลอง เช่น การวัดด้วยเกจความเครียดและการใช้เทคนิคโฟโตอีลาสติคซิติวัดความเค้น หรือจากการคำนวณด้วยวิธีประมาณ เช่น การคำนวณหาความเค้นด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นต้น

บทความนี้สนใจหาความเค้นที่เกิดขึ้นบนชิ้นงานโปร่งใส และได้นำการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และการทดลองที่ใช้เทคนิคโฟโตอีลาสติคซิติมาประยุกต์ใช้ ทั้งสองวิธีนี้สามารถหาความเค้นที่เกิดขึ้นตลอดทั้งชิ้นงานได้ เนื้อหาของบทความจะเริ่มต้นจากการอธิบายกลศาสตร์ของแข็งใน 2 มิติและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ รวมถึงการหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ และการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้อง จากนั้นกล่าวถึงทฤษฎีโฟโตอีลาสติคซิติซึ่งมีพื้นฐานจากทฤษฎีของแสง ต่อจากนั้นประยุกต์ทั้ง 2 วิธีกับปัญหา 2 ตัวอย่าง คือ ปัญหาการตัดคานด้วยแรงกระทำ 4 จุด และปัญหาการสัมผัสกันระหว่างโซ่และเฟือง

2. ทฤษฎี

2.1 ทฤษฎีกลศาสตร์ของแข็งใน 2 มิติ [1]

สมการทดแทนความเป็นจริงของปัญหากลศาสตร์ของแข็งในระบบ 2 มิติ ประกอบด้วย 3 สมการดังนี้ สมการความสมดุลของของแข็งในทิศทาง x และ y

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1ก)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (1ข)$$

โดย σ_x, σ_y คือ ความเค้นในแนวแกน x และ y
 τ_{xy} คือ ความเค้นเฉือนในระนาบ xy

สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด

$$\{\sigma\} = [c] \{\epsilon\} \quad (2)$$

โดย

$$\{\sigma\}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]$$

$$\{\epsilon\}^T = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}]$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}$$

สัมประสิทธิ์ในเมตริกซ์ $[C]$ เป็นความสัมพันธ์ของค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นและค่าปัวส์ซง และขึ้นอยู่กับว่า จะพิจารณาปัญหาเป็นความเค้นในระนาบ (plane stress) หรือความเครียดในระนาบ (plane strain)

และสมการสุดท้ายแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและค่าการเคลื่อนตัวดังนี้

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \quad (3)$$

โดย $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ คือ ค่าความเครียดในแนวแกน x, y

γ_{xy} คือ ความเครียดเฉือนในระนาบ xy

u, v คือ ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกน x และ y

จากนั้นนำระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างแบบบับโนฟ-กาลอร์คิน มาประยุกต์ใช้กับสมการที่ (1)-(3) และได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ออกมาในรูปแบบเมตริกซ์ดังนี้

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \quad (4)$$

โดย $[K]$ คือ เอลิเมนต์เมตริกซ์ของความแข็งแรง $\{\delta\}^T = [u \ v]$

$\{F\}$ คือ โหลดเวกเตอร์เนื่องจากแรงกระทำที่ผิว

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหามีด้วยกัน 3 รูปแบบและแสดงในรูปที่ 1 เงื่อนไขขอบเขตแรกแสดงให้เห็นว่า ตลอดขอบเขต S_1 มีแรงดึง $T_1(t)$ มากระทำดังนี้

$$\sigma_{ij} n_j = T_1(t) \quad (5a)$$

โดย n_j คือ เวกเตอร์หน่วยที่มีทิศตั้งฉากกับขอบเขต

เงื่อนไขขอบเขตที่สองแสดงถึงการกำหนดค่าการเคลื่อนตัว $u_i(x,t)$ ให้มีค่าคงที่ $u_2(t)$ ตลอดขอบเขต S_2 ดังนี้

$$u_i(x,t) = u_2(t) \quad (5b)$$

เงื่อนไขขอบเขตที่สามแสดงถึงเงื่อนไขการสัมผัสกัน หากบริเวณใดในขอบเขต S_3 เกิดการสัมผัสกับวัตถุภายนอกหรือขอบเขตอื่น ก็จะทำให้เกิดความเค้นแบบอัดตัว (compressive stress) บนขอบเขต S_3 และไม่มีช่องว่างระหว่างขอบเขต S_3 กับวัตถุภายนอก ($g(x_k, t) = 0$) ส่วนบริเวณอื่นๆ ของขอบเขต S_3 ที่ไม่ได้สัมผัสกับวัตถุภายนอกก็จะเกิดช่องว่างขึ้น ($g(x_k, t) > 0$) และจะไม่เกิดความเค้นเนื่องจากการสัมผัสกัน (contact stress) จากรายละเอียดดังกล่าวข้างต้นสามารถเขียนเงื่อนไขขอบเขตอยู่ในรูปสมการทั่วไปได้ดังนี้

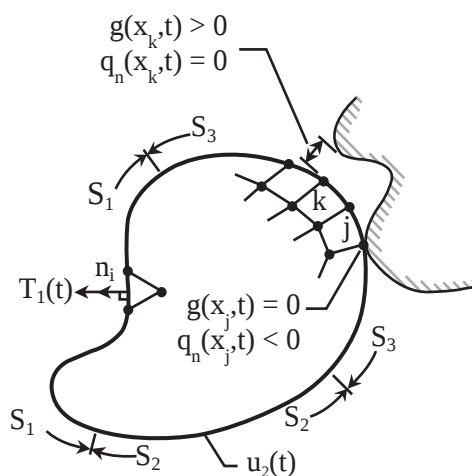
$$q_n(x, t) = q_c(x, t) n_i \quad 0 \quad (6ค)$$

$$g(x, t) = g(x) - u(x, t) n_i \quad 0 \quad (6ง)$$

โดย $q_c(x, t)$ คือ แรงเนื่องจากการสัมผัสกัน

$q_n(x, t)$ คือ แรงสัมผัสในทิศทางที่ตั้งฉากกับขอบเขต

$g(x, t)$ คือ ช่องว่างระหว่างขอบเขต S_3 กับวัตถุภายนอกหรือขอบเขตอื่น



รูปที่ 1 แสดงลักษณะเงื่อนไขขอบเขต

2.2 ทฤษฎีโฟโตอีลาสติกซิตี [2]

ทฤษฎีโฟโตอีลาสติกซิตีสามารถอธิบายได้ด้วยหลักการหักเหของแสงที่เกี่ยวข้องกับการศึกษา ลักษณะของคลื่นแสง ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยรูปแบบสมการฮาร์โมนิก (Harmonic waveform) ดังนี้

$$E = a \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\phi - \omega t) \quad (7)$$

โดย λ คือ แอมพลิจูดของคลื่น

ϕ คือ มุมเฟสของคลื่น E

ω คือ ความถี่เชิงมุม

t คือ เวลา

เมื่อคลื่นแสงเคลื่อนที่ผ่านแผ่นคลื่น (wave plate) ซึ่งทำหน้าที่กรองคลื่นแสงต่างๆ ไปที่มีทิศทางไม่แน่นอน ให้ผ่านออกจากแผ่นคลื่นอย่างมีระเบียบ มีรูปแบบและทิศทางที่ชัดเจน สำหรับแผ่นคลื่นที่ใช้ทดลองมีสมบัติหักเหแตกต่างกัน 2 แนวแกน (birefringent) จะทำให้เกิดการหน่วงช้า (retardation) เป็นผลให้คลื่นแสงที่ผ่านไปทั้ง 2 แนวแกนที่ตั้งฉากกันเกิดการเลื่อนมุมเฟสแบบเชิงเส้นสัมพันธ์ δ ดังนี้

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 = h(n_2 - n_1) \quad (8)$$

โดย δ_1, δ_2 คือ มุมเฟสของคลื่นแสงที่ผ่านแกน 1 และ 2

n_1, n_2 คือ ดัชนีหักเหเมื่อคลื่นแสงผ่านแกน 1 และ 2

h คือ ความหนาของแผ่นคลื่น

และมีการเลื่อนมุมเฟสแบบเชิงมุมสัมพันธ์ ดังนี้

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi h}{\lambda}(n_2 - n_1) \quad (9)$$

ถ้าแผ่นคลื่นถูกออกแบบให้ $\Delta = \frac{\pi}{2}$ จะเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า แผ่นคลื่นหนึ่งในสี่ส่วน (quarter-wave plate) ซึ่งเป็นแบบที่ใช้ แต่ถ้า $\Delta = \pi$ และ 2π จะเรียกว่า แผ่นคลื่นแบบครึ่งและเต็มคลื่น (half-and full-wave plates) ตามลำดับ

เมื่อวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นเกิดความเค้นขึ้นจะมีผลทำให้ค่าดัชนีการหักเหที่แต่เดิมมีค่าคงที่และเท่ากันตลอดทั้งชิ้นงาน เปลี่ยนแปลงค่าไปตามขนาดของความเค้นที่เกิดขึ้นตามความสัมพันธ์ดังนี้

$$n_2 - n_1 = c(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (10)$$

สมการที่ 10 ถูกเรียกว่า กฎของความเค้นและแสง (stress-optic law) โดย c คือสัมประสิทธิ์ความเค้นและแสงแบบสัมพันธ์ (relative stress-optic coefficient) ส่วน σ_1 และ σ_2 คือความเค้นหลักที่เกิดขึ้น เมื่อแทนสมการ (10) ลงใน (9) จะได้ว่า

$$\Delta = \frac{2\pi h c}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (11)$$

หรือเขียนใหม่ในรูปแบบดังนี้

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N f_\sigma}{h} \quad (12)$$

โดย

$$N = \frac{\Delta}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda} \quad \text{และ} \quad f_\sigma = \frac{\lambda}{c}$$

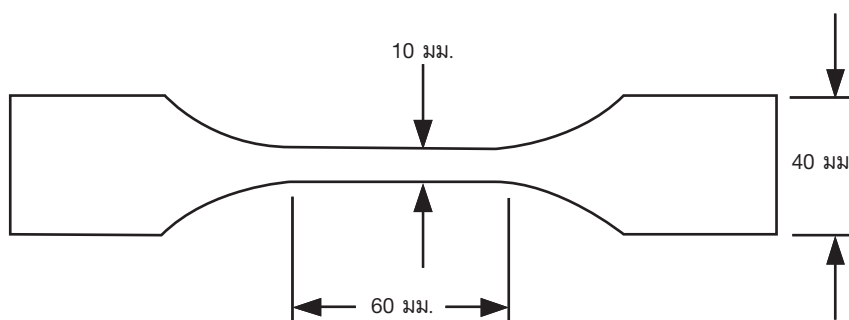
ค่า N คือ จำนวนรอบของการทวนซ้ำและนับด้วยอันดับของแถบแสง (fringe order)

f_g คือ ค่าคงที่เห็นแถบแสงของวัสดุ (material fringe value)

การหมุนแผ่นคลีนได้อย่างเหมาะสมจะทำให้การมองเห็นแถบแสงมีความชัดเจนมาก และเรียกรูปแบบของแถบแสงแสดงความแตกต่างของความเค้นหลักนี้ว่า แถบไอโซโครมาติก (Isocromatic fringe pattern)

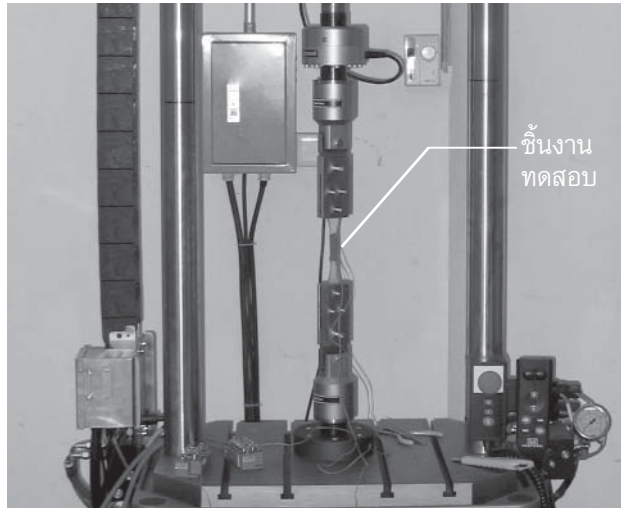
3. การเตรียมตัวอย่างและการทดสอบหาสมบัติวัสดุ [3]

ชิ้นงานโปร่งใสที่นำมาใช้ในงานวิจัยนี้ทำมาจากวัสดุอีพอกซีเรซิน โดยในปัญหาการตัดคานด้วยแรงกระทำ 4 จุด จะใช้ชิ้นงานรูปทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่สั่งซื้อจากต่างประเทศและมีสมบัติทางกลและทางแสงครบถ้วนจากผู้ผลิต ส่วนปัญหาการสัมผัสกันระหว่างโซ่และเฟืองนั้น ชิ้นงานมีความซับซ้อน จึงได้ทำการหล่อชิ้นงานขึ้นมา โดยใช้เรซินเบอร์ 5320 ซึ่งหาได้ง่ายในประเทศและราคาถูก จากนั้นทำการทดลองหาสมบัติทางกล โดยเริ่มต้นจากการหล่อชิ้นงานทดสอบเป็นรูปทรงกระดุกสุนัขตามมาตรฐาน ASTM D 638M - 83 ดังแสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 2 แสดงขนาดของชิ้นงานทดสอบในรูปทรงกระดุกสุนัข

เมื่อนำชิ้นงานทดสอบไปเข้าเครื่องทดสอบด้วยแรงดึง INSTRON 8872 ดังแสดงในรูปที่ 3 ผลที่ได้คือ คุณสมบัติทางกลต่างๆ ดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นเท่ากับ 950 MPa อัตราส่วนของปัวซองเท่ากับ 0.38 และความเค้นที่จุดคดากเท่ากับ 60 MPa ส่วนคุณสมบัติทางแสงหาได้จากการหล่อชิ้นงานรูปทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดเดียวกับปัญหาการตัดคานด้วยแรงกระทำ 4 จุด และทำการทดลองเช่นเดียวกับปัญหาดังกล่าว จากนั้นนำผลที่ได้มาคำนวณด้วยสมการ (12) ทำให้ได้ค่าสัมประสิทธิ์ความเค้นและแสงแบบสัมพันธ์เท่ากับ $3.66E-11 \text{ m}^2/\text{N}$



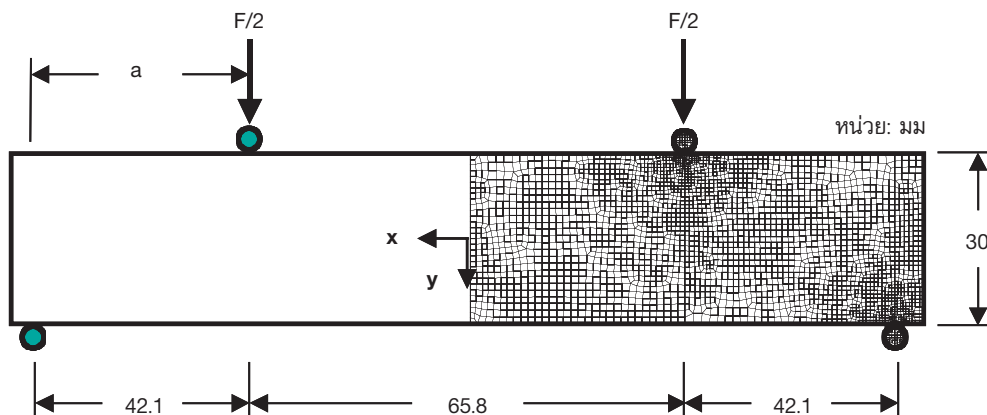
รูปที่ 3 แสดงการทดสอบแรงดึงด้วยเครื่อง INSTRON

4. การประยุกต์กับปัญหา

ปัญหาที่นำมาศึกษาการกระจายความเค้นด้วยการประยุกต์เทคนิคไฟโตอีลาสติกซิตีและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ มี 2 ตัวอย่าง คือปัญหาการตัดคานด้วยแรงกระทำ 4 จุด และปัญหาการสัมผัสกันระหว่างโซ่และเฟือง

4.1 ปัญหาการตัดคานด้วยแรงกระทำ 4 จุด

ลักษณะของปัญหาประกอบด้วยแผ่นเรียบโปร่งใส่ที่ทำมาจากอีพอกซีเรซินจากต่างประเทศ ขนาดชิ้นงานเท่ากับ 160 x 30 มม. วางอยู่บนฐานวงกลมที่ตำแหน่งปลายทั้งสองข้าง และมีแรงกดลงแนวดิ่ง 2 ตำแหน่ง ดังแสดงในรูปที่ 4



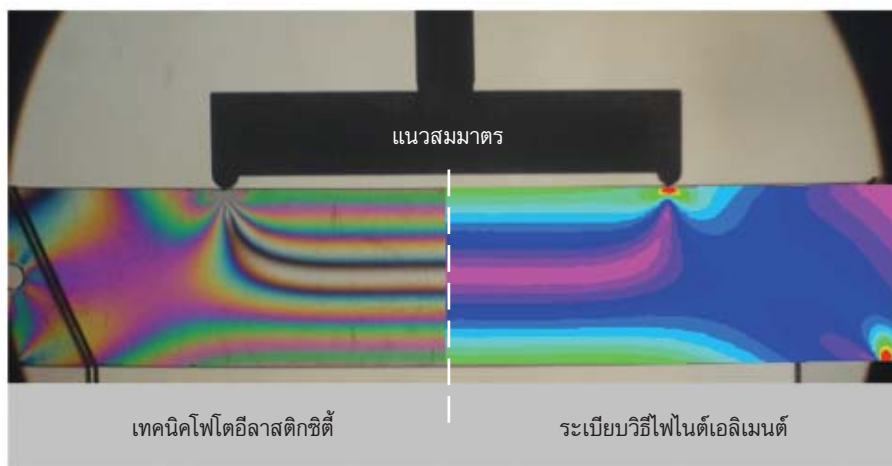
รูปที่ 4 แสดงลักษณะปัญหาการตัดคานด้วยแรงกระทำ 4 จุด

ภายใต้แรงกดด้านบนทั้งสองข้าง ทำให้เกิดพฤติกรรมการดัดเกิดขึ้นเป็นหลัก ค่าความเค้นที่เกิดขึ้นสามารถหาได้จากสมการ [4]

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (13)$$

โดย $M = \frac{Fa}{2}$, $I = \frac{h(30)^3}{12}$ และ h คือความหนาแผ่นเรียบ

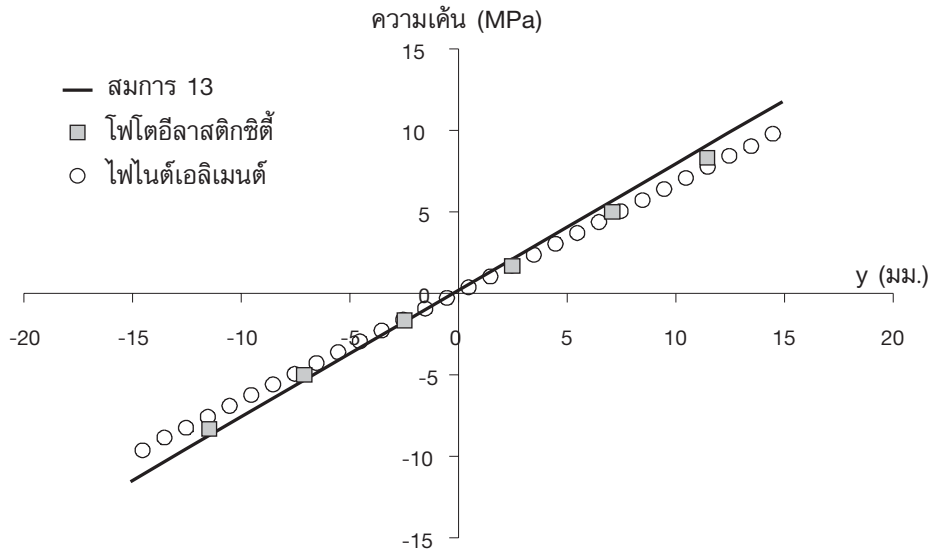
ลักษณะของปัญหานี้มีความสมมาตร ทำให้สามารถวิเคราะห์เพียงครึ่งหนึ่งได้ รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นมีจำนวน 3,071 จุดต่อและ 2,921 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 4 จากนั้นทำการหาลักษณะการกระจายความเค้นด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยใช้แรง F ขนาด 250 N และเปรียบเทียบผลที่ได้จากการทดลองด้วยเทคนิคโฟโตอีลาสติกซิตี



รูปที่ 5 การเปรียบเทียบผลการกระจายความเค้นจากเทคนิคโฟโตอีลาสติกซิตี และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

รูปที่ 5 แสดงการกระจายความเค้นที่เกิดขึ้นจากการประยุกต์เทคนิคโฟโตอีลาสติกซิตีในรูปด้านซ้าย ส่วนรูปด้านขวาแสดงผลการกระจายความเค้นที่ได้จากการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จากรูปจะเห็นว่าเมื่อแผ่นเรียบได้รับแรงกดจะเกิดการโก่งตัวลง ทำให้บริเวณขอบด้านล่างเกิดความเค้นดึง และบริเวณขอบด้านบนจะเกิดความเค้นอัดตัว การเปลี่ยนแปลงของความเค้นตลอดแนวสมมาตรจากขอบบนไปขอบล่างจะเปลี่ยนแปลงแบบเชิงเส้น ความเค้นจะมีค่าสูงและเปลี่ยนแปลงค่อนข้างมากในบริเวณที่แนวแรงกดสัมผัสกับแผ่นเรียบ

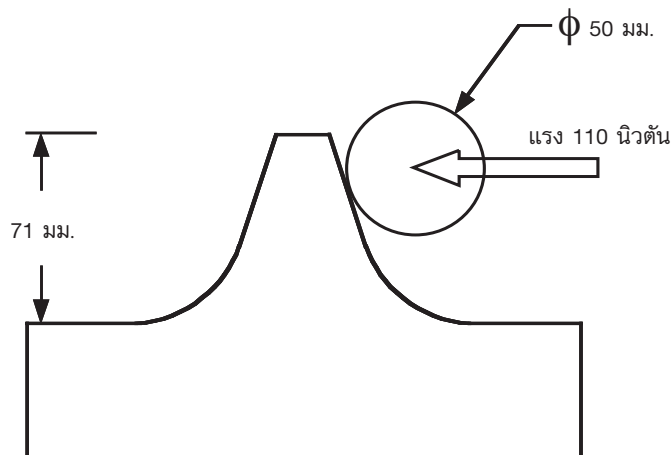
จากนั้นนำค่าความเค้นตลอดแนวสมมาตรตรงกลางแผ่นมาพล็อตเปรียบเทียบผลของทั้งสองเทคนิคกับสมการ 13 ดังแสดงในรูปที่ 6 พบว่าผลที่ได้จากทั้งสองเทคนิคมีความคลาดเคลื่อนกันประมาณร้อยละ 9 ค่าความคลาดเคลื่อนจะลดลง หากทำการจัดแบ่งเอลิเมนต์ตลอดแนวสมมาตรให้มีขนาดเล็กลง ซึ่งสามารถจัดแบ่งเอลิเมนต์ที่เหมาะสมโดยใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ [5]



รูปที่ 6 การเปรียบเทียบค่าความเค้นที่ได้กับระยะ y ในแนวสมมาตรตรงกลางแผ่น

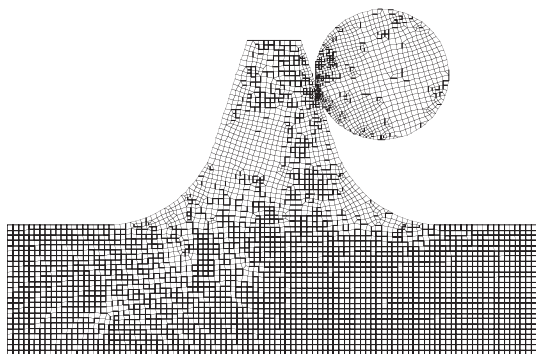
4.2 ปัญหาการสัมผัสกันระหว่างโซ่และเฟือง

ลักษณะของปัญหาหากพิจารณาโซ่และเฟืองทั้งหมด จะมีความซับซ้อนและใช้เวลาค่อนข้างมาก ในงานวิจัยนี้สนใจผลการสัมผัสกันของโซ่และเฟืองเท่านั้น จึงได้ทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยพิจารณาเพียง 1 ส่วนย่อยที่ประกอบด้วยฟันเฟือง 1 ฟัน และข้อโซ่ 1 ข้อ จากผลการทดลองด้วยวิธีโพลีเอทิลีนไกลคอล หากต้องการให้เห็นการกระจายความเค้นได้ดี ควรที่จะให้ข้อโซ่มีขนาดใหญ่ขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 7

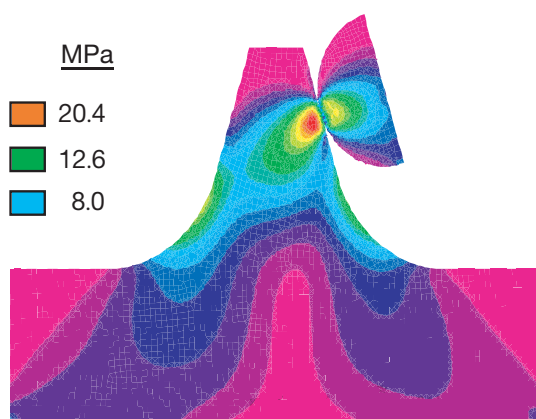


รูปที่ 7 แสดงลักษณะปัญหาการสัมผัสกันของโซ่และเฟือง

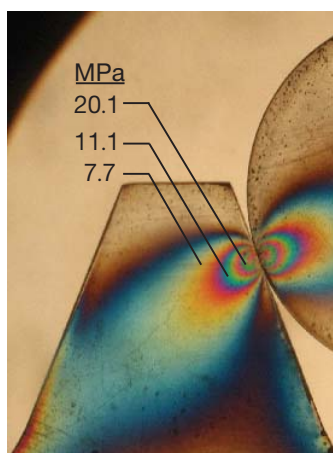
จากนั้นทำการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีจุดต่อ 4,817 จุดและ 4,615 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 8 ส่วนผลการกระจายความเค้นแสดงในรูปที่ 9 ส่วนในรูปที่ 10 แสดงการกระจายความเค้นที่ได้จากการทดลองด้วยวิธีโพลีเอทิลีนไกลคอล



รูปที่ 8 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหา



รูปที่ 9 ผลการกระจายความเค้นด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ 10 ผลการกระจายความเค้นด้วยวิธีโพโตอีลาสติซิตี

จากการเปรียบเทียบค่าความเค้นที่คำนวณได้จากทั้งระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีโพโตอีลาสติคซิติ พบว่ามีค่าสอดคล้องกัน และมีความคลาดเคลื่อนเท่ากับร้อยละ 1.5

5. สรุปผลการวิจัย

บทความนี้ได้กล่าวถึงการวิเคราะห์หาความเค้นของปัญหาทฤษฎีของแข็งใน 2 มิติด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และเทคนิคโพโตอีลาสติคซิติ โดยเริ่มจากการกล่าวถึงกลศาสตร์ของแข็งใน 2 มิติ รวมทั้งการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้อง และทฤษฎีโพโตอีลาสติคซิติ จากนั้นได้ทำการประยุกต์กับปัญหา 2 ตัวอย่าง คือ ปัญหาการตัดคานด้วยแรงกระทำ 4 จุด และปัญหาการสัมผัสกันระหว่างโซ่และเฟือง ผลการเปรียบเทียบความเค้นที่เกิดขึ้นของทั้ง 2 วิธี พบว่ามีความถูกต้องและใกล้เคียงกัน ผลที่ได้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ต่อไปในงานวิจัยระดับสูง เช่น การสีกหรือที่เกิดจากการเสียดสีระหว่างโซ่และเฟือง เป็นต้น หรือในงานการออกแบบและแก้ปัญหาด้านวิศวกรรม หรือในด้านอื่น ๆ เพื่อช่วยให้สามารถเห็นการกระจายความเค้นและเข้าใจพฤติกรรมที่เกิดขึ้นบนผลิตภัณฑ์ขณะใช้งานได้เป็นอย่างดี

6. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนจากสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.)

7. เอกสารอ้างอิง

1. ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 2542, *ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม*, พิมพ์ครั้งที่ 2, สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ, หน้า 197-216.
2. Dally, J. W. and Riley, W. F., 1991, *Experimental Stress Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill Singapore.
3. พันศักดิ์ พุทธาธรรมโชติ และพิริยะ รัตนประภาพันธ์, 2546, “การประยุกต์โพลาริสโคปและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาทฤษฎีของแข็ง”, *ปริญญานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต*, มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์, ปทุมธานี, หน้า 35-38.
4. Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., 1970, *Theory of Elasticity*, Third Edition, McGraw-Hill, Singapore, pp. 35-64.
5. Limtrakarn, W. and Dechaumphai, P., 2004, “Interaction of High-Speed Compressible Viscous Flow and Structure by Adaptive Finite Element Method,” *KSME International Journal*, Vol. 18 No. 10, pp. 1837-1848.