ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบสองขั้น

จารุวรรณ แก้วแสนซาว[1] พีรยุทธ์ ชาญเศรษฐิกุล[2*] และ เสรี เศวตเศรนี[2]
หน่วยการวิจัยดำเนินการและวิทยาการจัดการ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตบางเขน
50 ถนนงามวงศ์วาน แขวงลาดยาว เขตจตุจักร กรุงเทพมหานคร 10900

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอการรวมปัจจัยความไม่แน่นอนของการจับคู่งานกับทรัพยากร ประกอบกับต้นทุนที่เกี่ยวข้องกับความเสี่ยงดังกล่าว พิจารณาในตัวแบบปัญหาการจัดงาน โดยอาศัยแนวทางแบบจำลองสองขั้นตอนนำเสนอโดย Dantzig [3] ทำให้เกิดเป็นลักษณะหนึ่งของปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม แบบจำลองดังกล่าวถูกนำไปทดสอบแก้หาคำตอบโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟท์เอ็กซ์เซลล์โซลเวอร์-กูโรบิ รุ่น พ.ศ. 2553 ขนาดของปัญหาที่ทดสอบได้ถูกขยายเพิ่มขึ้นจนโปรแกรมฯ ไม่สามารถหาคำตอบได้ วิธีแบ่งส่วนของเบนเดอร์ได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้โดยพัฒนาขึ้นจากโปรแกรม MATLAB R2010b เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว ผลการทดลองพบว่าวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์สามารถขยายขนาดของการแก้ปัญหาได้โดยเฉพาะกรณีที่มีตัวแปรตัดสินใจที่เกี่ยวข้องมากกว่า 1,000,000 ตัวแปร

คำสำคัญ : ความไม่แน่นอน / การจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม / วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์

---

* *Corresponding author: E-mail: fengprc@ku.ac.th*

1 *นิสิตปริญญาโท สาขาวิชาวิศวกรรมอุตสาหการ คณะวิศวกรรมศาสตร์*

2 *รองศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมอุตสาหการ คณะวิศวกรรมศาสตร์*

A Two-Stage Linear Assignment Problem

Jaruwan Keawsandsound[1] Peerayuth Charnsethikul[2*] and Saeree Svetasreni[2]

Operations Research and Management Science Units

Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering

Kasetsart University, Bangkhaen Campus 50 Ngam Wong Wan Rd, Lat Yao Chatuchak Bangkok 10900

Abstract

This research work proposes merging of uncertainties jobs-resources pair assignment with their corresponding risky cost to the linear assignment model. The two-stage model approach of Dantzig [3] was used, resulting in a class of stochastic linear assignment problem. The proposed model was tested by a state of the art software EXCEL/solver-Gurobi 2010 version. The sizes of the test problem increased until unsolvable cases were detected. Therefore, Bender's decomposition method was applied and developed using MATLAB R2010b to solve these cases. The experimental result showed that the method is capable of expanding the size of the problem solving capabilities, especially when more than one-million decision variables are involved.

Keywords : A Stochastic Linear Assignment / Bender's Decomposition Method / Uncertainties

* *Corresponding author: E-mail: fengprc@ku.ac.th*

1 *Graduate Student in Industrial Engineering, Faculty of Engineering.*

2 *Associate Professor, Department of Industrial Engineering.*

1. บทนำ

ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นในช่วงแรก ได้ดำเนินการแก้ปัญหาโดยวิธีการทางคณิตศาสตร์ เช่น วิธีการแจงนับ (Enumeration) วิธีการกำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming) เป็นต้น แต่วิธีทั้งสองนี้เป็นวิธีทั่วไปทำให้ขาดประสิทธิภาพในทางปฏิบัติในการหาผลเฉลยของปัญหาฯ โดยเฉพาะเมื่อปัญหามีขนาดใหญ่ เช่น จำนวนการจับคู่งานและเครื่องจักร/ทรัพยากรมีหลายพันคู่หรือมากกว่า ต่อมานักวิจัยหลายท่านได้เสนอวิธีการแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นโดยเริ่มต้นที่ Kuhn [4] เสนอวิธีฮังกาเรียน (Hungarian Method) เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว ต่อมา Burkard and Derigs [2] พัฒนาโปรแกรมภาษาฟอร์แทรน โดยใช้เทคนิคการหาเส้นทางที่สั้นที่สุด เพื่อช่วยแก้ปัญหาดังกล่าว ซึ่งสามารถนำมาขยายผลในการแก้ปัญหาขนาดใหญ่ได้โดยใช้คอมพิวเตอร์สมรรถนะสูง

Dantzig [3] ศึกษากำหนดการเชิงเส้นภายใต้ความไม่แน่นอนและนำเสนอตัวแบบสองขั้นตอน (Two-Stage Model) ที่นำเอาสถานการณ์ความไม่แน่นอนของข้อมูลและผลกระทบมารวมในตัวแบบทำให้เกิดเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่มีขนาดใหญ่มากจนกระทั่งเครื่องคำนวณประมวลผลไม่สามารถรองรับได้ ปัจจุบันตัวแบบดังกล่าวได้เป็นส่วนหนึ่งในรายวิชาด้านการวิจัยดำเนินการ (Operations Research) ชื่อกำหนดการเฟ้นสุ่มเชิงเส้น (Stochastic Linear Programming : SLP) ซึ่งบรรจุเป็นบทเรียนอย่างละเอียดพร้อมตัวอย่างและแบบฝึกหัดในตำราของ Wagner [5] จากข้างต้นนั้นตัวแบบปัญหาการจัดงานเชิงเส้นยังไม่คำนึงถึงความไม่แน่นอนของการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะพัฒนาตัวแบบโดยนำเอาสถานการณ์ความไม่แน่นอนของข้อมูลมารวมในตัวแบบฯ และเรียกปัญหานี้ว่าปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม (A Stochastic Linear Assignment Problem) ซึ่งจะมีลักษณะเป็นตัวแบบกำหนดการจำนวนเต็มแบบผสม (Mixed Integer Programming Model) ในรูปแบบคล้ายกับตัวแบบในงานของ Kittitavornkul and Pimsakul [13] ซึ่งเหมาะแก่การประยุกต์ใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ (Benders) [1] ร่วมกับการสุ่มตัวอย่างความไม่แน่นอนเข้ามาใช้ในตัวแบบฯ เพื่อลดขนาดที่แท้จริงเชิงประชากรของปัญหาฯ ดังตัวอย่างที่ใกล้เคียงจากการประยุกต์ในปัญหาการจัดงานจราจรเชิงพลวัตและเฟ้นสุ่ม (Stochastic Dynamic Traffic Assignment Problem) ของ Birge and Ho [8] และของ Powell [10] ในส่วนของ ปัญหา SLP มีพบในงานของ Infanger [9] และ ในปัญหาการจัดงานเชิงเฟ้นสุ่มแบบมีข้อจำกัดเพิ่ม เช่นงานของ Spoerl and Wood [11] และ De La Torre et.al. [12] เป็นต้น ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงมีวัตถุ ประสงค์เพื่อ

1. พัฒนาตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม โดยอาศัยแนวทางตัวแบบสองขั้นตอน (Two-Stage Model)
2. ศึกษาวิธีการแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มโดยประยุกต์ใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ภายใต้ความพยายามที่จะใช้ประโยชน์สูงสุดจากฮาร์ด์แวร์และซอฟท์แวร์สำเร็จรูปที่มีอยู่
3. วิเคราะห์ประสิทธิภาพและประสิทธิผลของวิธีการแก้ปัญหาฯ

2. วิธีการศึกษา

วิธีการศึกษาเพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์การวิจัยประกอบด้วย 4 ขั้นตอนหลักดังนี้

1. สร้างตัวแบบปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มและจำลองข้อมูลเพื่อนำไปใช้ในการทดสอบตัวแบบ ผู้วิจัยแบ่งการพัฒนาตัวแบบออกเป็น 2 กรณี ได้แก่

1.1 กรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ ซึ่งแสดงดังตัวแบบต่อไปนี้

$$Minimize \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n} g_{ik}u_{ik} + \sum_{j=1}^{n} e_{jk}r_{jk}\right) \qquad (1)$$

$$Subject\ to \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad ;i = 1,2,...,n \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad ;j = 1,2,...,n \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_{ij} + u_{ik} = 1 \qquad ;i = 1,2,...,n,\ k = 1,2,...,N \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1} a_{ijk}x_{ij} + r_{jk} = 1 \qquad ;j = 1,2,...,n,\ k = 1,2,...,N \qquad (5)$$

$$x_{ij} = \{0,1\}, \qquad u_{ik}, r_{jk} \geq 0,\ \forall i,j,k \qquad (6)$$

โดยที่ n แทนจำนวนการจับคู่ของงานและเครื่องจักร/ทรัพยากร

N แทนจำนวนทางเลือกทั้งหมดที่เป็นไปได้

c_{ij} แทนต้นทุนที่เกิดขึ้นจากการจับคู่ของเครื่องจักร/ทรัพยากร i และงาน j

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าดัชนี } i \text{ มีการจับคู่กับดัชนี } j \text{ หรือ} \\ & \text{เครื่องจักร/ทรัพยากร } i \text{ ถูกจับคู่กับงาน } j \\ 0 & \text{ถ้าไม่ใช่} \end{cases}$$

$u_{ik}, r_{jk} = \{0,1\}$ แทนตัวแปรที่มีการปรับค่าจากความไม่แน่นอนของสมการข้อจำกัดที่มีค่าไม่แน่นอน กรณีที่มีการปรับค่าจากความไม่แน่นอนเนื่องจาก a_{ijk} และ x_{ij} มีค่าเป็น 0 หรือ 1 ทำให้ ผลรวมที่ได้จาก $\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}\, x_{ij}$ และ $\sum_{i=1}^{n} a_{ijk}\, x_{ij}$ มีค่าเป็น 0 หรือ 1 เท่านั้นและกำหนดให้ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ ซึ่งอาจทำให้สมการทั้งสองข้างไม่สมดุลกัน ดังนั้นจึงต้องเติม u_{ik}, r_{jk} เพื่อให้สมการทั้งสองข้างมีความสมดุลกัน

g_{ik} แทนต้นทุนเฉลี่ยของกรณีที่มีการปรับค่า u_{ik} โดย $g_{ik} = prob_k \times g_i$

e_{jk} แทนต้นทุนเฉลี่ยของกรณีที่มีการปรับค่า r_{jk} โดย $e_{jk} = prob_k \times e_j$

$prob_k$ แทนผลรวมของความไม่แน่นอนที่เกิดจากการจับคู่ที่ทางเลือก k

g_i แทนค่าที่ปรับต่อหน่วยของข้อจำกัดที่ i

e_j แทนค่าที่ปรับต่อหน่วยของข้อจำกัดที่ j

$$a_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } i \text{ จับคู่กับ } j \text{ ได้ที่ทางเลือก } k \\ 0 & \text{ถ้าไม่ใช่} \end{cases}$$

เงื่อนไขที่ (1) แทนสมการแสดงผลรวมของต้นทุนเชิงเส้นที่เกี่ยวข้องทั้งหมด

เงื่อนไขที่ (2) แทนว่าแต่ละเครื่องจักร/ทรัพยากร i สามารถจับคู่กับงานได้เพียงหนึ่งงานเท่านั้น

เงื่อนไขที่ (3) แทนว่าแต่ละงาน j สามารถจับคู่กับเครื่องจักร/ทรัพยากรได้เพียงหนึ่งเครื่อง/หนึ่งทรัพยากรเท่านั้น

เงื่อนไขที่ (4) และ (5) แทนสมการสมดุลเพื่อชี้บ่งการแก้ไขเหตุการณ์ k ที่จับคู่ i และ j

เงื่อนไขที่ (6) แทนข้อบังคับของตัวแปรตัดสินใจที่เกี่ยวข้อง

1.2 กรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 ซึ่งจะแสดงได้ ดังตัวแบบต่อไปนี้

$$Minimize \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}(g_{ik}u_{ik} + h_{ik}v_{ik}) + \sum_{j=1}^{n}(e_{jk}r_{jk} + f_{jk}s_{jk})\right) \tag{7}$$

$$subject\ to \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1 \qquad ;i = 1,2,...,n \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le 1 \qquad ;j = 1,2,...,n \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_{ij} + u_{ik} - v_{ik} = b_{ik} \quad ;i = 1,2,...,n,\ k = 1,2,...,N \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ijk}x_{ij} + r_{jk} - s_{jk} = d_{jk} \quad ;j = 1,2,...,n,\ k = 1,2,...,N \tag{11}$$

$$x_{ij} = \{0,1\}, u_{ik}, v_{ik}, r_{jk}, s_{jk} \ge 0, \forall i,j,k \tag{12}$$

โดยที่ b_{ik} แทนค่าคงที่ทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนที่ i ที่ทางเลือก k

d_{jk} แทนค่าคงที่ทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนที่ j ที่ทางเลือก k

$u_{ik}, v_{ik}, r_{jk}, s_{jk} = \{0,1\}$ แทนตัวแปรที่มีการปรับค่าจากความไม่แน่นอนของสมการข้อจำกัด ที่มีค่าไม่แน่นอน กรณีที่มีการปรับค่าจากความไม่แน่นอนเนื่องจาก a_{ijk} และ x_{ij} มีค่าเป็น 0 หรือ 1 ทำให้ผลรวมที่ได้จาก $\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_{ij}$ และ $\sum_{i=1}^{n} a_{ijk}x_{ij}$ มีค่าเป็น 0 หรือ 1 เท่านั้นและกำหนดให้ ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 ซึ่งอาจทำให้สมการทั้งสองข้างไม่สมดุลกัน ดังนั้นจึงต้องเติม $u_{ik}, v_{jk}, r_{jk}, s_{jk}$ เพื่อให้สมการทั้งสองข้างมีความสมดุลกัน

g_{ik} แทนต้นทุนเฉลี่ยของกรณีที่มีการปรับค่า u_{ik} โดย $g_{ik} = prob_k \times g_i$

e_{jk} แทนต้นทุนเฉลี่ยของกรณีที่มีการปรับค่า r_{jk} โดย $e_{jk} = prob_k \times e_j$

g_i, h_i แทนค่าที่ปรับต่อหน่วยของข้อจำกัดที่ i

e_j, f_j แทนค่าที่ปรับต่อหน่วยของข้อจำกัดที่ j

จากตัวแบบข้างต้นจะพบว่า เมื่อปัญหานำเอาชุดลักษณะเชิงความน่าจะเป็น (Probabilistic Characteristics) มารวมอยู่ด้วย ลักษณะของแบบจำลองจะเปลี่ยนแปลงเป็นปัญหากำหนดการจำนวนเต็มผสม (Mixed Integer Programming) ดังนั้นผู้วิจัยจึงเลือกใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ (Bender's Decomposition) ซึ่งเป็นเทคนิคที่ใช้ในการแก้ปัญหาลักษณะที่กล่าวมาดังข้างต้นได้ และสามารถขยายขนาดของปัญหาที่สามารถแก้โดยใช้คอมพิวเตอร์ในการประมวลผล

2. วิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบจากตัวแบบที่สร้างขึ้น

2.1 วิธีทั่วไปที่สร้างขึ้นเพื่อใช้เปรียบเทียบผลลัพธ์

วิธีการหาคำตอบที่แท้จริง (Exact Algorithm) เป็นการแก้ปัญหาโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟท์เอ็กซ์เซลล์โซลเวอร์-กูโรบิ [6] ซึ่งโปรแกรมนี้ถูกพัฒนาโดยสมาชิกของทีมพัฒนาโปรแกรม CPLEX ประกอบด้วย Robert Bixby, Zonghao Gu และ Edward Rothberg ทั้งสามได้พัฒนาโปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟท์เอ็กซ์เซลล์โซลเวอร์ที่มีประสิทธิภาพสูงเป็นพิเศษด้วยอัลกอริทึมใหม่ล่าสุดที่ออกแบบมาสำหรับการประมวลผลแบบมัลติคอร์ (multi-core) รุ่นใหม่ๆ และเรียกว่า โซลเวอร์-กูโรบิ จากนั้นได้มีการตรวจสอบเวลาที่ใช้ในการประมวลผลกับปัญหามาตรฐาน พบว่า โซลเวอร์-กูโรบิ รุ่น 4.0 สามารถแก้ปัญหาได้ดีที่สุด ซึ่งเวลารวมที่ใช้ในการแก้ปัญหาน้อยว่าทางเลือกอื่น และสามารถใช้ในการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming : LP) ปัญหากำหนดการกำลังสอง (Quadratic Programming : QP) และปัญหากำหนดการจำนวนเต็มผสม (Mixed Integer Programming : MIP) ได้อีกด้วย ซึ่งวิธีนี้จะใช้ในกรณีที่ 2.2 และ 2.3 ดังที่จะกล่าวต่อไป

2.2 วิธีที่พัฒนาขึ้นเพื่อแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเฟ้นสุ่ม

กรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ ใช้วิธีการลดรูปตัวแบบ ซึ่งจะพิจารณาเงื่อนไข (4) และ (5) ของตัวแบบปัญหาการจัดงานเชิงแบบเฟ้นสุ่มแทนค่า u_{ik} และ $r_{ik}, \forall i, j, k$ ในรูปของฟังก์ชั่นเชิงเส้นของ $a_{ijk}, \forall i, j, k$ ลงในสมการเป้าหมาย (1) ได้ผลลัพธ์เป็นดังต่อไปนี้

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{n} g_{ik}\left(1-\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_{ij}\right) + \sum_{j=1}^{n} e_{jk}\left(1-\sum_{i=1}^{n} a_{ijk}x_{ij}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{k=1}^{N}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} g_{ik} - \sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_{ij}\sum_{i=1}^{n} g_{ik}\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} e_{jk} - \sum_{i=1}^{n} a_{ijk}x_{ij}\sum_{j=1}^{n} e_{jk}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[c_{ij} - \sum_{k=1}^{N}\left(g_{ik}+e_{jk}\right)a_{ijk}\right]x_{ijk} + \sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{n} g_{ik} + \sum_{j=1}^{n} e_{jk}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{c}_{ij}x_{ij} + \bar{c}_0$$

ทำให้การแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มสามารถลดรูปโดยกำจัดตัวแปร u_{ik} และ $r_{jk}, \forall i, j, k$ ได้ทั้งหมด ทำให้ได้ตัวแบบมาตรฐานของปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มหรือเรียกว่าตัวแบบลดรูป คือ

$$\textit{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{c}_{ij}x_{ij} + \bar{c}_0 \qquad \textbf{(14)}$$

$$\textit{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad ; i = 1, 2, ..., n \qquad \textbf{(15)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad ; j = 1, 2, ..., n \qquad \textbf{(16)}$$

$$x_{ij} = \{0, 1\}, \forall i, j \qquad \textbf{(17)}$$

โดยที่ $\overline{c_{ij}}$ แทน $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[c_{ij}-\sum_{k=1}^{N}\left(g_{ik}+e_{jk}\right)a_{ijk}\right]$

$\overline{c_0}$ แทน $\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{n} g_{ik} + \sum_{j=1}^{n} e_{jk}\right]$

เงื่อนไขที่ (14) แทนสมการแสดงผลรวมของต้นทุนเชิงเส้นที่เกี่ยวข้องทั้งหมดที่เกิดจากการกำจัดตัวแปร u_{ik} และ $r_{ik}, \forall i, j, k$

เงื่อนไขที่ (15) (16) และ (17) แทนเงื่อนไขของปัญหาการจัดงานเชิงเส้น

2.3 วิธีที่พัฒนาขึ้นเพื่อแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเฟ้นสุ่ม กรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 ใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ กล่าวคือเมื่อปัญหามีความไม่แน่นอนรวมอยู่ด้วยลักษณะของปัญหาจะเปลี่ยนแปลงไปซึ่งเรียกว่าปัญหากำหนดการจำนวนเต็มผสม การเลือกใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์มาแก้ปัญหานี้ วิธีการแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม โดยการประยุกต์ใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์มีขั้นตอนดังนี้

2.3.1 สร้างข้อมูลของปัญหาการจัดงาน คือ สร้างข้อมูลของต้นทุนในการจัดงาน (c_{ij}) ค่าความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ (p_{ij}) การเกิดขึ้นของเหตุการณ์ทีเป็นไปได้ (a_{ijk}) และค่าทาง ขวามือ (b_{ik}, d_{jk}) เมื่อ i, j = 1,..., n และ k = 1,..., N

2.3.2 แยกตัวแบบเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มออกเป็น 2 ส่วน คือตัวปัญหาหลัก ซึ่งเป็นส่วนที่มีค่าตัวแปรแน่นอน และตัวปัญหาย่อย ซึ่งเป็นส่วนที่อยู่ภายใต้ความไม่แน่นอน จะแสดงได้ดังตัวแบบต่อไปนี้

ตัวปัญหาหลัก

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{18}$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1 \quad ; i = 1, 2, \ldots, n \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le 1 \quad ; j = 1, 2, \ldots, n \tag{20}$$

$$x_{ij} = \{0,1\}, \forall i, j \tag{21}$$

ตัวปัญหารอง

$$\text{Minimize} \quad \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}(g_{ik}u_{ik} + h_{ik}v_{ik}) + \sum_{j=1}^{n}(e_{jk}r_{jk} + f_{jk}s_{jk})\right) \tag{22}$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_{ij} + u_{ik} - v_{ik} = b_{ik} \quad ; i = 1,2,\ldots,n,\ k = 1,2,\ldots,N \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ijk}x_{ij} + r_{jk} - s_{jk} = d_{jk} \quad ; j = 1,2,\ldots,n,\ k = 1,2,\ldots,N \tag{24}$$

$$x_{ij} = \{0,1\}, u_{ik}, v_{ik}, r_{jk}, s_{jk} \ge 0, \forall i, j, k \tag{25}$$

2.3.3 เปลี่ยนปัญหารองให้อยู่ในรูปของตัวแบบปัญหาคู่ควบ

$$\text{Maximize} \quad +\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{26}$$

$$\text{Subject to} \quad -h_{ik} \le y_{ik} \le g_{ik} \tag{27}$$

$$-f_{jk} \le w_{jk} \le e_{jk} \tag{28}$$

2.3.4 กำหนดค่าเริ่มต้นของตัวแปรตัดสินใจเริ่มต้นของปัญหาการจัดงาน $x_{ij}, \forall i, i, j$

2.3.5 แทนค่าเริ่มต้นของตัวแปรตัดสินใจเริ่มต้นของปัญหาการจัดงานลงในสมการที่ (26) และจะได้ผลลัพธ์เป็นค่า y_{ik} และ w_{jk} ซึ่งเป็นค่าความน่าจะเป็นของแต่ละทางเลือกและค่าขอบเขตบนที่เหมาะสม

2.3.6 ปรับปรุงปัญหาหลักโดยเพิ่มเงื่อนไขระนาบตัดเหมาะที่สุดดังสมการที่ (30) เพื่อคำนวณหาค่าที่เหมาะสมในปัญหาหลัก จากนั้นจะนำผลลัพธ์ของตัวแปรตัดสินใจใหม่ไปใช้ในการในการปรับปรุงผลลัพธ์ตามข้อ 2.3.5 ต่อไป

$$\text{Minimize} \quad T \tag{29}$$

$$\text{Subject to} \; -T + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(c_{ij} - \sum_{k=1}^{N} a_{ijk}y_{ik} - \sum_{k=1}^{N} a_{ijk}w_{jk}\right)x_{ij}$$

$$\leq -\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N} b_{ik}y_{ik} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N} d_{jk}w_{jk}\right) \tag{30}$$

$$\sum_{j=1} x_{ij} \leq 1 \qquad ;i = 1,2,\ldots,n \tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \qquad ; j = 1,2,\ldots,n \tag{32}$$

$$x_{ij} = \{0,1\}, \forall i, j \tag{33}$$

โดยที่ T แทนค่าขอบเขตล่าง

ตัวแปรตัดสินใจเริ่มต้น คือ ตัวแปรตัดสินใจที่เกิดจากการสุ่มในรอบการทำซ้ำที่ 1

ตัวแปรตัดสินใจใหม่ คือ ตัวแปรตัดสินใจที่ได้จากการแก้ปัญหาฯ ในรอบการทำซ้ำแต่ละรอบตั้งแต่รอบที่ 2 เป็นต้นไป

2.3.7 เงื่อนไขการหยุด จะหยุดเมื่อค้นหาค่าขอบเขตล่าง (LB) ในปัญหาหลักมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าขอบเขตบน (UB) ในปัญหาคู่ควบหรือผลต่างของค่าขอบเขตบนกับขอบเขตล่างน้อยกว่าหรือเท่ากับ Tol ซึ่งในกรณีนี้กำหนดให้เท่ากับ 0.001 ซึ่งหมายความว่าคำตอบจะมีความละเอียดถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 3

$$UB - LB \leq Tol \tag{34}$$

3. การพัฒนาโปรแกรมสำหรับปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มใช้ในกรณีที่ 2.3

โปรแกรมที่นำมาใช้ในการช่วยแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มคือ MATLAB [7] ซึ่งเป็นโปรแกรมการคำนวณเชิงตัวเลขที่มีสภาพแวดล้อมในการคำนวณของตัวเองและมีภาษาเฉพาะตัวในการเขียนโปรแกรม เนื่องจากปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มมีลักษณะเป็นปัญหากำหนดการจำนวนเต็มผสม ซึ่งชุดเครื่องมือ (Toolbox) ของโปรแกรม MATLAB ไม่ได้รองรับสำหรับการแก้ปัญหาที่มีลักษณะนี้ ดังนั้นต้องทำการดัดแปลงเทคนิคในการแก้ปัญหานี้ โดยเลือกใช้คำสั่งมาตรฐาน bintprog ในโปรแกรม MATLAB มาใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งจะได้คำตอบของตัวแปรตัดสินใจที่มีค่าเป็น 0 และ 1 เท่านั้น แต่ค่าเป้าหมายของปัญหานี้ต้องการเป็นค่าจำนวนเต็ม ดังนั้นโปรแกรมฯ จึงทำการเพิ่มค่า T ขึ้นในแต่ละรอบที่มีการทำซ้ำเพื่อหาคำตอบที่เป็นไปได้จากสมการ (30)-(33) และเพิ่มขึ้นจนกว่าค่า T ที่ได้จะมีคำตอบที่เป็นไปได้ครั้งแรก

3. การประเมินประสิทธิภาพและประสิทธิผล

การประเมินประสิทธิผล ใช้การเปรียบเทียบค่าเป้าหมายของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ได้จากวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุด โดยมีการสร้างแบบจำลองปัญหาด้วยขนาดต่างๆ กัน จำนวน 2 ปัญหา แต่ละปัญหามีจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ 5 โดยทำซ้ำ 10 ครั้ง ทำการทดสอบขนาดปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่งานกับทรัพยากรเท่ากับ 2 และ 3 โดยการจำลองปัญหาทำได้โดยใช้โปรแกรม MATLAB ซึ่งค่าความไม่แน่นอนของการจับคู่ จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ต้นทุนการจัดงานและค่าทางขวามือจะใช้ข้อมูลชุดเดียวกัน

การประเมินประสิทธิภาพ ได้แบ่งการทดสอบออกเป็น 3 ส่วนคือ ส่วนแรกจะทดสอบเวลาในการประมวลผลในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ ส่วนที่สองจะทดสอบเวลาในการประมวลผลในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 และส่วนที่สามทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาการ

จัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มที่มีขนาดใหญ่ (จำนวนตัวแปรตัดสินใจมากกว่า 1,000,000 ตัวแปร)

ส่วนที่ 1 พิจารณาจากเวลาที่ใช้ในการประมวลผลในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ โดยเปรียบเทียบเวลาในการประมวลผลของปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มแบบเต็มรูปกับแบบลดรูป ซึ่งมีจำนวนการจับคู่งานกับทรัพยากรเท่ากับ 5 และเปรียบเทียบเวลาในการประมวลผลของปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่งานกับทรัพยากรที่ต่างกัน คือ 5 และ 10 โดยมีการเพิ่มจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

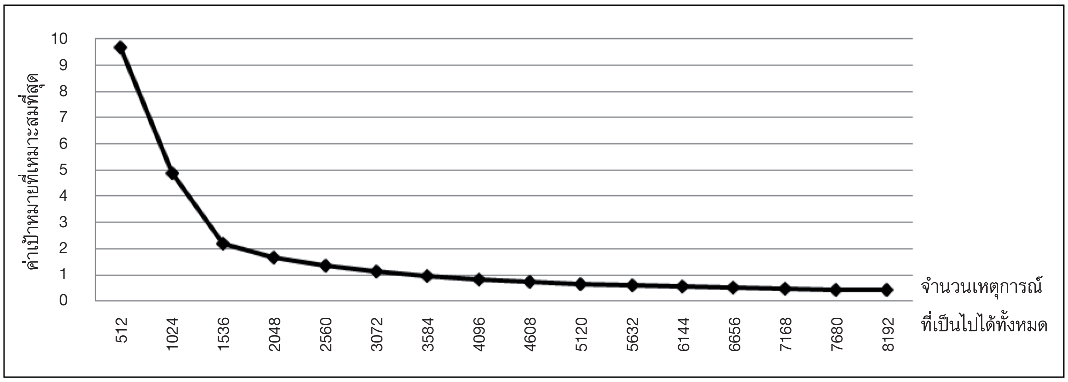
ส่วนที่ 2 พิจารณาจากเวลาที่ใช้ในการประมวลผลในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 ซึ่งจะแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ ในการทำการทดสอบผู้วิจัยได้ทดสอบปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มซึ่งมีจำนวนการจับคู่งานกับทรัพยากรที่ต่างกันจำนวน 5 ปัญหา คือ 5 10 20 30 และ 40 โดยมีการเพิ่มจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดตามจำนวนตัวแปรตัดสินใจ ซึ่งมีจำนวนตั้งแต่ 10,000 – 200,000 ตัวแปร โดยประมาณและจำนวนตัวแปรตัดสินใจจะเพิ่มขึ้นทีละ 10,000 ตัว

ส่วนที่ 3 เปรียบเทียบความสามารถของการแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มด้วยวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมโดยโปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟท์เอ็กซ์เซลล์โซลเวอร์-กูโรบิ และการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์โดยโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b

4. ผลการศึกษาและข้อวิจารณ์

จากการทำการทดลองทั้ง 3 ส่วนโดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์โน๊ตบุ๊คที่มีหน่วยประมวลผลกลางแบบ Core™2 Duo และขนาดของ RAM 2.Gbytes สามารถแสดงผลการทดสอบได้ดังนี้

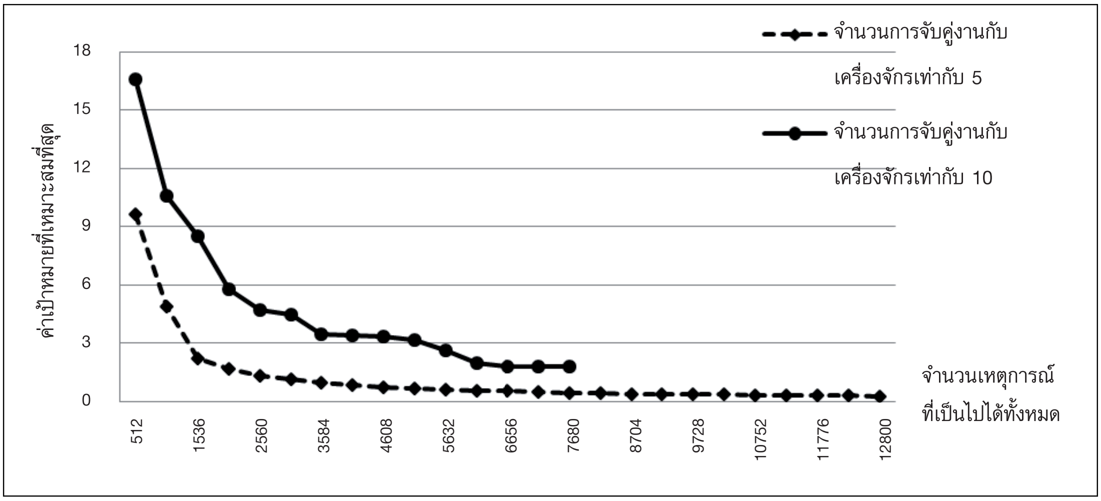
1. ผลการทดสอบเวลาที่ใช้ในการประมวลผลในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ (กรณีที่ 2.1 และ 2.2) จากการทดสอบเวลาในการประมวลผลของตัวแบบในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่มีค่าไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ โดยการเพิ่มจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด เมื่อจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเพิ่มขึ้น เวลาที่ใช้ในการแก้ปัญหารวมตั้งแต่การวินิจฉัยลักษณะปัญหา (Parse Time) เวลาในการตั้งตัวแบบปัญหา (Set up time) และเวลาที่ใช้ในการหาคำตอบ (Computation time) มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น จุดที่น่าสนใจอีกประการคือ เมื่อขนาดของจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเพิ่มขึ้น เวลาส่วนใหญ่ในการแก้ปัญหารวมถูกใช้ในการวินิจฉัยลักษณะปัญหาและเวลาในการตั้งปัญหามากกว่าเวลาที่ใช้ในการหาคำตอบโดยเฉพาะเมื่อจำนวนการจับคู่งานกับเครื่องจักร/ทรัพยากรเพิ่มขึ้น ความแตกต่างดังกล่าวสามารถสังเกตได้อย่างชัดเจน



ภาพที่ 1 การลู่เข้าของค่าเป้าหมายของตัวแบบเต็มรูปที่มีจำนวนการจับคู่งานกับทรัพยากรเท่ากับ 5

จากภาพที่ 1 พบว่าจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ใช้ยังไม่มากพอที่จะชี้บ่งสภาวะคงตัวหรือลู่เข้าของค่าเป้าหมาย ซึ่งหมายความว่าต้องเพิ่มค่าจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดอีก ทำให้เริ่มถึงขีดจำกัดที่โปรแกรมสำเร็จรูปจะรองรับได้ ดังนั้นผู้จึงนำเสนอวิธีการลดรูปตัวแบบ เพื่อแก้ปัญหาที่ปรากฏนี้

การแปลงรูปดังกล่าวยังทำให้เห็นว่าคำตอบของปัญหาการจัดงานเชิงแบบเฟ้นสุ่มที่ผ่อนปรนเงื่อนไขกับตัวแปรเป็นเลขศูนย์หนึ่งจะมีคำตอบเหมาะที่สุดเป็นชุดของเลขศูนย์หนึ่งตามเงื่อนไขอยู่แล้ว ซึ่งหมายความว่าปัญหาดังกล่าวสามารถหาคำตอบได้โดยวิธีการทางกำหนดการเชิงเส้น

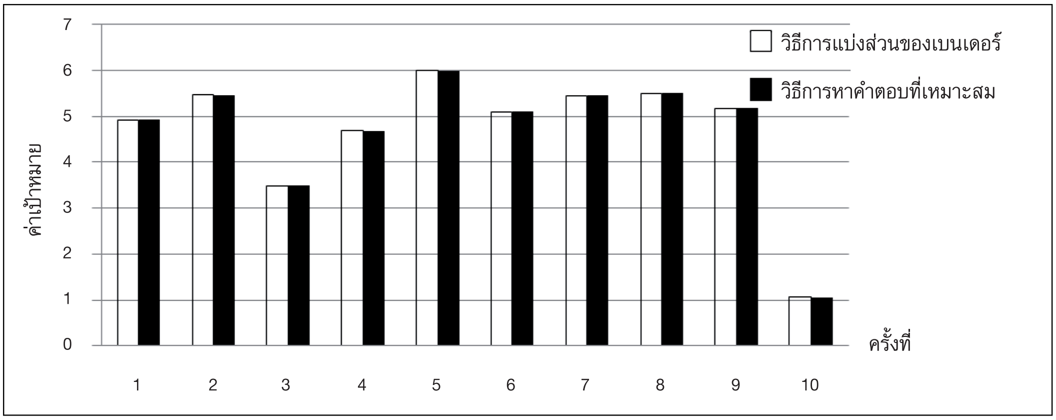


ภาพที่ 2 การลู่เข้าของค่าเป้าหมายตัวแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่งานกับทรัพยากรเท่ากับ 5 และ 10

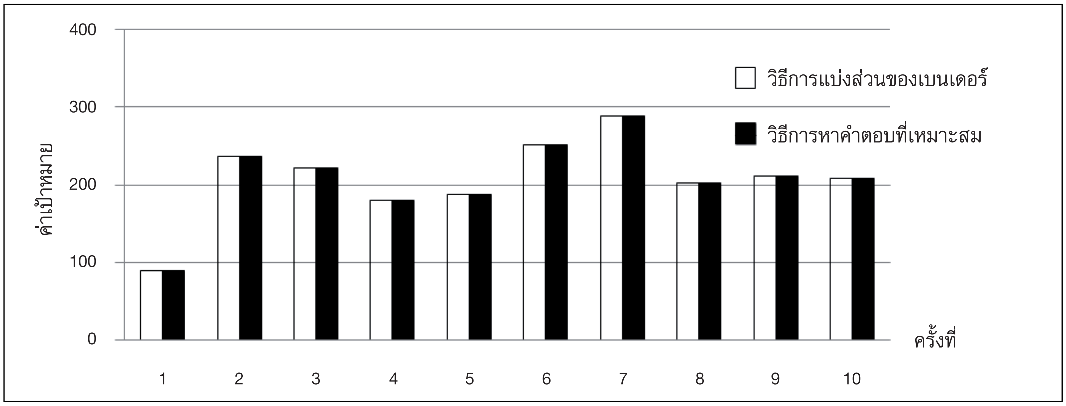
จากภาพที่ 2 การลู่เข้าของคำตอบจากการแก้ปัญหาในกรณีปัญหาตัวแบบลดรูป โดยเพิ่มจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด พบว่าในช่วงต้นค่าเป้าหมายจะลดลงอย่างรวดเร็วและค่อยๆ ลดลงอย่างช้าๆ ซึ่งแสดงได้ว่าเพิ่มจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีผลต่อการลู่เข้าของคำตอบ กล่าวคือ ถ้าจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเพิ่มขึ้นจนถึงจุดหนึ่งแล้วค่าเป้าหมายจะเปลี่ยนแปลงน้อยมากหรือไม่เปลี่ยนเลย ซึ่งเรียกได้ว่าเกิดการลู่เข้าของค่าเป้าหมาย สิ่งที่น่าสนใจอีกประการคือเวลาที่ใช้ในการประมวลผลด้วยกรณีที่ตัวแบบเต็มรูปและตัวแบบลดรูปว่ามีความแตกต่างกันหรือไม่ ดังนั้นจึงใช้วิธีการทางสถิติมาทำการทดสอบซึ่งพบว่าค่าเฉลี่ยของเวลาที่ใช้ในการประมวลผลมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญในทุกกรณีที่นำมาเปรียบเทียบกัน จึงสามารถสรุปได้ว่าตัวแบบลดรูปมีประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาดีกว่าตัวแบบเต็มรูป โดยวิธีทั้งสองให้ค่าเป้าหมายของปัญหาที่เท่ากัน สาเหตุที่ตัวแบบลดรูปมีประสิทธิภาพดีว่าตัวแบบเต็มรูป เพราะตัวแบบลดรูปเป็นการแก้ปัญหาที่ไม่ซับซ้อน ตัวแบบถูกลดรูปให้อยู่ในปัญหาการจัดงานรูปแบบมาตรฐานส่งผลทำให้จำนวนตัวแปรตัดสินใจลดลงอย่างมาก ดังนั้นจึงทำให้ลดเวลาในการแก้ปัญหาตามไปด้วย ผลการทดลองเบื้องต้นแสดงหลักฐานเชิงวิทยาศาสตร์ ซึ่งชี้ให้เห็นถึงการขยายขีดความสามารถของการแก้ปัญหาปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม แต่ปัญหายังคงมีอยู่และสามารถที่จะดำเนินการวิจัยต่อไป

2. ผลการทดสอบเวลาที่ใช้ในการประมวลผลในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 จะใช้วิธีแก้ปัญหาโดย วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ ซึ่งก่อนที่นำวิธีนี้มาใช้กับปัญหาที่มีขนาดใหญ่ ได้มีการทดสอบประสิทธิผลของวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ ซึ่งพิจารณาจากการเปรียบเทียบค่าเป้าหมายของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ได้จากวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุด จากนั้นนำค่าที่ได้มาทดสอบความแตกต่าง

ระหว่างค่าเฉลี่ยสองค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่ไม่เป็นอิสระจากกันด้วยความเชื่อมั่น 95% ต่อไปเป็นการแสดงการเปรียบเทียบค่าเป้าหมายของการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม เพื่อให้เห็นค่าความแตกต่างระหว่างค่าเป้าหมายของ 2 วิธีตามที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น แสดงดังภาพ



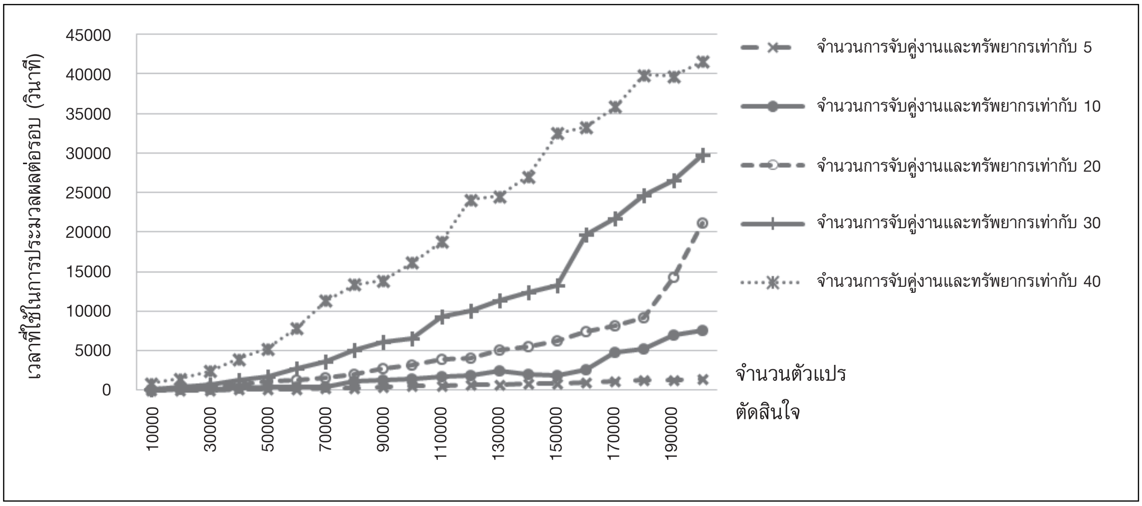
ภาพที่ 3 ค่าเป้าหมายของตัวแบบซึ่งแก้ปัญหาโดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่มีจำนวนการจับคู่ของงานกับทรัพยากรเท่ากับ 2



ภาพที่ 4 ค่าเป้าหมายของตัวแบบซึ่งแก้ปัญหาโดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่มีจำนวนการจับคู่ของงานกับทรัพยากรเท่ากับ 3

จากภาพที่ 3 และ 4 ได้ทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเป้าหมายของตัวแบบที่ถูกแก้ปัญหาโดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม ซึ่งใช้การทดสอบด้วยวิธีทางสถิติ คือ การทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยสองค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่ไม่เป็นอิสระจากกันเมื่อทดสอบประสิทธิผลของวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม พบว่าค่าเป้าหมายที่ได้ไม่แตกต่างกัน ดังนั้นจึงนำวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์มาทดสอบการลู่เข้าของคำตอบของปัญหาที่มีขนาดใหญ่ต่างๆ กัน ได้แก่ จำนวนการจับคู่ของงานกับทรัพยากรเท่ากับ 5 10 20 30 และ 40 โดยจะเพิ่มจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ ที่ทำให้ตัวแปรตัดสินใจอยู่ระหว่าง 10,000 – 200,000 ตัวแปร เมื่อเพิ่มจำนวนการจับคู่ของงานกับทรัพยากรเท่ากับ 40 พบว่าการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB ไม่สามารถคำนวณค่าได้

ซึ่งโปรแกรมจะแสดงค่าขอบเขตบนที่เท่ากับ NaN (Not A Number) ซึ่งมีความหมายว่าค่าที่คำนวณไม่สามารถหาค่าได้ จะเกิดขึ้นได้ในกรณีที่ $0 \times Inf$, $\frac{0}{0}, \frac{Inf}{Inf}$ หรือ $(+Inf) + (-Inf)$ *(Inf)* ย่อมาจากคำว่า "Infinity" ซึ่งหมายถึงค่าที่คำนวณได้มีค่าสูงมาก ๆ) และเมื่อตรวจสอบทุกค่าที่คำนวณได้พบว่าค่าผลรวมของความน่าจะเป็นของการจัดงานที่เกิดขึ้นทั้งหมดที่เป็นตัวส่วนในการคำนวณค่าขอบเขตบนมีค่าน้อยมาก (ในกรณีนี้มีค่า น้อยกว่า) จึงถูกปัดให้เป็นศูนย์ ดังนั้นจึงเกิดกรณี NaN ได้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงปรับให้ความน่าจะเป็นของการจัดงานมีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม (uniform) กล่าวคือ ค่าความน่าจะเป็นซึ่งจะเกิดขึ้นในแต่ละเหตุการณ์มีค่าเท่ากันคือ $\frac{1}{nscen}$ (nscen ในที่นี้ได้ถูกกล่าวในการประกาศตัวแปรในชุดคำสั่งโปรแกรม MATLAB ซึ่งหมายถึง จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด) ซึ่งจะทำให้ค่าผลรวมของความน่าจะเป็นของทางเลือกการจัดงานที่เกิดขึ้นทั้งหมดเท่ากับ 1 จึงทำให้ได้ค่าฯ ลดลงและสามารถแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ได้ และผลการทดลองของเวลาในการประมวลผลสามารถแสดงได้ดังรูปภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 5 เวลาในการประมวลผลต่อรอบของการแก้ปัญหาตัวแบบโดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ที่มีจำนวนการจับคู่ของงานกับทรัพยากรต่างๆ กัน

จากภาพที่ 5 พบว่า เวลาในการประมวลผลต่อรอบของการแก้ปัญหาตัวแบบการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มโดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ที่มีจำนวนการจับคู่ของงานกับทรัพยากรเท่ากับ 5 10 และ 20 มีการเพิ่มขึ้นของเวลาที่สม่ำเสมอ ส่วนจับคู่ของงานกับทรัพยากรเท่ากับ 30 และ 40 มีการเพิ่มขึ้นของเวลาโดยจะค่อยๆ เพิ่มในช่วงแรกเมื่อผ่านไปจนถึงจุดหนึ่งเวลาที่ใช้ในการประมวลผลจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว

3. ความสามารถของการแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มด้วยวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมโดยโปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟท์เอ็กซ์เซลล์โซลเวอร์-กูโรบิ และการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์โดยโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b จากข้างต้นเป็นการทดสอบประสิทธิภาพของกระบวนการแก้ปัญหาด้วยวิธีต่างๆ ของปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม ซึ่งดูได้จากการลู่เข้าของคำตอบและเวลาที่ใช้ในการประมวลผล ต่อมาจะเป็นการศึกษาความสามารถของกระบวนการหรือวิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งในที่นี้ได้ทดสอบโดยใช้การแก้ปัญหาเชิงเส้นแบบปกติที่ทำการประมวลผลด้วยไมโครซอฟท์เอ็กซ์เซลล์โซลเวอร์-กูโรบิ ที่มีประสิทธิภาพสูงและประยุกต์ใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ที่ทำการประมวลผลด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB ได้ผลดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 เวลาในการประมวลผลของตัวแบบการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มที่มีขนาดใหญ่ (Out of Memory หมายถึงเกินหน่วยความจำที่มีอยู่)

จำนวนการจับคู่งานกับทรัพยากร (n)	จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด (N)	จำนวนตัวแปรตัดสินใจ	เวลาที่ใช้ในการประมวลผล (วินาที)	
			ประมวลผลด้วยไมโครซอฟท์ เอ็กซ์เซลล์โซลเวอร์-กูโรบิ	ประมวลผลด้วย MATLAB
5	10,000	200,025	27,752.151	24,812.074
	20,000	400,025	60,499.689	53,848.256
	30,000	600,025	131,889.322	101,760.604
	40,000	800,025	287,518.723	237,441.410
	50,000	1,000,025	Out of memory	393,050.270
10	25,000	1,000,100	Out of memory	441,087.798
50	490	100,500	-	41,800.573
60	20	8,400	-	Out of memory
100	20	18,000	-	Out of memory

จำนวนการจับคู่งานกับทรัพยากร (n)	จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด (N)	จำนวนตัวแปรตัดสินใจ	เวลาที่ใช้ในการประมวลผล (วินาที)	
			ประมวลผลด้วยไมโครซอฟท์ เอ็กซ์เซลล์โซลเวอร์-กูโรบิ	ประมวลผลด้วย MATLAB
5	10,000	200,025	27,752.151	24,812.074
	20,000	400,025	60,499.689	53,848.256
	30,000	600,025	131,889.322	101,760.604
	40,000	800,025	287,518.723	237,441.410
	50,000	1,000,025	Out of memory	393,050.270
10	25,000	1,000,100	Out of memory	441,087.798
50	490	100,500	-	41,800.573
60	20	8,400	-	Out of memory
100	20	18,000	-	Out of memory

จากตารางที่ 1 จะเห็นได้ว่าการแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มที่มีขนาดใหญ่ด้วยวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดด้วยการใช้ไมโครซอฟท์เอ็กซ์เซลล์โซลเวอร์-กูโรบิ ไม่สามารถคำนวณได้เมื่อมีจำนวนตัวแปรตัดสินใจมากกว่า 1,000,000 ตัวแปร แต่วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ซึ่งประมวลผลโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB สามารถใช้ในการแก้ปัญหาที่มีจำนวนตัวแปรตัดสินใจมากกว่า 1,000,000 ตัวแปรได้ แต่ใช้เวลาในการประมวลผลค่อนข้างนานและเพิ่มจำนวนการจับคู่งานและทรัพยากรเป็น 60 ตัวแปร พบว่าการแก้ปัญหาโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB ไม่สามารถประมวลผลได้ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB สามารถแก้ปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่งานและทรัพยากรตั้งแต่ 2 – 50 คู่ และสามารถประมวลผลในกรณีที่จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเพิ่มขึ้นอย่างไม่จำกัดได้

5. บทสรุปและข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้ได้พัฒนาตัวแบบโดยการรวมปัจจัยความไม่แน่นอนกับปัญหาการจัดงานเข้าด้วยกันโดยอาศัยแนวทางแบบจำลองสองขั้นตอน จากนั้นได้แบ่งการวิจัยออกเป็น 2 กรณีคือกรณีแรก กรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่มีค่าไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ ซึ่งได้นำเสนอวิธีการลดรูปตัวแบบ เพื่อแก้ปัญหานี้ พบว่าการแก้ปัญหาด้วยตัวแบบลดรูปมีประสิทธิภาพมากกว่าการแก้ปัญหาด้วยตัวแบบเต็มรูปและกรณีที่สอง กรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่มีค่าไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 พบว่าไม่สามารถใช้ตัวแบบลดรูปในการแก้ปัญหาได้ จึงใช้วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดในการประมวลผล เมื่อขยายขนาด

ของปัญหาให้เพิ่มขึ้นจนถึง 1,000,000 ตัวแปร พบว่าโปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟท์เอ็กซ์เซลล์โซลเวอร์-กูโรบิไม่สามารถประมวลผลได้ จึงนำวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์มาประยุกต์ใช้กับปัญหานี้ ซึ่งสามารถใช้กับกรณีนี้ได้ แต่เวลาที่ใช้ในการประมวลผลค่อนข้างนาน ในงานวิจัยนี้ได้ประยุกต์ใช้วิธีการดังกล่าวโดยใช้การเขียนโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB ซึ่งปัญหานี้อาจจะสามารถใช้ซอฟต์แวร์อื่นๆ รวมทั้งการเพิ่มหน่วยความจำ RAM มาใช้ในการแก้ปัญหาเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการประมวลผลได้ สำหรับแนวทางการพัฒนาในอนาคตจะเป็นการค้นคว้าหาวิธีการสุ่มจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้จากทางเลือกต่างๆภายใต้ความไม่แน่นอน ให้มีจำนวนที่ลดลงและสามารถประมาณคำตอบที่ใกล้เคียงกับคำตอบที่แท้จริงเชิงประชากรเพื่อเป็นการเพิ่มประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาขนาดใหญ่ $(n > 50)$ ต่อไป

6. เอกสารอ้างอิง

1. Benders, J.F., 1962, “Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems”, *Numer. Math.* Vol. 4, No. 3, pp. 238–252.

2. Burkard, R.E. and Derigs, V. 1980, *Assignment and Matching Problems*: Solution Method with FORTRAN Programs, Springer Heidelberg Dordrecht, London & New York.

3. Dantzig, G.B., 1955, “Linear Programming under Uncertainty”, *Management Science* Vol.1, pp. 197-206.

4. Kuhn, H.W., 1955, “The Hungarian Methods for the Assignment Problem”, in Michael Junger et al. *50 Years of Integer Programming 1958-2008*, Springer Heidelberg Dordrecht, London & New York, pp. 29-48.

5. Wagner, H.M. 1975, *Principles of Operations Research: with Applications to Managerial Decisions*, 2nd Ed., Prentice Hall, New Jersey.

6. *Gurobi Solver Engine LP/MIP Software*, [online], Available: www.solver.com/.

7. *MathWorks Documentation Center*, [online], Available: www.mathworks.com/help/index.html.

8. Birge, J.B. and Ho. J.K., 1987, “The Stochastic Dynamic Traffic Assignment Problem”, [online], Available: http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/3650/bal9395. 0001.001.pdf?sequence=5.

9. Infanger, G. 1994, *Planning under Uncertainty: Solving Large-Scale Stochastic Linear Programs*, Boyd and Fraser, Massachusetts.

10. Powell, W.B., 1995, “A Stochastic Formulation of the Dynamic Assignment Problem, with an Application in Truckload Carriers”, [online], Available: http://www.castlelab.princeton.edu/ Papers/tl__main.pdf.

11. Spoerl, D.R. and Wood, K.R., 2004, “A Stochastic Generalized Assignment Problem,” [online], Available: http://faculty.nps.edu/kwood/docs/SpoerlWoodWPJan04.pdf.

12. De La Torre, L.E. Dolinskaya, I.S. and Smilowitz, K.R., 2012, “The Stochastic Generalized Assignment Problem with Coordination Constraints”, [online], Available: http://users.iems. northwestern.edu/~dolira/delatoree-dolinskaya-12-03.pdf.

13. Kittitavornkul, K. and Pimsakul, S., 2012, “Scheduling of Inbound and Outbound Trucks in Retail Cross Docking Distribution Center by Heuristic Methods,” *KMUTT Research and Development Journal*, Vol. 35, No. 2, pp. 219-233. (In Thai)