

## การคำนวณ Linearized Least Squares เพื่อหาพิกัดตำแหน่งใน 2 มิติ โดยอาศัยโปรแกรม Mathcad

บุญทรัพย์ วิชฌางกูร<sup>1</sup>

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต คลองหลวง ปทุมธานี 12121

และ พุทธิพล ดำรงชัย<sup>2</sup>

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ อ.เมือง จ.เชียงใหม่ 50200

รับเมื่อ 7 กรกฎาคม 2551 ตอรับเมื่อ 13 พฤศจิกายน 2551

### บทคัดย่อ

การศึกษานี้อาศัย Taylor series ประกอบการประยุกต์ใช้ Linearized Least Squares ในการแก้ปัญหาไม่เชิงเส้นที่มีจำนวนสมการมากกว่าจำนวนตัวแปร เพื่อคำนวณหาตำแหน่งในสองมิติจากตำแหน่งที่กำหนดให้ โดยได้ศึกษาผลการกระจายตัว (geometry) ของตำแหน่งที่กำหนดให้ในลักษณะต่างๆ ที่มีผลต่อความสามารถและความเร็วในการเข้าสู่ค่าพิกัดเฉลย ได้นำโปรแกรม Mathcad ที่เขียนขึ้นมาใช้เป็นเครื่องมือในการศึกษา ซึ่งสามารถใช้ได้ง่ายและสะดวกให้ผลลัพธ์ทันที

การศึกษานี้แสดงตัวอย่างการกระจายตัวของตำแหน่งที่กำหนดให้ใน 7 กรณี จากผลการศึกษาพบว่า กรณีจุดที่กำหนดให้มีพิกัดตำแหน่งกระจายรอบจุดที่ต้องการหา จะหาผลลัพธ์ได้เร็วกว่ากรณีอื่นๆ และมีความถูกต้องมาก ขณะที่กรณีจุดที่กำหนดมีพิกัดตำแหน่งกระจุกตัว และกรณีจุดที่กำหนดมีพิกัดตำแหน่งเรียงตัวเป็นวงกลมรอบจุดที่ต้องการหา มีปัญหามากที่สุด เพราะถ้าใช้ค่าพิกัดเริ่มต้น  $(x_0, y_0)$  ห่างจากค่าเฉลยมาก จะไม่สามารถหาพิกัดของจุดที่ต้องการหาได้เลย อันเป็นผลมาจาก singularity ที่แต่ละสมการสังเกตรณณ์มีความคล้ายกันมากนั่นเอง

**คำสำคัญ** : Linearized Least Squares / พิกัดตำแหน่ง / Mathcad / Taylor Series

<sup>1</sup> รองศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์

<sup>2</sup> อาจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์

## Computational Linearized Least Squares for 2D Positioning Using Mathcad<sup>®</sup> Programming

**Boonsap Witchayangkoon<sup>1</sup>**

Thammasat University, Rangsit Campus, Klong Luang, Pathum Thani, THAILAND, 12121

**and Puttipol Dumrongchai<sup>2</sup>**

Chiang Mai University, Muang District, Chiang Mai, THAILAND, 50200

*Received 7 July 2008 ; accepted 13 November 2008*

### Abstract

This study involves an application of linearized Least Squares through Taylor series to analyze 2D positions. The nonlinear system has mathematical models outnumbered the number of unknowns. In addition, this work studies the various effects of geometry of the given coordinates having impacts on convergence ability and on speed to reach respective solutions. The written Mathcad program is utilized as a study tool which is very easy to use. Moreover, when changing numerical values of parameters, Mathcad provides instant solutions.

Seven different geometry scenarios of the given coordinates are exemplified. The study results show that when given coordinates are highly distributed around the determined position, the solutions converge faster than any other cases, with high precision. On the other hand, when given coordinates are highly clustered or circularly distributed around the determined position, convergence is very problematic. This is true especially for the case when assumed values for initial solutions  $(x_0, y_0)$  are far away from exact solutions, thus producing solutions to diverge due mainly to singularity because of very similarity of the observed mathematical models.

**Keywords :** Linearized Least Squares / Positioning / Mathcad / Taylor Series

---

<sup>1</sup> Associate Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering.

<sup>2</sup> Lecturer, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering.

## 1 บทนำ

ประมาณช่วงปี ค.ศ.1800 นักวิทยาศาสตร์และนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ชื่อ Carl Friedrich Gauss ได้แนะนำหลักการพื้นฐานเกี่ยวกับเทคนิค Least Squares ซึ่งต่อมาได้มีการพัฒนาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาในศาสตร์ต่างๆ มากมาย

เทคนิค Least Squares ช่วยแก้ระบบปัญหา เมื่อมีจำนวนสมการมากกว่าจำนวนตัวแปร (ทั้งนี้เรียก ระบบปัญหาเชิงเส้น (system of linear equations) ที่มีจำนวนสมการมากกว่าจำนวนตัวแปรว่า over-determined systems อันเป็นผลมาจากระบบมีเงื่อนไขหรือข้อจำกัดมากเกินไปนั่นเอง (over-constraint)) ทั้งนี้ Least Squares พยายามหาค่าตอบที่เหมาะสมที่สุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (constrained optimization solutions) [1, 2]

อย่างไรก็ดี ปกติแล้วจะใช้เทคนิค Least Squares ในการแก้ปัญหาระบบเชิงเส้น (linear system) ถ้าระบบที่จำเป็นต้องแก้ปัญหาคือระบบสมการไม่เชิงเส้น (non-linear system) การแก้ปัญหาก็สามารถทำได้โดยอาศัยการแปลงส่วนที่เป็นไม่เชิงเส้นให้เป็นเชิงเส้น ทำได้โดยใช้ Taylor series expansion ซึ่งจะได้กล่าวถึงในหัวข้อ 6 และ 7

## 2 การทบทวนเอกสาร

วิธี Least square ได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในศาสตร์ต่างๆ มากมาย การคำนวณหาพิกัดตำแหน่งด้วยดาวเทียม GPS ก็ได้มีการประยุกต์ใช้หลักการนี้ (เช่น [1], [3]) วิธีการส่วนมากจะมีการปรับปรุงให้มีคุณสมบัติในแง่มุมใดแง่มุมหนึ่งที่ดีขึ้นโดยใช้เทคนิคผสมผสาน (เช่น [3]) โดยเป็นที่ทราบกันดีว่า การเรียงตัวของดาวเทียม (satellite geometry) มีผลต่อความสามารถในการหาค่าเฉลี่ย และระดับของความถูกต้องของค่าเฉลี่ย [4] ซึ่งปกติแล้วจะอาศัยดูจากค่า “ดัชนีการกระจายของความแม่นยำ (dilation of precision (DOP))” (เช่น [1], [4], [5]) ซึ่งค่า DOP ต่ำจะให้ค่าเฉลี่ยที่ดีกว่าค่า DOP มาก อย่างไรก็ตามค่า DOP

นี้ทำให้ทราบเพียงว่า ระบบการหาค่าเฉลี่ยดีหรือไม่ดี แต่มองไม่เห็นภาพที่ชัดเจนว่าตำแหน่งของดาวเทียมเรียงตัวอย่างไรจึงมีผลต่อการหาค่าเฉลี่ย

งานศึกษานี้ ถึงแม้จะเป็นการศึกษาพื้นฐาน (basic study) แต่ก็มีคุณค่าที่สำคัญเนื่องจากผลการศึกษายช่วยให้เห็นภาพผลกระทบของตำแหน่งที่กำหนดให้ที่มีต่อผลค่าเฉลี่ยที่ได้จากการวิเคราะห์อย่างชัดเจน (เมื่อเปรียบเทียบกับค่า DOP) ทั้งนี้ตำแหน่งที่กำหนดให้อาจเปรียบเทียบกับตำแหน่งของดาวเทียม และตำแหน่งที่ต้องการหาเป็นตำแหน่งของผู้ใช้ที่รับสัญญาณจากดาวเทียม โดยการศึกษาที่มุ่งแสดงในลักษณะสองมิติ

## 3 โปรแกรม Mathcad

โปรแกรม Mathcad ถือเป็นเครื่องมือที่ใช้เป็นมาตรฐานการคำนวณ การทำเอกสาร และการแบ่งปันวิธีการคำนวณ มีผู้นิยมใช้เป็นที่แพร่หลายประกอบด้วยวิศวกรและนักวิทยาศาสตร์ทั่วโลกเกือบ 2 ล้านคน มีฟังก์ชันต่างๆ (built-in function) ที่สะดวกต่อการใช้ [6] มีความสามารถในการแสดงสมการและสัญลักษณ์ต่างๆ ได้อย่างชัดเจน ทำให้การตรวจสอบความถูกต้องต่างๆ กระทำได้สะดวก รวดเร็ว สามารถทำการคำนวณทั้งแบบเชิงตัวเลขและเชิงสัญลักษณ์ การแสดงผลในลักษณะกราฟต่างๆ ทำได้ทั้ง 2 และ 3 มิติ โปรแกรม Mathcad มีส่วนที่คล้ายกับการเขียนโปรแกรมภาษาอื่นๆ ที่สำคัญการเรียนรู้เพื่อใช้งานทำได้ง่าย [7]

## 4 เทคนิค Least Squares

เทคนิค Least Squares ประกอบด้วยเงื่อนไขพื้นฐานที่สำคัญ 2 ประการ ได้แก่

ก) ผลรวมของ “เศษ (Residuals หรือ  $V$ ) ยกกำลังสอง มีค่าน้อยที่สุด” ซึ่งเป็นการประยุกต์หลักการกระจายตัวปกติ (normal distribution curve) นั่นเอง ในกรณีสำหรับข้อมูลที่มีน้ำหนักความน่าเชื่อถือเท่ากัน จะได้ [1, 2]

$$\sum_{i=1}^m (V_i)^2 = (V_1)^2 + (V_2)^2 + (V_3)^2 + \dots + (V_m)^2 = \text{minimum} \quad (1)$$

ข) การมีจำนวนสมการมากกว่าจำนวนตัวแปร ซึ่งเทคนิค Least Squares สามารถนำเอาข้อมูลทุกชุดที่มีให้มีส่วนร่วมในการแก้ระบบปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพ เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไข ก)

ซึ่งข้อมูลแบบจำลองเชิงเรขาคณิตของสมการไม่เชิงเส้น (geometrical non-linear math model) สามารถเขียนในรูปเมตริกได้ดังนี้

$$mV_1 = m A_n n \hat{X}_1 + m L_1 \quad (2)$$

โดยที่  $X = X_a - X_0$ ,  $\hat{X} = \hat{X}_a - X_0$ ,  $L = L_0 - L_b$  เมื่อ  $X_a$  เป็นค่าทางทฤษฎีของตัวแปร (theoretical values of parameters)

$X_0$  เป็นค่าโดยประมาณของตัวแปร (approximate values of parameters)

$\hat{X}_a$  เป็นค่าที่คำนวณหาได้จากการประมาณหรือ

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & b_m & c_m & \dots & n_m \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}_{m \times 1}, \quad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix}_{m \times 1} \quad (3)$$

ค่า  $X$  (ในกรณีของ Linearized least squares) สามารถหาได้จาก

$$\hat{X} = -(A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (4)$$

โดยที่  $P$  เป็น weighted matrix ซึ่งจะมีค่าเป็น Identity matrix ถ้าข้อมูลทุกตัวมีน้ำหนักเท่ากัน และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation หรือ  $S_0$ ) ของ unit weight (ไม่มีหน่วย) สามารถคำนวณได้จาก

$$S_0 = \sqrt{\frac{(V^T P V)}{d}} \quad (5)$$

โดยที่  $V = AX - L$  (จากสมการ (2))

ปรับแก้ (estimates or adjusted values of parameters)

$L_a$  เป็นค่าทางทฤษฎีของค่าที่สังเกต (theoretical values of observed quantities)

$L_b$  เป็นค่าสังเกตที่ได้จากการสังเกต (observed values of observables)

$L_0$  เป็นค่าประมาณของค่าสังเกตที่เกิดจากการใช้ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่กำลังพิจารณา

$A$  เป็นสัมประสิทธิ์ค่าที่สังเกต (observed coefficients)

$L$  เป็นความแตกต่างที่ได้จากการสังเกต (observed values)

$m$  = จำนวนสมการ (number of equations)

$n$  = จำนวนตัวแปร (number of unknowns)

$d$  = จำนวนระดับความอิสระ (number of degrees of freedom) =  $m - n$

### 5. ข้อดีที่เป็นประโยชน์ และข้อจำกัดของ Least-Squares

ประโยชน์ที่เห็นได้ชัดของเทคนิค Least Squares มีดังนี้

1. จากการสังเกตที่หลากหลายและผลการคำนวณ ทำให้ค่าที่เหมาะสมที่สุด (Probable values) คือ ดีกว่าค่าที่ได้จากการสังเกตเพียงค่าเดียว

2. เทคนิค Least Squares ให้ความแม่นยำ (precisions) ของค่าต่างๆ ที่ทำการปรับแก้

3. เทคนิค Least Squares ช่วยเปิดเผยให้เห็นความผิดปกติของข้อมูล เช่น ในกรณีที่มีความผิดพลาดขนาดใหญ่ (blunders) หรือความพลั้งเผลอ (mistakes) ที่รวมเรียกว่า outliers ผสมรวมอยู่ จะทำให้สามารถขจัดข้อมูลที่ไม่ดีทิ้งไป แล้วจึงทำการวิเคราะห์ใหม่

ถึงแม้เทคนิค Least Squares จะช่วยให้เห็น outliers แต่ตัวระบบ Least Squares กลับขาดความแกร่ง (non-robust) ซึ่งนับเป็นข้อจำกัด โดยเฉพาะเมื่อการกระจายตัวของ outliers มีลักษณะเขว (skew distribution) ทำให้ค่าเฉลี่ยที่ประมาณได้ผิดไปมาก ซึ่งจะมีผลกระทบมากในกรณีที่ทำการวิเคราะห์ต่อเนื่อง เพราะทำให้ระบบมีประสิทธิภาพลดลงและลู่เข้าสู่ค่าเฉลี่ยได้ช้า ทั้งนี้ในการศึกษานี้ไม่พิจารณากรณีนี้

$$f(x) [at x = a] = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} + \dots \quad (6)$$

ในกรณีที่  $a = 0$  การกระจายฟังก์ชันนี้จะเรียก Maclaurin series (real function จะมีช่วงอยู่ใน real number บางครั้งเรียก real-valued function)

## 7. Least Squares โดยทำให้เป็นเชิงเส้น (Linearized Least Squared)

ถ้าพิจารณาในหาค่าตำแหน่งในระบบสองมิติ โดยสมมติเป็นการหาค่าตำแหน่ง  $(x, y)$  จากตำแหน่งที่กำหนดให้  $(X^i, Y^i)$  (เช่น ตำแหน่งของระบบดาวเทียม) ซึ่งระยะทางระหว่างจุด 2 จุด (ตำแหน่งที่ต้องการหาและตำแหน่งดาวเทียมที่กำหนดให้) สามารถหาได้จาก

$$D^i = d^i + cdt \quad (7)$$

เมื่อ

$$d^i = \sqrt{(X^i - x)^2 + (Y^i - y)^2} \quad (8)$$

เมื่อ  $(x_0, y_0)$  เป็นพิกัดสมมติโดยประมาณของตำแหน่งที่กำลังพิจารณาหาอยู่ ขอให้พิจารณา partial derivatives แต่ละส่วน

## 6. Taylor Series ในการจัดการสมการไม่เชิงเส้น

Taylor series เป็นการกระจายฟังก์ชัน Non-linear รอบจุด สำหรับ Taylor series [8] ในหนึ่งมิติ (One dimensional) เป็นการกระจายของ real function  $f(x)$  รอบจุดที่  $x = a$  นั่นคือ

เป็นระยะ Euclidean distance ซึ่งเป็นระยะตรงระหว่างสองจุด และ  $cdt$  เป็นค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้น ทั้งนี้สมมติว่า ความผิดพลาดนี้มีขนาดเท่ากันในทุกระยะ  $D^i$  ที่สังเกตได้

โดยที่ผู้ทดสอบทราบระยะ  $D^i$  และตำแหน่งพิกัดของดาวเทียม  $i (i=1, 2, \dots, n)$  เป็น  $(X^i, Y^i)$  ทั้งนี้ ค่าที่ต้องการหาคือตำแหน่ง  $(x, y)$  รวมทั้งหาค่าความผิดพลาดของระบบ  $cdt$  ดังนั้นระบบจึงมีตัวแปร 3 ตัว  $(x, y, cdt)$  เพื่อแก้ปัญหาของระบบจึงต้องการอย่างน้อยสามสมการ ( $n \geq 3$ ) [ถ้าเป็นระบบ 3 มิติ จะมี 4 ตัวแปร  $(x, y, z, cdt)$  จึงต้องการอย่างน้อย 4 สมการ จากดาวเทียม 4 ดวง]

ก่อนอื่นต้องทำการแปลงส่วนที่เป็นไม่เชิงเส้น (non-linear)  $d^i$  ให้เป็นเชิงเส้น โดยอาศัย Taylor series (จะพิจารณาลำดับแรกเพียงส่วนเดียว (อนุพันธ์แรก) และตัดส่วนถัดไปทิ้ง (neglect higher-order term)) จากสมการ (6) จะได้ว่า

$$d^i(x_a, y_a) = d^i(x_0, y_0) + \frac{\partial d^i(x_0, y_0)}{\partial x}(x_a - x_0) + \frac{\partial d^i(x_0, y_0)}{\partial y}(y_a - y_0) + \dots \quad (9)$$

$$\frac{\partial d^i(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{x_0 - X^i}{d_0^i}$$

$$\frac{\partial d^i(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{y_0 - Y^i}{d_0^i} \quad (10)$$

การกระจายรอบจุด  $(x_0, y_0)$  แทนค่าส่วนต่างๆ จะได้

$$d^i(x_a, y_a) = d_0^i + \frac{x_0 - X^i}{d_0^i}(x_a - x_0) + \frac{y_0 - Y^i}{d_0^i}(y_a - y_0) + \dots \quad (11)$$

เมื่อใช้ฟังก์ชันโดยประมาณ  $(x_0, y_0)$  จะได้ระยะโดยประมาณจากดาวเทียมถึงจุดที่กำหนด

$$d_0^i = \sqrt{(X^i - x_0)^2 + (Y^i - y_0)^2} \quad (12)$$

และจาก (7) จะได้

$$D^i \cong d_0^i + \frac{x_0 - X^i}{d_0^i}x + \frac{y_0 - Y^i}{d_0^i}y + cdt$$

สามารถจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{x_0 - X^i}{d_0^i}x + \frac{y_0 - Y^i}{d_0^i}y + cdt \cong D^i - d_0^i \quad (13)$$

โดยที่  $\hat{X} = -(A^T P A)^{-1} A^T P L$

$L_0 = d_0^i$  และ  $L_b = D^i$  จะได้  $L = L_0 - L_b = d_0^i - D^i$

$$\text{จะได้} \quad A^i = \begin{bmatrix} \frac{x_0 - X^i}{d_0^i} & \frac{y_0 - Y^i}{d_0^i} & 1 \end{bmatrix}$$

ทั้งนี้เมตริก  $A$  จะมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนจุดที่กำหนดให้  $n$  และมีตัวแปร  $X = [x \quad y \quad cdt]^T$

## 8. การสร้างโปรแกรมในแผ่นงาน Mathcad

ในการคำนวณรูปเมตริก จำเป็นต้องกำหนดมิติเริ่มแรก (ORIGIN) เพื่อให้สะดวกต่อการใช้ โปรแกรมที่เขียนจึงได้เปลี่ยนค่าเริ่มที่ตั้งไว้จาก (0,0) เป็น (1,1) การกำหนดชื่อตัวแปรต่างๆ นั้น ตัวอักษรตัวใหญ่จะถูกตีความหมายต่างไปจากตัวอักษรตัวเล็ก นอกจากนั้น Mathcad ยังแยกความแตกต่างระหว่าง global variables และ local

variables และมีการนำเอา built-in function มาใช้ให้เกิดประโยชน์

ในการวิเคราะห์หาตำแหน่ง จะต้องรู้ข้อมูลพิกัดตำแหน่งของจุดที่กำหนดให้ พร้อมกับรู้ระยะทางถึงจุดที่ต้องการหา เพื่อความสะดวกในการเปรียบเทียบกับค่าเฉลย โปรแกรมจึงกำหนดว่า สมมติว่ารู้ตำแหน่งที่ต้องการหา เมื่อตำแหน่งจุดที่กำหนดให้ ก็จะสามารถรู้ระยะระหว่างจุดที่กำหนดให้และจุดที่ต้องการหา

ในการพิจารณานี้กำหนดให้มีจุดที่กำหนดให้ 4 จุด และได้กำหนดให้ความผิดพลาดระหว่างจุดที่กำหนดให้และจุดที่ต้องการหาเป็นตัวแปร  $cdt$  ซึ่งความผิดพลาดนี้ แบ่งได้เป็นสองกรณี กรณีแรก ไม่มีความผิดพลาด ซึ่งแสดงว่าระบบมีความสมบูรณ์มาก จึงมีความผิดพลาดเป็นศูนย์ กรณีที่สองมีความผิดพลาดสูง โดยใช้ built-in function “rnd(k)” ซึ่งจะให้ค่าสุ่มที่กระจายสม่ำเสมอระหว่างศูนย์และ k ในความเป็นจริงค่าความผิดพลาดนี้มีแนวโน้มเปลี่ยนแปลงตามเวลา ถ้าระบบมีเสถียรภาพค่าความผิดพลาดของระบบอาจแปรผันเชิงเส้นตามเวลาที่เปลี่ยนไป ซึ่งค่าความผิดพลาดอาจเกิดจากสาเหตุต่างๆ เช่น ระบบการจับเวลา (clock error) ที่สัญญาณเดินทางมายังเครื่องรับที่ไม่เที่ยงตรง ความหน่วงของฮาร์ดแวร์ระบบวงจรของเครื่องรับ (hardware delay) หรือ อาจเกิดจากสาเหตุอื่นๆ (random error) อย่างไรก็ตามค่าความผิดพลาดนี้จะมีขนาดเท่ากันในทุกค่าที่ได้จากการสังเกตที่จังหวะเวลา (epoch) เดียวกัน (โดยไม่พิจารณาผลกระทบเนื่องจากสหวิติ (multipath) อันเกิดจากการสะท้อนของสัญญาณภายใต้สิ่งแวดล้อมของจุดรับสัญญาณ)

```

Approximate distance between satellite and computed position
d0(S,x0,y0) :=  $\sqrt{(S_1 - x_0)^2 + (S_2 - y_0)^2}$ 

D(err) := | "Generate Observation Matrix + Error"
          | "Dis is the distance between the given point and the determined point"
          | Dis + rnd(err)

L-matrix
LL(x0,y0,D) := | "Generate L-matrix"
                | "L=L0 - Lb = d0- D"
                | for i ∈ 1.. NumberSat
                |   d0_matrixi ← d0(Sati,x0,y0)
                |   d0_matrix - D

Am(x0,y0) := | "Generate Matrix A [NumberSat x 3]"
              | for i ∈ 1.. NumberSat
              |    $A_{i,1} \leftarrow \frac{x_0 - (Sat_i)_1}{d_0(Sat_i, x_0, y_0)}$ 
              |    $A_{i,2} \leftarrow \frac{y_0 - (Sat_i)_2}{d_0(Sat_i, x_0, y_0)}$ 
              |   Ai,3 ← 1
              | A

Result(x0,y0,err) := | "Compute parameters and residuals using "Linearized LS""
                    | P ← 1
                    | Derr ← D(err)
                    | for i ∈ 1.. 5
                    |   A ← Am(x0,y0)
                    |   L ← LL(x0,y0,Derr)
                    |    $Xhat \leftarrow \left[ -(A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot (A^T \cdot P \cdot L) \right]$ 
                    |   x0 ← x0 + Xhat1
                    |   y0 ← y0 + Xhat2
                    |    $X_i \leftarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ Xhat_3 \end{pmatrix}$ 
                    |   A ← Am(x0,y0)
                    |   L ← LL(x0,y0,Derr)
                    |   V ← A · Xhat + L
                    |    $\begin{pmatrix} X^T \\ V \end{pmatrix}$ 

```

รูปที่ 1 โปรแกรมที่เขียนขึ้นใน Mathcad Worksheet เพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการศึกษา

จากรูปที่ 1 ฟังก์ชันวิเคราะห์ Result( $x_0, y_0, err$ ) ใช้ข้อมูลเวกเตอร์ Dis ซึ่งเป็นระยะระหว่างจุดที่กำหนดและจุดที่ต้องการหาโดยมีสมมติจุดเริ่มต้นการวิเคราะห์ที่ ( $x_0, y_0$ ) และ err เป็นช่วงที่ทำให้เกิดความผิดพลาดดังที่ได้กล่าวมาแล้ว การเขียนโปรแกรมเป็นไปตามแบบจำลองต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ที่ได้กล่าวไปก่อนหน้านี้ การศึกษานี้กำหนดให้โปรแกรมวนรอบ (iterations) จำนวน 5 ครั้ง ทั้งนี้สามารถแก้ตัวเลขการวนรอบได้ การคำนวณในส่วนของ Linearized Least Squares โดยใช้ค่าที่คำนวณได้ ( $x_0, y_0$ ) นำไปคำนวณใหม่ ผลการวิเคราะห์ประกอบด้วยเวกเตอร์ตัวแปร ( $x, y, cdt$ ) และเวกเตอร์เศษ (residuals)  $V$  ซึ่งเป็นผลต่างระหว่างค่าสังเกตและค่าที่ทำได้จากการวิเคราะห์ปรับแก้จากค่าที่คำนวณได้จากการวนรอบสุดท้าย (โปรแกรมที่เขียนขึ้นสามารถติดต่อขอรับได้ที่ผู้ศึกษา ตามที่อยู่ข้างต้น)

## 9. การประเมินเชิงตัวเลข (Numerical evaluation)

ในการศึกษานี้ได้ทำการประเมินเชิงตัวเลขใน 6 ลักษณะ โดยทุกลักษณะมีตำแหน่งที่กำหนดให้ 4 จุดเท่ากัน จากการวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมที่เขียนขึ้นทำให้สังเกตข้อดีข้อเสียของการกระจายของตำแหน่งที่กำหนดให้ที่มีต่อผลการวิเคราะห์ ทั้งนี้ พิกัดตำแหน่งของจุดที่กำหนดให้ เป็นแบบไม่เจาะจง (arbitrary chosen) แต่ทั้งนี้ได้กำหนดให้ค่าพิกัดเฉลี่ยอยู่ที่ (100, 50)

### 9.1 เมื่อตำแหน่งที่กำหนดให้กระจายอย่างสม่ำเสมอบนพากเดียวกัน

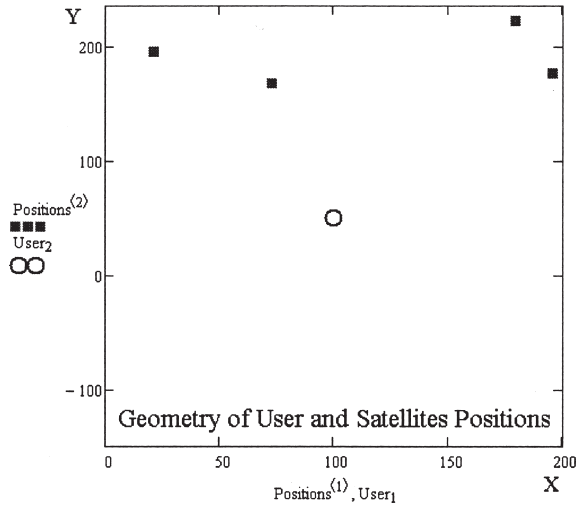
ในกรณีเมื่อตำแหน่งที่กำหนดให้มีการกระจายสม่ำเสมอบนด้านเดียวกัน (เช่น ด้านบนของจุดที่ต้องการหา) โดยมีพิกัดและระยะทางดังรูปที่ 1 และแสดงแผนผังของตำแหน่งในรูปที่ 2 ทั้งนี้ขออย่าว่าระยะทางจากจุดที่กำหนดให้ถึงจุดที่ต้องการหาในตารางยังไม่รวมค่าความผิดพลาดที่อาจจะเกิดขึ้น

$$\text{Sat}^T = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 179.2 \\ 222.6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 21.4 \\ 195.1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 72.8 \\ 168.3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 195.8 \\ 177.1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{Dis} = \begin{pmatrix} 189.904 \\ 165.021 \\ 121.387 \\ 159.16 \end{pmatrix}$$

รูปที่ 2 พิกัดตำแหน่งของจุดที่กำหนดให้ ( $X', Y'$ ) และระยะถึงจุดที่ต้องการหา





**รูปที่ 3** ตำแหน่งของจุดที่กำหนดให้ (จุดสี่เหลี่ยม) ซึ่งกระจายอยู่ด้านบนของจุดที่ต้องการหา (จุดวงกลม)

$$\begin{aligned}
 \text{Result}(000,000,0) &= \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} 115.055 \\ -10.176 \\ -28.114 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 94.879 \\ 74.167 \\ 24.571 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 99.448 \\ 53.177 \\ 3.21 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 99.992 \\ 50.059 \\ 0.059 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 2.012 \times 10^{-5} \end{array} \right) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0.05 \\ 0.056 \\ 0.059 \\ 0.042 \end{array} \right] \\
 \text{Result}(050,050,0) &= \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} 96.34 \\ 22.892 \\ -18.035 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100.551 \\ 53.797 \\ 3.888 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100.011 \\ 50.07 \\ 0.073 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 2.433 \times 10^{-5} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 2.787 \times 10^{-12} \end{array} \right) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 2.296 \times 10^{-5} \\ 1.846 \times 10^{-5} \\ 2.176 \times 10^{-5} \\ 2.118 \times 10^{-5} \end{array} \right] \\
 \text{Result}(100,100,0) &= \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} 100.201 \\ 62.334 \\ 12.608 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100.02 \\ 50.82 \\ 0.826 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50.004 \\ 3.698 \times 10^{-3} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 7.411 \times 10^{-8} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 7.011 \times 10^{-14} \end{array} \right) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 6.804 \times 10^{-8} \\ 6.34 \times 10^{-8} \\ 7.111 \times 10^{-8} \\ 6.043 \times 10^{-8} \end{array} \right] \\
 \text{Result}(000,000,1) &= \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} 115.055 \\ -10.176 \\ -27.594 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 94.879 \\ 74.167 \\ 25.091 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 99.448 \\ 53.177 \\ 3.73 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 99.992 \\ 50.059 \\ 0.579 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 0.52 \end{array} \right) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0.05 \\ 0.056 \\ 0.059 \\ 0.042 \end{array} \right] \\
 \text{Result}(050,050,1) &= \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} 96.34 \\ 22.892 \\ -17.159 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100.551 \\ 53.797 \\ 4.764 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100.011 \\ 50.07 \\ 0.949 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 0.876 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 0.876 \end{array} \right) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 2.296 \times 10^{-5} \\ 1.846 \times 10^{-5} \\ 2.176 \times 10^{-5} \\ 2.118 \times 10^{-5} \end{array} \right] \\
 \text{Result}(100,100,1) &= \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} 100.201 \\ 62.334 \\ 13.564 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100.02 \\ 50.82 \\ 1.782 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50.004 \\ 0.96 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 0.956 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 0.956 \end{array} \right) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 6.804 \times 10^{-8} \\ 6.34 \times 10^{-8} \\ 7.111 \times 10^{-8} \\ 6.043 \times 10^{-8} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

**รูปที่ 4** ผลการวิเคราะห์ที่ฟังก์ชัน Result ( $x_0, y_0, err$ )

รูปที่ 4 แสดงผลการวิเคราะห์ที่ตั้งแสดง โดยใช้ค่าเริ่มต้น  $(x_0, y_0)$  ที่แตกต่างกันไป โดยเมื่อค่าเริ่มต้นมีค่าใกล้ค่าเฉลย  $(x_a, y_a)$  มากกว่า จะใช้การวนรอบ Least Squares เพียง 2-3 รอบในการลู่เข้าสู่ (converge) ค่าเฉลย ขณะที่ถ้าใช้ค่าเริ่มต้นห่างจากค่าเฉลยมาก จะวนรอบนานกว่าเป็น 4-5 รอบ และเป็นที่น่าสังเกตว่าในส่วนที่มีการเพิ่มค่าความผิดพลาดเข้าไปในระยะทางระหว่างจุดที่กำหนดให้ถึงจุดที่ต้องการหา เช่น Result(0,0,1), Result(50,50,1) และ Result(100,100,1) ค่าเฉลยลู่เข้าสู่  $(\hat{x}_a, \hat{y}_a)$  ที่ค่าเดียวกัน แต่ลู่เข้าสู่  $cdt$  คนละค่ากัน ที่เป็นเช่นนั้นเพราะในแต่ละครั้งที่เรียกฟังก์ชัน  $rnd(err)$  จะให้ค่าที่แตกต่างกันไป ส่งผลให้ระยะทางระหว่างจุดที่กำหนดให้ถึงจุดที่ต้องการหา มีความผิดพลาดเนื่องจาก  $cdt$  มากบ้างน้อยบ้าง และให้ผลการวิเคราะห์ที่ตั้งที่เห็นนอกจากนั้นจากการเปรียบเทียบ

Result(0,0,1) กับ Result(0,0,0), Result(50,50,1) กับ Result(50,50,0) และ Result(100,100,1) กับ Result(100,100,0) จะพบว่าให้ค่าพิกัดเฉลยที่เหมือนกันในลำดับการวนรอบเดียว และความผิดพลาดไม่มีผลต่อพิกัดเฉลย และถ้าสังเกตเศษ  $V$  ซึ่งเป็นเวกเตอร์สุดท้ายก็จะพบว่า มีขนาดเดียวกันด้วยเช่นกัน จากผลดังกล่าวซึ่งได้แสดงให้เห็นว่าความผิดพลาดไม่มีผลต่อการวิเคราะห์ที่ตั้งนั้น ตัวอย่างการศึกษาต่อไปจึงพิจารณาเฉพาะกรณีที่มีความผิดพลาดลุ่มที่มากกว่าศูนย์

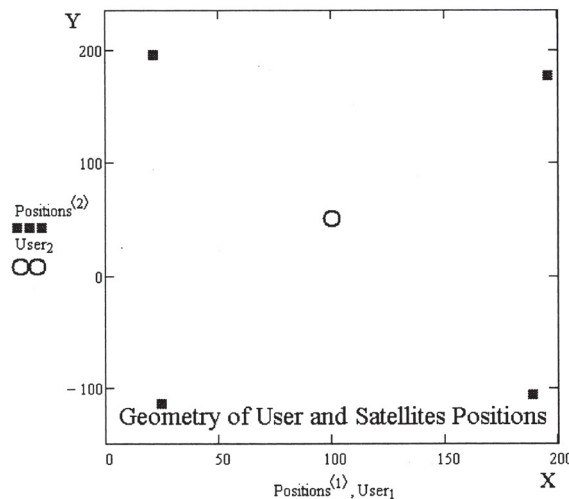
### 9.2 เมื่อตำแหน่งที่กำหนดให้กระจายอย่างสม่ำเสมอรอบจุดที่ต้องการหา

ในกรณีสมมติว่าจุดที่กำหนดให้กระจายรอบจุดที่ต้องการหา ดังรูปที่ 6 และมีพิกัดและระยะดังรูปที่ 5

$$\text{Sat}^T = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 21.4 \\ 195.1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 195.8 \\ 177.1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 24.5 \\ -114.2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 188.6 \\ -106.3 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{Dis} = \begin{pmatrix} 165.021 \\ 159.16 \\ 180.726 \\ 179.665 \end{pmatrix}$$

รูปที่ 5 พิกัดตำแหน่งของจุดที่กำหนดให้ และระยะถึงจุดที่ต้องการหา



รูปที่ 6 ตำแหน่งของจุดที่กำหนดให้ (จุดสี่เหลี่ยม) ซึ่งกระจายสม่ำเสมอรอบจุดที่ต้องการหา (จุดวงกลม)

$$\begin{aligned}
 \text{Result}(000,000,1) &= \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 125.96 \\ 59.34 \\ 36.55 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100.09 \\ 50 \\ 1.58 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.07 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.07 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.07 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} -2.89 \times 10^{-14} \\ -2.8 \times 10^{-14} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{Result}(050,050,1) &= \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 103.97 \\ 49.9 \\ 7.02 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.56 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.53 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.53 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.53 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{Result}(050,100,1) &= \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 95.05 \\ 48.38 \\ 6.62 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100.02 \\ 50 \\ 0.85 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.8 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{Result}(100,050,1) &= \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.14 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{Result}(100,100,1) &= \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 98.8 \\ 48.17 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.41 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.4 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{Result}(100,150,1) &= \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 93.94 \\ 30.78 \\ 20.9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.86 \\ 50.01 \\ 0.47 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.14 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{Result}(100,200,1) &= \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 90.97 \\ -61.78 \\ 112.65 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 91.19 \\ 65.37 \\ 18.91 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.69 \\ 49.91 \\ 0.9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.57 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.57 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} -2.08 \times 10^{-5} \\ 3.07 \times 10^{-5} \\ -2.21 \times 10^{-5} \\ 2.16 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \\
 \text{Result}(150,150,1) &= \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 114.73 \\ 34.08 \\ 20.08 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.91 \\ 49.96 \\ 1.23 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.55 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.55 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.55 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} 6.88 \times 10^{-15} \\ -7.55 \times 10^{-15} \\ -8.33 \times 10^{-15} \\ -1.97 \times 10^{-14} \end{pmatrix} \\
 \text{Result}(200,150,1) &= \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 104.45 \\ 30.87 \\ 34.05 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.92 \\ 49.98 \\ 0.62 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.31 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.31 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.31 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.89 \times 10^{-14} \\ -2.79 \times 10^{-14} \end{pmatrix} \\
 \text{Result}(200,200,1) &= \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} -97.32 \\ -83.25 \\ 285.77 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 584.41 \\ 387.77 \\ 572.57 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1.11 \times 10^3 \\ 488.12 \\ -909.03 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1.69 \times 10^3 \\ 476.75 \\ -1.46 \times 10^3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4.29 \times 10^3 \\ 987.74 \\ -4.11 \times 10^3 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} 2.71 \times 10^3 \\ 2.55 \times 10^3 \\ 2.76 \times 10^3 \\ 2.6 \times 10^3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

รูปที่ 7 ผลการวิเคราะห์เมื่อตำแหน่งที่กำหนดให้กระจายสม่ำเสมอ

จากผลการวิเคราะห์ในรูปที่ 7 พบว่าในทุกกรณี ผลลัพธ์ลู่เข้าสู่ค่าเฉลยอย่างรวดเร็วโดยใช้การวนรอบใน Least Squares เพียง 2 รอบเท่านั้น อันจะเห็นได้ว่าผลของการกระจายตัวของจุดที่กำหนดให้มีผลอย่างยิ่งต่อความเร็วในการลู่สู่ค่าเฉลย และจะเห็นได้ว่าความผิดในระยะทางจากจุดที่กำหนดถึงจุดที่ต้องการหา ไม่มีผลต่อความสามารถที่รวดเร็วในการลู่เข้าสู่ค่าเฉลย

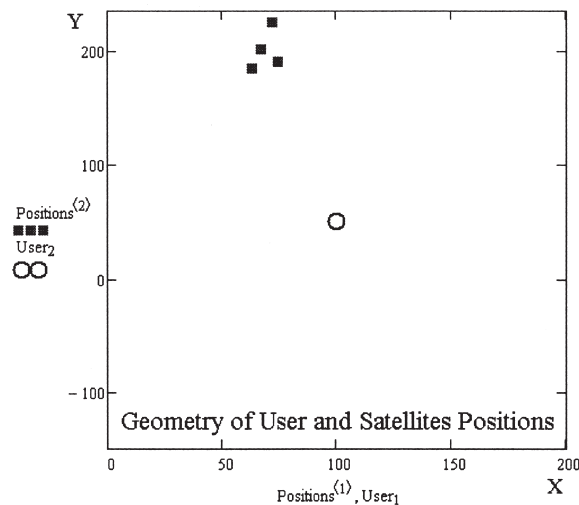
$$\text{Sat}^T = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 63.2 \\ 185.1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 67.1 \\ 201.5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 72.4 \\ 225 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 74.6 \\ 190.2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{Dis} = \begin{pmatrix} 140.022 \\ 155.031 \\ 177.163 \\ 142.482 \end{pmatrix}$$

### 9.3 เมื่อตำแหน่งที่กำหนดให้กระจุกตัวอยู่ใกล้กัน

การศึกษานี้ได้ทดลองต่อไปในกรณีที่จุดที่กำหนดให้มีพิภักที่ใกล้กันมาก ดังรูปที่ 8 และ 9 โดยมีผลการวิเคราะห์ดังรูปที่ 10

รูปที่ 8 พิกัดตำแหน่งของจุดที่กำหนดให้  $(X', Y')$  ที่ค่อนข้างกระจุกตัว และระยะถึงจุดที่ต้องการหา



รูปที่ 9 ตำแหน่งของจุดที่กำหนดให้ (จุดสี่เหลี่ยม) มีลักษณะกระจุกตัว และจุดที่ต้องการหา (จุดวงกลม)

Result(000,000,1) = ■  
 This matrix is singular. Cannot compute its inverse.

Result(050,050,1) = ■  
 This matrix is singular. Cannot compute its inverse.

Result(050,100,1) =  
 This matrix is singular. Cannot compute its inverse.

$$\text{Result}(100,050,1) = \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 8.923 \times 10^{-3} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 8.923 \times 10^{-3} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 8.923 \times 10^{-3} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 8.923 \times 10^{-3} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 8.923 \times 10^{-3} \end{array} \right) \end{array} \right] \begin{pmatrix} -2.166 \times 10^{-11} \\ -1.962 \times 10^{-11} \\ -1.732 \times 10^{-11} \\ -1.824 \times 10^{-11} \end{pmatrix}$$

$$\text{Result}(100,100,1) = \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} 100.472 \\ 66.733 \\ 17.111 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100.119 \\ 51.863 \\ 2.38 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100.003 \\ 50.021 \\ 0.553 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 0.532 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 0.532 \end{array} \right) \end{array} \right] \begin{pmatrix} 1.244 \times 10^{-6} \\ 1.31 \times 10^{-6} \\ 1.379 \times 10^{-6} \\ 1.352 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$\text{Result}(100,100,1) = \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} 100.472 \\ 66.733 \\ 17.181 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100.119 \\ 51.863 \\ 2.45 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100.003 \\ 50.021 \\ 0.623 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 0.602 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50 \\ 0.602 \end{array} \right) \end{array} \right] \begin{pmatrix} 1.244 \times 10^{-6} \\ 1.31 \times 10^{-6} \\ 1.379 \times 10^{-6} \\ 1.352 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$\text{Result}(100,150,1) = \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} 105.285 \\ 109.367 \\ 57.833 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 106.549 \\ 65.291 \\ 14.766 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 102.901 \\ 44.913 \\ -4.773 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100.068 \\ 49.487 \\ 0.034 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 100 \\ 50.002 \\ 0.542 \end{array} \right) \end{array} \right] \begin{pmatrix} -0.515 \\ -0.518 \\ -0.519 \\ -0.519 \end{pmatrix}$$

$$\text{Result}(150,150,1) = \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} 225.275 \\ 32.138 \\ -66.193 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 394.836 \\ -294.077 \\ -429.172 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 901.668 \\ -1.391 \times 10^3 \\ -1.632 \times 10^3 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 2.534 \times 10^3 \\ -5.402 \times 10^3 \\ -5.953 \times 10^3 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} -979.046 \\ -129.179 \\ 275 \end{array} \right) \end{array} \right] \begin{pmatrix} 3.064 \times 10^3 \\ 2.977 \times 10^3 \\ 2.853 \times 10^3 \\ 3.066 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Result(200,150,1) = ■  
 This matrix is singular. Cannot compute its inverse.

Result(200,200,1) = ■  
 This matrix is singular. Cannot compute its inverse.

รูปที่ 10 ผลการวิเคราะห์เมื่อตำแหน่งที่กำหนดให้กระจุกตัวอยู่ใกล้กัน

ผลการวิเคราะห์นี้เป็นที่น่าสนใจแต่อาจไม่เป็นที่น่าสนใจแปลกใจ ทั้งนี้ด้วยเหตุว่า การที่ตำแหน่งที่กำหนดให้กระจุกตัว (clustered) ส่งผลให้สมการสังเกตการณ์ (observation model) ที่เกิดจากจุดที่ต้องการหาและจุดที่กำหนดให้ ทำให้เกือบจะเป็นสมการเดียวกัน ส่งผลให้ไม่สามารถแก้สมการ อันเป็นผลมาจากการที่ไม่สามารถหาอินเวอร์สได้ เป็นผลต่อเนื่องจากการที่ไม่สามารถหา

ดีเทอร์มิแนนท์ (determinant) ได้ เพราะเป็น singular matrix

อย่างไรก็ตาม เมื่อทดลองใช้ค่าเริ่มต้น  $(x_0, y_0)$  ที่แตกต่างกัน พบว่า ค่าเริ่มต้นที่เข้าใกล้ค่าที่กักเฉลย สามารถคำนวณต่อและให้ผลลัพธ์ดังที่แสดงในรูป ในทางกลับกัน เมื่อทดลองใช้ค่าเริ่มต้นที่เข้าใกล้จากค่าที่กักเฉลย ผลลัพธ์จะลู่ออก (diverge) หรือไม่สามารถหาคำตอบได้

จากผลการทดลองเป็นที่น่าสนใจว่า เมื่อใช้ค่าเริ่มต้นที่ (100,100) สามารถหาผลลัพธ์ได้ ขณะที่ใช้ค่าเริ่มต้น (50, 50) กลับไม่สามารถหาผลลัพธ์ได้ ทั้งนี้เป็นเพราะในกรณีนี้ อันสังเกตได้จากตำแหน่งของจุดที่กำหนดให้ว่ามีระยะห่างจากจุดที่ต้องการหา โดยห่างทาง x น้อยกว่า y มาก ดังนั้นด้าน x จึงอ่อนไหวกว่า y และทำให้มีผลต่อการวิเคราะห์ดังกล่าว

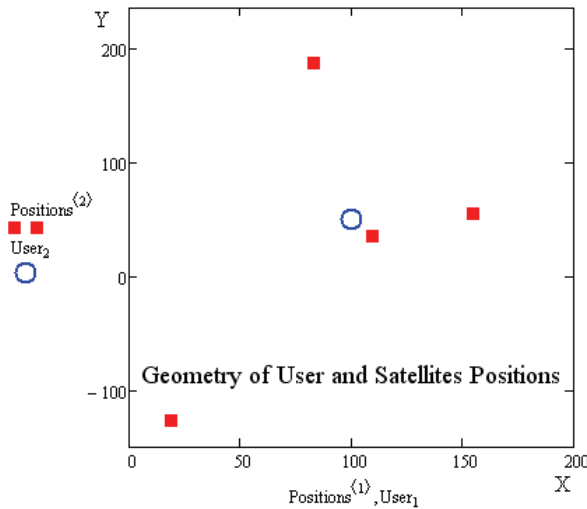
### 9.4 เมื่อตำแหน่งที่กำหนดให้มีลักษณะกระจายไม่สม่ำเสมอ

ในกรณีนี้เป็นการทดลองศึกษาผลกระทบที่มีต่อลักษณะที่จุดที่กำหนดให้มีการกระจายตัวที่ไม่สม่ำเสมอ ซึ่งสามารถสังเกตได้ง่ายจากระยะทาง Dis ที่แตกต่างกัน ดังรูปที่ 11

$$\text{Sat}^T = \begin{bmatrix} (109.2) & (154.6) & (82.8) & (18.6) \\ (35.6) & (55.1) & (187.3) & (-126.3) \end{bmatrix}$$

$$\text{Dis} = \begin{pmatrix} 17.09 \\ 54.84 \\ 138.37 \\ 194.18 \end{pmatrix}$$

รูปที่ 11 พิกัดตำแหน่งของจุดที่กำหนดให้  $(X^i, Y^i)$  ที่กระจายตัวไม่สม่ำเสมอ และระยะถึงจุดที่ต้องการหา



รูปที่ 12 ตำแหน่งของจุดที่กำหนดให้ที่กระจายตัวไม่สม่ำเสมอ (จุดสี่เหลี่ยม 4 จุด) และจุดที่ต้องการหา (จุดวงกลม)

$$\text{Result}(000,000,1) = \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 125.78 \\ 52.84 \\ 33.33 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 104.09 \\ 51.52 \\ 4.11 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.94 \\ 50.15 \\ 0.84 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.71 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.71 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -5.53 \times 10^{-5} \\ -1.11 \times 10^{-4} \\ 8.61 \times 10^{-6} \\ 5.12 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

$$\text{Result}(050,050,1) = \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 105.15 \\ 48.03 \\ 8.01 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.93 \\ 50.15 \\ 0.46 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -7.21 \times 10^{-11} \\ -3.4 \times 10^{-11} \\ 6.46 \times 10^{-11} \\ -3.79 \times 10^{-11} \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

$$\text{Result}(050,100,1) = \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 106.8 \\ 43.66 \\ 12.85 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.64 \\ 50.17 \\ 0.39 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.09 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.09 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.09 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1.02 \times 10^{-10} \\ -2.49 \times 10^{-10} \\ -5.6 \times 10^{-12} \\ 1.36 \times 10^{-10} \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

$$\text{Result}(100,050,1) = \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.15 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.15 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.15 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.15 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.15 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

$$\text{Result}(100,100,1) = \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 85.7 \\ 49.86 \\ 4.31 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.81 \\ 50.16 \\ 1.64 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.99 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.99 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.99 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -4.01 \times 10^{-11} \\ -1.64 \times 10^{-11} \\ 3.71 \times 10^{-11} \\ -2.34 \times 10^{-11} \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

$$\text{Result}(100,150,1) = \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 61.17 \\ 41.86 \\ 15.85 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100.91 \\ 49.34 \\ 4.18 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.12 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.12 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.12 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1.25 \times 10^{-8} \\ -6.08 \times 10^{-9} \\ 1.11 \times 10^{-8} \\ -6.41 \times 10^{-9} \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

$$\text{Result}(150,150,1) = \left[ \begin{array}{cccccc} \begin{pmatrix} -39.49 \\ -36.56 \\ 137.14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 183.05 \\ 90.48 \\ 102 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -30.51 \\ 51.42 \\ 125.76 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 177.91 \\ 34.67 \\ 82.14 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 174.94 \\ 19.35 \\ -25.82 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 97.93 \\ 31.68 \\ 28.64 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 93.13 \\ 51.49 \\ 2.42 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.97 \\ 50.06 \\ 0.62 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.46 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.46 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -8.01 \times 10^{-6} \\ -1.81 \times 10^{-5} \\ 2.4 \times 10^{-7} \\ 9.39 \times 10^{-6} \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

**Result(100,200,1) = ■**  
This matrix is singular. Cannot compute its inverse.

**Result(200,150,1) = ■**  
This matrix is singular. Cannot compute its inverse.

**Result(200,200,1) = ■**  
This matrix is singular. Cannot compute its inverse.

รูปที่ 13 ผลการวิเคราะห์เมื่อดำหนดให้กระจายตัวไม่สม่ำเสมอ

จากผลการวิเคราะห์ เมื่อเปรียบเทียบกับกรณีจุดที่กำหนดให้กระจายตัวสม่ำเสมอ พบว่า เมื่อตำแหน่งที่กำหนดให้กระจายตัวไม่สม่ำเสมอ ผลลัพธ์จะเข้าสู่พิกัดเฉลี่ยข้างลงประมาณ 1-2 รอบของการวนรอบ อย่างไรก็ตาม เมื่อสังเกตผลการวิเคราะห์พบว่าระบบมีความอ่อนไหวทาง x และ y พอๆ กัน ทำให้ความสามารถในการเข้าสู่พิกัดเฉลี่ยใกล้เคียงกัน อย่างไรก็ตามตัวอย่างในกรณีนี้ มีจุดหนึ่งที่อยู่ใกล้พิกัดเฉลี่ยมาก ทำให้เสมือนว่ามีจุดที่กำหนดเพียง 3 จุด แทนที่จะเป็น 4 จุด นอกจากนี้ค่าเริ่มต้นที่

ไกลจากพิกัดเฉลี่ยมากจะทำให้เกิดการลู่ออกจนไม่สามารถหาค่าเฉลี่ยที่ถูกต้องได้

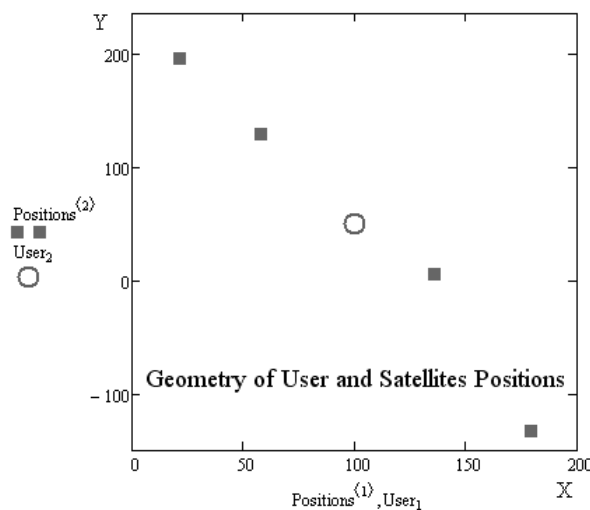
### 9.5 เมื่อตำแหน่งที่กำหนดให้ เรียงตัวอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกับจุดที่ต้องการหา

เมื่อทดลองสุ่มจัดให้จุดที่กำหนดให้กระจายตัวในแนวเส้นตรงเดียวกันกับจุดที่ต้องการหา โดยมีพิกัดและระยะดังแสดงในรูปที่ 14 และ 15

$$\text{Sat}^T = \begin{bmatrix} (21.4) & (57.8) & (135.8) & (179.2) \\ (195.1) & (128.3) & (5.1) & (-132.6) \end{bmatrix}$$

$$\text{Dis} = \begin{pmatrix} 165.02 \\ 88.95 \\ 57.43 \\ 199.04 \end{pmatrix}$$

รูปที่ 14 พิกัดตำแหน่งของจุดที่กำหนดให้ ( $X^i, Y^i$ ) ที่กระจายตัวในแนวเส้นตรงเดียวกับจุดที่ต้องการหา และระยะถึงจุดที่ต้องการหา



รูปที่ 15 ตำแหน่งของจุดที่กำหนดให้ที่เรียงตัวเป็นแนวเส้นตรง (จุดสี่เหลี่ยม 4 จุด) และจุดที่ต้องการหา (จุดวงกลม)



$$\begin{aligned}
 \text{Result}(000,000,1) &= \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 105.41 \\ 48.02 \\ 31.18 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.82 \\ 49.91 \\ 0.19 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.12 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.12 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.12 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} 6 \times 10^{-11} \\ 2.31 \times 10^{-11} \\ -3.12 \times 10^{-9} \\ 1.46 \times 10^{-9} \end{pmatrix} \\
 \text{Result}(050,050,1) &= \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 93.83 \\ 43.11 \\ 5.47 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 98.63 \\ 49.29 \\ 1.05 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.96 \\ 49.98 \\ 0.84 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.83 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.83 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} 1.91 \times 10^{-7} \\ 7.28 \times 10^{-8} \\ -9.94 \times 10^{-6} \\ 4.64 \times 10^{-6} \end{pmatrix} \\
 \text{Result}(050,100,1) &= \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 68.57 \\ 32.07 \\ -2.47 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 92.76 \\ 45.9 \\ 3.01 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.02 \\ 49.47 \\ 0.73 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.98 \\ 49.99 \\ 0.52 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.52 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} 8.11 \times 10^{-5} \\ 2.43 \times 10^{-5} \\ -4.78 \times 10^{-3} \\ 2.26 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \\
 \text{Result}(100,050,1) &= \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.43 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.43 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.43 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.43 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.43 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{Result}(100,100,1) &= \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 122.35 \\ 61.83 \\ -0.91 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 119.49 \\ 60.74 \\ -0.95 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 112.69 \\ 57.12 \\ 0.52 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 94.69 \\ 47.27 \\ 2.72 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.46 \\ 49.71 \\ 1.07 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} 0.23 \\ 0.2 \\ -0.89 \\ 0.39 \end{pmatrix} \\
 \text{Result}(100,150,1) &= \left[ \begin{array}{cccccc} \begin{pmatrix} 201.29 \\ 113.21 \\ -30.95 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 132.92 \\ 63.43 \\ 9.15 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 128.53 \\ 65.48 \\ -3.54 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 125.78 \\ 64.03 \\ -2.7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 123.83 \\ 63.02 \\ -2.18 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 121.79 \\ 61.95 \\ -1.64 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 118.54 \\ 60.23 \\ -0.86 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 109.44 \\ 55.38 \\ 0.98 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 96.34 \\ 48.07 \\ 1.74 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.72 \\ 49.85 \\ 0.87 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.09 \\ -0.62 \\ 0.32 \end{pmatrix} \\
 \text{Result}(100,200,1) &= \left[ \begin{array}{cccccc} \begin{pmatrix} 310.33 \\ 227.62 \\ -125.05 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1.41 \\ -92.22 \\ 221.75 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 79.23 \\ 83 \\ 55.06 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.95 \\ 49.96 \\ 0.28 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.21 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.21 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.21 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.21 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.21 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.21 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{Result}(150,150,1) &= \left[ \begin{array}{cccccc} \begin{pmatrix} 176.6 \\ 81.43 \\ -17.36 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 139.96 \\ 72.34 \\ -4.79 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 130.45 \\ 66.41 \\ -4.01 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 126.82 \\ 64.57 \\ -3.24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 124.67 \\ 63.45 \\ -2.65 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 122.76 \\ 62.46 \\ -2.15 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 120.26 \\ 61.15 \\ -1.52 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 114.95 \\ 58.33 \\ -0.33 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 97.27 \\ 48.75 \\ 2.43 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.85 \\ 49.92 \\ 0.59 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} 0.23 \\ 0.23 \\ -0.64 \\ 0.06 \end{pmatrix} \\
 \text{Result}(200,150,1) &= \left[ \begin{array}{cccccc} \begin{pmatrix} 140.19 \\ 51.46 \\ 16.59 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 134.44 \\ 68.43 \\ -5.99 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 128.56 \\ 65.47 \\ -3.98 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 125.81 \\ 64.04 \\ -3.27 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 123.85 \\ 63.03 \\ -2.74 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 121.82 \\ 61.96 \\ -2.2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 118.59 \\ 60.26 \\ -1.43 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 109.64 \\ 55.49 \\ 0.39 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 96.19 \\ 47.99 \\ 1.24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.7 \\ 49.84 \\ 0.32 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} 0.11 \\ 0.09 \\ -0.64 \\ 0.33 \end{pmatrix} \\
 \text{Result}(200,200,1) &= \left[ \begin{array}{cccccc} \begin{pmatrix} 170.19 \\ 38.47 \\ 23.37 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 162.36 \\ 83.18 \\ -16.86 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 136.11 \\ 69.21 \\ -4.59 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 129.21 \\ 65.81 \\ -4.38 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 126.18 \\ 64.23 \\ -3.62 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 124.16 \\ 63.19 \\ -3.07 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 122.19 \\ 62.16 \\ -2.55 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 119.3 \\ 60.64 \\ -1.84 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 112.07 \\ 56.79 \\ -0.31 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 94.72 \\ 47.26 \\ 1.63 \end{pmatrix} \\ \end{array} \right] \begin{pmatrix} 2.46 \\ 3.21 \\ 8.35 \\ 0.06 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

รูปที่ 16 ผลการคำนวณเมื่อตำแหน่งที่กำหนดให้ เรียงตัวอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกับจุดที่ต้องการหา

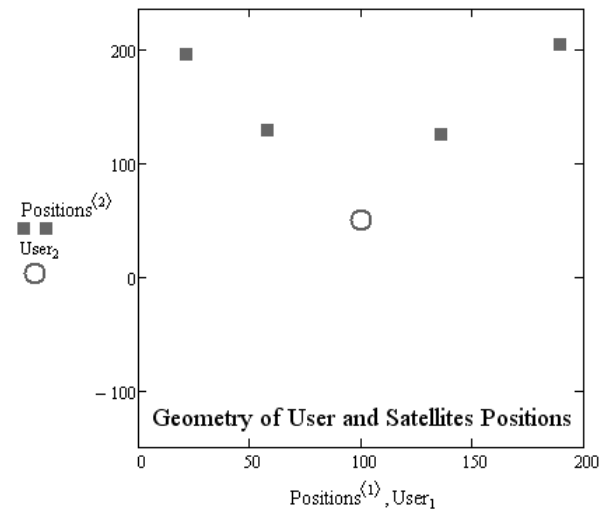
จากผลการวิเคราะห์ที่ตั้งแสดงในรูปที่ 16 ซึ่งเป็นกรณีจุดที่กำหนดให้ที่เรียงตัวเป็นแนวเส้นตรงเดียวกับจุดที่ต้องการหา พบว่า ใช้ค่าเริ่มต้น  $(x_0, y_0)$  ที่ห่างไกลจากพิกัดเฉลยมากขึ้น การลู่เข้าสู่พิกัดเฉลยมีแนวโน้มที่จำเป็นต้องวนรอบการคำนวณมากขึ้นเป็นลำดับ

**9.6 เมื่อตำแหน่งที่กำหนดให้ เรียงเป็นรูปตัววี เมื่อมองจากจุดที่ต้องการหา**  
เมื่อทดลองลู่ค่าจุดที่กำหนดให้กระจายตัวในลักษณะตัววี โดยมีลักษณะ พิกัดและระยะดังแสดงในรูปที่ 17 และ 18

$$\text{Sat}^T = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 21.4 \\ 195.1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 57.8 \\ 128.3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 135.8 \\ 125.1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 189.2 \\ 203.6 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{Dis} = \begin{pmatrix} 165.02 \\ 88.95 \\ 83.2 \\ 177.62 \end{pmatrix}$$

**รูปที่ 17** พิกัดตำแหน่งของจุดที่กำหนดให้  $(X^i, Y^i)$  ที่กระจายตัวเป็นรูปตัววีเมื่อมองจากจุดที่ต้องการหา และระยะถึงจุดที่ต้องการหา



**รูปที่ 18** ตำแหน่งของจุดที่กำหนดให้ที่กระจายตัวเป็นรูปตัววี (จุดสี่เหลี่ยม 4 จุด) และจุดที่ต้องการหา (จุดวงกลม)

$$\text{Result}(000,000,1) = \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 28.77 \\ -180.81 \\ -206.53 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 147.9 \\ 55.21 \\ 23.95 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 113.81 \\ 0.42 \\ -37.05 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 97.58 \\ 32.69 \\ -13.85 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100.27 \\ 48.66 \\ -0.35 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -12.45 \\ -12.49 \\ -15.51 \\ -15.15 \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

$$\text{Result}(050,050,1) = \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 85.18 \\ -6.84 \\ -43.99 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 103.44 \\ 36.26 \\ -10.23 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.77 \\ 46.79 \\ -2.16 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100.01 \\ 49.93 \\ 0.52 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.57 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.06 \\ -0.06 \\ -0.06 \\ -0.05 \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

$$\text{Result}(050,100,1) = \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 79.45 \\ 36.53 \\ -0.63 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 97.92 \\ 18.34 \\ -27.09 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100.41 \\ 47.38 \\ -1.63 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.99 \\ 49.86 \\ 0.07 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.12 \\ -0.12 \\ -0.13 \\ -0.13 \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

$$\text{Result}(100,050,1) = \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.56 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.56 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.56 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.56 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0.56 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2.55 \times 10^{-15} \\ 2.55 \times 10^{-15} \\ -2.33 \times 10^{-15} \\ -2.66 \times 10^{-15} \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

$$\text{Result}(100,100,1) = \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 99.75 \\ 87.28 \\ 31.83 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.82 \\ 77.96 \\ 24.15 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.89 \\ 70.23 \\ 17.74 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.96 \\ 59.99 \\ 9.11 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100.01 \\ 49.3 \\ -0.25 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 9.57 \\ 9.59 \\ 9.79 \\ 9.34 \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

$$\text{Result}(100,150,1) = \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 99.89 \\ 117.34 \\ 57.99 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.55 \\ 100.22 \\ 42.61 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.69 \\ 87.5 \\ 32.36 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.81 \\ 78.14 \\ 24.67 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.89 \\ 70.42 \\ 18.25 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 6.53 \\ 6.55 \\ 6.28 \\ 6.75 \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

$$\text{Result}(100,200,1) = \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 103.54 \\ 103.11 \\ 88.91 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 100.18 \\ 89.17 \\ 33.78 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.85 \\ 79.23 \\ 25.56 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.88 \\ 71.43 \\ 19.08 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.95 \\ 61.95 \\ 11.11 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 8.3 \\ 8.22 \\ 8.16 \\ 8.32 \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

$$\text{Result}(150,150,1) = \left[ \begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 84.5 \\ 152.18 \\ 77.54 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 101.75 \\ 120.19 \\ 59.44 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.68 \\ 102.24 \\ 44.13 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.68 \\ 89 \\ 33.47 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 99.8 \\ 79.24 \\ 25.47 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 7.99 \\ 8.09 \\ 7.68 \\ 8.37 \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

$\text{Result}(200,150,1) = \blacksquare$   
This matrix is singular. Cannot compute its inverse.

$\text{Result}(200,200,1) = \blacksquare$   
This matrix is singular. Cannot compute its inverse.

รูปที่ 19 ผลการวิเคราะห์เมื่อตำแหน่งที่กำหนดให้ เรียงเป็นรูปตัววีเมื่อมองจากจุดที่ต้องการหา

สำหรับกรณีเมื่อจุดที่กำหนดให้ที่จัดตัวเป็นรูปตัววี เมื่อใช้ค่า  $(x_0, y_0)$  ที่อยู่ช่วงพิกัดเฉลย ซึ่งใช้การวนรอบการวิเคราะห์ประมาณ 4-5 รอบ ก็จะสามารถลู่เข้าสู่พิกัดเฉลยได้ ซึ่งมีผลการวิเคราะห์หัดังแสดงในรูปที่ 19 แต่เมื่อเปลี่ยนให้พิกัดเริ่มต้นห่างออกไป เช่น Result(200,150,1) และ Result(200,200,1) พบว่า ระบบเข้าสู่ภาวะ singularity เมื่อเปรียบเทียบกับกรณี 9.5 เมื่อตำแหน่งที่กำหนดให้เรียงตัวอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกับจุดที่ต้องการหา พบว่าเมื่อตำแหน่งที่กำหนดให้ เรียงเป็นรูปตัววีเมื่อมองจากจุดที่ต้องการหา บางครั้งให้ผลที่แยกว่า ทำให้ต้องวนรอบการคำนวณมากครั้งขึ้น ในการลู่เข้าสู่พิกัดเฉลย แต่ค่า  $(x_0, y_0)$  บางค่าก็ให้ระบบลู่เข้าสู่พิกัดเฉลยที่รวดเร็วขึ้น ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับ

กับความอ่อนไหวของระบบ

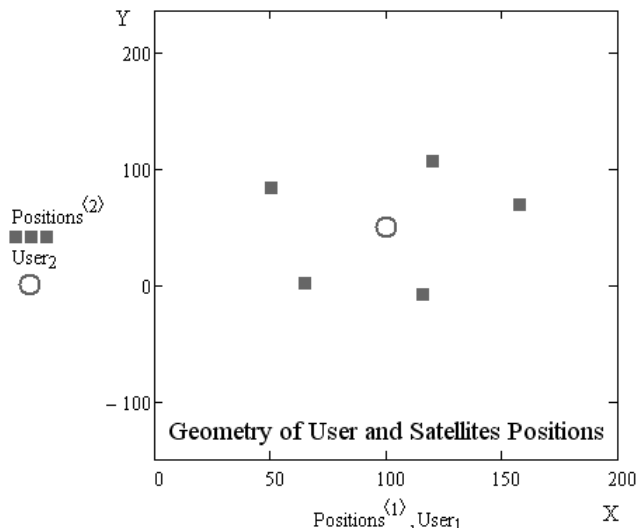
**9.7 เมื่อตำแหน่งที่กำหนดให้ เรียงเป็นรูปวงกลม รอบจุดที่ต้องการหา**

เมื่อทดลองลู่เข้าสู่จุดที่กำหนดให้กระจายตัวในลักษณะวงกลม โดยมีลักษณะ พิกัดและระยะดังแสดงในรูปที่ 20 และ 21 ทั้งนี้เพื่อให้การเรียงตัวมองเห็นได้เป็นรูปวงกลม กรณีนี้จึงได้เพิ่มจุดที่กำหนดให้อีกจุดหนึ่ง โดยมีระยะจากจุดที่กำหนดให้ถึงจุดที่ต้องการหาประมาณ 60 หน่วย (ข้อสังเกต รูปที่ 21 มาตราส่วนทางแกนตั้งสั้นกว่าทางแกนนอน ทำให้มองเห็นในลักษณะวงรี)

$$\text{Sat}^T = \left[ \begin{pmatrix} 50.1 \\ 83.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120.2 \\ 106.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 157.3 \\ 68.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 115.7 \\ -8.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 65.1 \\ 1.2 \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{Dis}^T = (59.94 \quad 60.28 \quad 60.27 \quad 60.28 \quad 60)$$

**รูปที่ 20** พิกัดตำแหน่งของจุดที่กำหนดให้  $(X', Y')$  ที่กระจายตัวเป็นรูปวงกลมเมื่อมองจากจุดที่ต้องการหา และระยะถึงจุดที่ต้องการหา



**รูปที่ 21** ตำแหน่งของจุดที่กำหนดให้ที่กระจายตัวเป็นรูปวงกลม (จุดสี่เหลี่ยม 5 จุด) รอบจุดที่ต้องการหา (จุดวงกลม)

Result(000,000,1) = ■  
 This matrix is singular. Cannot compute its inverse.

$$\text{Result}(050,050,1) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 127.55 & 99.81 & 100 & 100 & 100 \\ 51.9 & 50.29 & 50 & 50 & 50 \\ 30.5 & 4.5 & 0.95 & 0.95 & 0.95 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7.63 \times 10^{-13} \\ 4.47 \times 10^{-11} \\ 3.56 \times 10^{-11} \\ -3.09 \times 10^{-11} \\ -4.59 \times 10^{-11} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Result(050,100,1) = ■  
 This matrix is singular. Cannot compute its inverse.

$$\text{Result}(100,050,1) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 & 100 & 100 \\ 50 & 50 & 50 & 50 & 50 \\ 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{Result}(100,100,1) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 102.9 & 100.23 & 100 & 100 & 100 \\ 29.8 & 49.92 & 50 & 50 & 50 \\ 23.87 & 1.57 & 0.13 & 0.13 & 0.13 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1.06 \times 10^{-11} \\ -4.21 \times 10^{-12} \\ -1.21 \times 10^{-11} \\ -3.38 \times 10^{-12} \\ 7.37 \times 10^{-12} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Result(100,150,1) = ■  
 This matrix is singular. Cannot compute its inverse.

รูปที่ 22 ผลการวิเคราะห์เมื่อตำแหน่งที่กำหนดให้ เรียงเป็นรูปวงกลม รอบจุดที่ต้องการหา

จากผลการวิเคราะห์ ถึงแม้จะเพิ่มจุดที่กำหนดให้มากขึ้นอีกหนึ่งจุด เมื่อเปรียบเทียบกับกรณี 9.2 เมื่อตำแหน่งที่กำหนดให้กระจายอย่างสม่ำเสมอรอบจุดที่ต้องการหาพบว่า เมื่อตำแหน่งที่กำหนดให้ เรียงเป็นรูปวงกลม การวิเคราะห์ที่มีแนวโน้มเป็น singularity ทำให้ไม่สามารถหาค่าเฉลยได้ ซึ่งนับเป็นภาวะไม่ดี (ill condition) อันมีสาเหตุมาจากสมการที่ได้มีลักษณะคล้ายกันมากจนเกือบจะเป็นสมการเดียวกัน ทำให้แก้ปัญหาไม่ได้ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าแม้จะมีข้อมูลเพิ่มขึ้นจากการที่มีจุดที่กำหนดให้เพิ่มเติมจากกรณีอื่นๆ อีกหนึ่งจุด ก็ไม่เป็นประโยชน์ในการวิเคราะห์

## 10. สรุปผลการศึกษา

การศึกษานี้เป็นการศึกษาวิจัยพื้นฐาน ในแง่การประยุกต์ใช้ Linearized Least Squares โดยเปลี่ยนส่วนที่ไม่เชิงเส้น ให้เป็นเชิงเส้นโดยใช้ Taylor series เพื่อหาพิกัดตำแหน่งจากตำแหน่งที่กำหนดให้ในสองมิติ โดยได้ทดลองผลกระทบจากตำแหน่งของจุดที่กำหนดให้ ในหลักขณะ ซึ่งกรณีจุดที่กำหนดมีพิกัดตำแหน่งกระจายรอบจุดที่ต้องการหา จะหาผลลัพธ์ได้เร็วและมีความถูกต้องมาก (ซึ่งสังเกตได้จากค่าเศษ) ขณะที่กรณีจุดที่กำหนดมีพิกัดตำแหน่งกระจุกตัว มีปัญหามากที่สุด เพราะถ้าใช้ค่าพิกัดเริ่มต้น  $(x_0, y_0)$  ห่างจากค่าเฉลยมาก จะไม่

สามารถหาพิกัดของจุดที่ต้องการหาได้เลย เพราะสมการสังเกตการณ์เกือบจะเหมือนกัน ทำให้การหาค่าพิกัดเฉลยลำบากยุ่งยากมาก ซึ่งกรณีนี้สอดคล้องกับผลการวิเคราะห์เมื่อจุดที่กำหนดให้เรียงตัววงกลมรอบจุดที่ต้องการหา

ส่วนกรณีที่จุดที่กำหนดมีพิกัดตำแหน่งกระจายอยู่ด้านเดียวกัน การหาค่าพิกัดเฉลยไม่มีปัญหาใด เพียงแต่ต้องวนรอบในส่วน Least Squares จำนวนรอบเพิ่มมากขึ้น โดยขึ้นอยู่กับทางเลือกค่าพิกัดเริ่มต้น

การศึกษานี้สามารถขยายไปสู่การศึกษาในสามมิติได้คล้ายกัน เพียงแต่เพิ่มความยุ่งยาก เช่น กรณีหาพิกัดตำแหน่งโดยใช้ดาวเทียม GPS ซึ่งเกิดขึ้นในโลกสามมิติ ทั้งนี้อาจมีตัวแปรอื่นเพิ่มขึ้นมา ทั้งนี้โปรแกรม Mathcad ที่เขียนขึ้นสามารถปรับเปลี่ยนได้ง่าย ให้ผลการวิเคราะห์ได้ทันทีและรวดเร็ว จึงเป็นเครื่องมือช่วยการศึกษาได้เป็นอย่างดี

## 11. เอกสารอ้างอิง

1. Leick, A., 2004, GPS Satellite Surveying, 3<sup>rd</sup> Ed. John Wiley & Sons, Inc., NY. 435p.
2. Mikhail, M. and Ackerman, F., 1976, *Observations and Least Squares*, Harper & Row, Publishers, NY.
3. Le, A.Q. and Teunissen, P.J.G., 2008, "Optimal Recursive Least-Squares Filtering of GPS

*Pseudorange Measurements*", *International Association of Geodesy Symposia*, Vol. 132 : pp. 166-172.

4. Witchayangkoon, B., 2002, "GPS-based Vehicular Velocity Determination on the Chalermmahanakhon Expressway", *Proceedings of the First Conference on Civil and Environmental Engineering (ICCEE-2002)*, Higashi-Hiroshima, Japan, Oct 30-31, 2002 pp. 215-221.

5. Bronk, K. and J. Stefanski, 2007, "Bad Geometry Influence on Positioning Accuracy in Wireless Networks", *The international conference on "Computer as a Tool" (EUROCON 2007)*, Warsaw, September 9-12, 2007, pp. 1131-1135.

6. Pritchard, P.J., 2007, *Mathcad: A Tool for Engineers and Scientists + CD-ROM to accompany Mathcad (B.E.S.T.)* (Paperback) McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2<sup>nd</sup> Ed.

7. Parametric Technology Corporation, 2008, *Mathcad: Create and Document Critical Engineering Calculation*, [http://www.ptc.com/WCMS/files/39129/en/3548\\_\\_Mathcad\\_DS.pdf](http://www.ptc.com/WCMS/files/39129/en/3548__Mathcad_DS.pdf) Accessed: September, 2008

8. Kock, K.R., 1999, *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models*, 2<sup>nd</sup> Ed. Springer, Germany.