การวิเคราะห์ทางสถิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่มีความสมมาตรตามแนวแกนติดตั้งในทะเลลึก

วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา[1*], สมชาย ชูชีพสกุล[2]
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี กรุงเทพฯ
และ Tseng Huang[3]
University of Texas at Arlington, USA

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่มีความสมมาตรตามแนวแกนติดตั้งในทะเลลึกโดยใช้ทฤษฎีเมมเบรน การคำนวณหารูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางจะอาศัยหลักการของเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ การศึกษาครั้งนี้จะจำลองโครงสร้างเปลือกบางด้วยชิ้นส่วนของคานแบบ 1 มิติ โดยทำการแบ่งเป็นชิ้นส่วนย่อยๆ ในระบบพิกัดเชิงขั้วแบบทรงกลม สำหรับฟังก์ชั่นพลังงานของระบบโครงสร้างเปลือกบางสามารถสร้างได้จากหลักการของงานเสมือนในเทอมของค่าการเสียรูปและเขียนในรูปแบบที่เหมาะสม การเสียรูปทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางสามารถคำนวณได้โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เชิงเส้น ซึ่งผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสามารถแก้ได้โดยใช้วิธีกระบวนการทำซ้ำ ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่แสดงค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของฐานรองรับ, อัตราส่วนความลึกของระดับน้ำทะเล และอัตราส่วนความยาวรัศมีต่อความหนาของโครงสร้างเปลือกบางได้นำเสนอในบทความนี้

คำสำคัญ : โครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่มีความสมมาตรตามแนวแกน / ทฤษฎีเมมเบรน / เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ / ระบบพิกัดเชิงขั้วแบบทรงกลม / หลักการของงานเสมือน / วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

* *Corresponding author E-mail : jiammeepreecha.w@gmail.com*

1 *นักศึกษาปริญญาเอก ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์*

2 *ศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์*

3 *Late Professor, Department of Civil Engineering.*

Nonlinear Static Analysis of Deep Water Axisymmetric Spherical Half Drop Shell

Weeraphan Jiammeepreecha[1*], **Somchai Chucheepsakul**[2]
King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangkok
and Tseng Huang[3]
University of Texas at Arlington, USA

Abstract

This paper presents a nonlinear static analysis of a deep water axisymmetric half drop shell by using membrane theory. Differential geometry is introduced in order to compute the shell geometry. In this study, the shell is simulated using one-dimensional beam elements described in spherical polar coordinates. Energy functional of the shell is derived from the principle of virtual work in terms of displacements and it is expressed in the appropriate forms. The static deformed configuration of the shell can be obtained by using the nonlinear finite element method in which the numerical solutions are solved by using the iterative procedure. The effects for different boundary supported conditions, sea water depth ratios, and radius-to-thickness ratios on the displacement of the half drop shell are presented in this paper.

Keywords : Axisymmetric Half Drop Shell / Membrane Theory / Differential Geometry / Spherical Polar Coordinates / Principle of Virtual Work / Finite Element Method

---

* *Corresponding author E-mail: jiammeepreecha.w@gmail.com*
[1] *Ph.D. Student, Department of Civil Engineering.*
[2] *Professor, Department of Civil Engineering.*
[3] *Late Professor, Department of Civil Engineering.*

1. บทนำ

โครงสร้างเปลือกบาง (shell structures) ถูกนำมาใช้งานกันอย่างแพร่หลายทั้งในอดีตและปัจจุบันเนื่องจากโครงสร้างประเภทนี้มีประสิทธิภาพสูงสามารถต้านทานแรงกระทำจากภายนอกได้เป็นอย่างดี [1] โดยเฉพาะอย่างยิ่งกับโครงสร้างเปลือกบางที่มีความสมมาตรตามแนวแกน (axisymmetric shells) ซึ่งเป็นที่นิยมใช้ในวิศวกรรมหลายแขนง อาทิเช่นวิศวกรรมโครงสร้าง, วิศวกรรมเครื่องกล, วิศวกรรมการบิน, วิศวกรรมทางทะเล และวิศวกรรมนอกชายฝั่งทะเล เป็นต้น [2-6] นอกจากนี้ยังสามารถประยุกต์ใช้ในงานทางด้านกลศาสตร์ชีวภาพ (biomechanics) ซึ่งนำไปใช้เป็นแบบจำลองของกระจกตา (cornea) และสมอง (brain) ของมนุษย์ได้เช่นเดียวกัน [7-9]

จากการศึกษางานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องกับโครงสร้างเปลือกบางที่มีความสมมาตรตามแนวแกนได้แก่งานวิจัยของ Spotts [10], Langhaar [11], Horvay และคณะ [12], Timoshenko และ Krieger [13], Flügge [14], Goldenveiser [15], และ Kraus [16] จะพบว่าบางส่วนของงานวิจัยเหล่านี้จะใช้วิธีการวิเคราะห์ (analytical method) ในการแก้ปัญหา แต่วิธีการนี้จะสามารถใช้ได้เฉพาะโครงสร้างเปลือกบางที่เป็นปัญหาอย่างง่ายๆ แต่สำหรับโครงสร้างเปลือกบางที่มีความซับซ้อนส่วนมากจะนิยมเลือกใช้วีธีการเชิงตัวเลขมาแก้ปัญหาดังกล่าว เช่น วิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method), วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์, วิธียิงเป้าและวิธีการบาวดารีอินทิกรัล เป็นต้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งเป็นวิธีที่กำลังได้รับความนิยมในการแก้ปัญหาทางด้านวิศวกรรมในปัจจุบัน อาทิเช่น งานวิจัยของ Peshkam และ Delpak [17, 18] ซึ่งได้ทำการพัฒนาวิธีการวิเคราะห์โดยการแปรผันเพื่อศึกษาพฤติกรรมแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางที่หมุนรอบแกน (rotational shells) โดยที่สมการจะอาศัยหลักการแปรผันกำลังสองของสมการพลังงานศักย์รวมและใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการแก้ปัญหา และในงานวิจัยของ Polat และ Calayir [19] ได้นำเสนอสมการสำหรับใช้ในการตรวจสอบโครงสร้างเปลือกบางโดยอาศัยหลักการของวิธีโททอลลากรองจ์ (total Lagrangian approach) และใช้วิธีอินทิเกรตโดยตรงของนิวมาร์ค (Newmark integration) และกระบวนการนิวตัน-ราฟสันในการหาคำตอบเชิงตัวเลข

สำหรับงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโครงสร้างเปลือกบางที่นำมาใช้ในงานทางด้านวิศวกรรมนอกชายฝั่งถูกนำเสนอโดย Willson และคณะ [20] โดยทำการศึกษาโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วงยาง (toroidal shell) ติดตั้งอยู่ในทะเล ซึ่งลักษณะของโครงสร้างประเภทนี้คือจะไม่มีการตัดกันรอบแกนหมุน (axis of revolution) ต่อมา Royles และ Llambias [21] ได้ทำการศึกษาความเป็นไปได้สำหรับการติดตั้งถังรับแรงดันที่บรรจุปิโตรเลียมเหลว (LNG) ซึ่งวางอยู่ใต้น้ำ หลังจากนั้น Yasuzawa [22] ได้ทำการศึกษาโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่มีความสมมาตรตามแนวแกนติดตั้งในน้ำโดยใช้ทฤษฎีเมมเบรนในการวิเคราะห์ ซึ่งจะพบว่าค่าการเสียรูปและค่าความเค้นของเมมเบรนจะมีค่าสม่ำเสมอตลอดแนวเส้นเมอร์ริเดียนยกเว้นตรงบริเวณฐานรองรับ

สำหรับวัตถุประสงค์ของงานวิจัยในครั้งนี้คือเพื่อนำเสนอถึงผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดแบบครึ่งทรงกลมที่มีความสมมาตรตามแนวแกนรองรับแรงดันน้ำสถิตแบบเชิงเส้น โดยในการศึกษาครั้งนี้จะรวมผลของค่าการเสียรูปและการหมุนที่มีขนาดใหญ่เข้าไปในสมการ ซึ่งลักษณะปัญหาดังกล่าวจะสามารถเขียนได้ในรูปแบบการแปรผัน (variational form) โดยใช้ทฤษฎีของเชลล์ [1] และเขียนในรูปแบบที่เหมาะสม [23] ซึ่งจะสะดวกในแก้ปัญหาแบบไม่เป็นเชิงเส้นและลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณลง การเสียรูปทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางสามารถคำนวณได้โดยใช้หลักการของงานเสมือน [24] และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับระบบสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นสามารถแก้ได้โดยใช้วิธีกระบวนการทำซ้ำ (iterative process) โดยที่การเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางเมื่อรับแรงดันน้ำสถิตแบบเชิงเส้นเป็นสิ่งที่ต้องคำนวณหา

2. สมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์

2.1 วัสดุของโครงสร้างเปลือกบางมีคุณสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น (linearly elastic)

2.2 ความหนาของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าคงที่และไม่มีการเปลี่ยนแปลงทั้งก่อนและหลังการเสียรูป

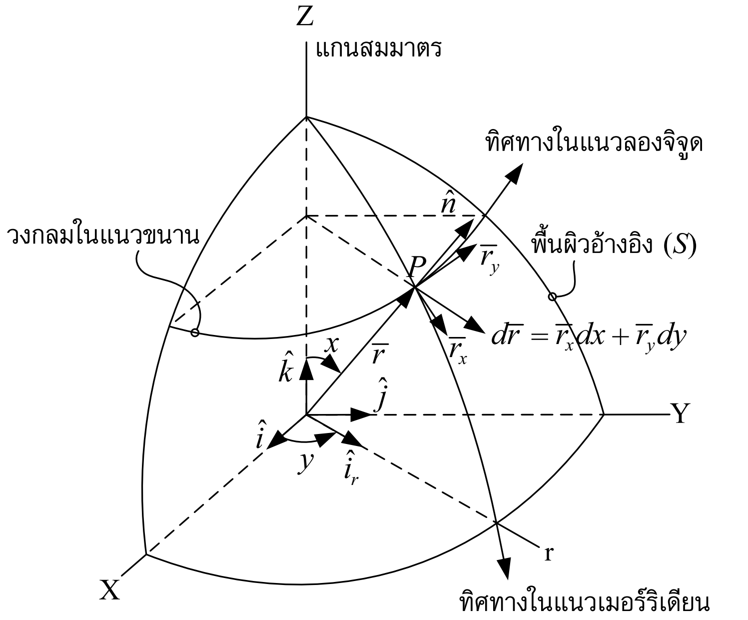
2.3 น้ำหนักของโครงสร้างเปลือกบางจะสมมติว่ามีค่าน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับค่าแรงดันสถิตของน้ำจึงไม่นำมาพิจารณา

2.4 เงื่อนไขของฐานรองรับจะสมมติให้เป็นแบบยึดหมุนและยึดแน่นอย่างสมบูรณ์แบบที่บริเวณพื้นทะเล

3. รูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบาง

กำหนดให้ X, Y, Z คือระบบพิกัดฉาก (rectangular coordinate) และ S คือพื้นผิวอ้างอิงของโครงสร้างเปลือกบางที่ตำแหน่งกึ่งกลางของความหนา (middle surface) ดังแสดงในรูปที่ 1 ซึ่งสามารถนิยามได้ด้วยสมการ $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$ และ $Z = Z(x, y)$ เมื่อ (x, y) คือค่าพารามิเตอร์ของพื้นผิว (surface parameters) โดยวัดตามแนวเส้นพิกัดเมอร์ริเดียนและเส้นพิกัดลองจิจูดตามลำดับ สำหรับกรณีที่พื้นผิวมีความสมมาตรตามแนวแกน จะเกิดการเปลี่ยนแปลงเฉพาะเส้นเมอร์ริเดียนเท่านั้น ดังนั้นเมื่อกำหนดให้ตำแหน่งจุดใดๆ บนพื้นผิว S จึงสามารถนิยามได้ด้วยสมการเวคเตอร์ $\bar{r} = \bar{r}(x, y)$ และเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง $\bar{r}$ จะสามารถนิยามได้โดยใช้รัศมีของวงกลมในแนวขนาน r ดังสมการ

$$\bar{r} = r\cos y\,\hat{i} + r\sin y\,\hat{j} + Z\,\hat{k} \tag{1}$$



รูปที่ 1 พื้นผิวอ้างอิงของโครงสร้างเปลือกบาง

เมื่อ $r = r(x)$ และ $z = z(x)$ โดยที่ผลรวมเชิงอนุพันธ์ของความยาวชิ้นส่วน $\bar{r}$ สามารถหาได้ดังสมการ

$$d\bar{r} = \bar{r}_x\,dx + \bar{r}_y\,dy \tag{2}$$

ในที่นี้ตัวห้อย x และ y แสดงถึงอนุพันธ์ย่อยตามแนวระบบพิกัดของโครงสร้างเปลือกบาง ดังนั้นความยาวของชิ้นส่วน ds สามารถหาได้จากสมการ

$$ds^2 = d\bar{r} \cdot d\bar{r} \tag{3}$$

จากหลักการเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (differential geometry) จะได้ว่ารูปแบบพื้นฐานอันดับหนึ่ง (first fundamental form) ของพื้นผิวอ้างอิง S จะสามารถแสดงส่วนประกอบของเมตริกซ์เทนเซอร์ (metric tensor) ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$E = \bar{r}_x \cdot \bar{r}_x \quad (4)$$

$$F = \bar{r}_x \cdot \bar{r}_y \quad (5)$$

$$G = \bar{r}_y \cdot \bar{r}_y \quad (6)$$

และรูปแบบพื้นฐานอันดับสอง (second fundamental form) ของพื้นผิวอ้างอิง S แสดงส่วนประกอบของเมตริกซ์ความโค้ง (metric curvature) ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$e = \frac{\bar{r}_{xx} \cdot (\bar{r}_x \times \bar{r}_x)}{D} = \bar{r}_{xx} \cdot \hat{n} \quad (7)$$

$$f = \frac{\bar{r}_{xy} \cdot (\bar{r}_x \times \bar{r}_y)}{D} = \bar{r}_{xy} \cdot \hat{n} \quad (8)$$

$$g = \frac{\bar{r}_{yy} \cdot (\bar{r}_x \times \bar{r}_y)}{D} = \bar{r}_{yy} \cdot \hat{n} \quad (9)$$

เมื่อ $\hat{n}$ คือเวคเตอร์ในแนวตั้งฉากกับพื้นผิวอ้างอิง S ซึ่งจะมีค่า $\hat{n} = (\bar{r}_x \times \bar{r}_x) / D$ โดยที่ $D = \left|\bar{r}_x \times \bar{r}_y\right| = \sqrt{EG - F^2}$ และค่าความโค้งหลัก (principal curvatures) κ ของพื้นผิวอ้างอิง S สามารถหาได้ดังสมการ

$$\kappa = \frac{edx^2 + 2fdxdy + gdy^2}{Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2} \quad (10)$$

ในกรณีของโครงสร้างเปลือกบางที่มีความสมมาตรตามแนวแกนจะพบว่าเส้นโค้งหลักจะซ้อนทับกับเส้นพิกัด แสดงว่าค่า $F = f = 0$ ดังนั้นจากสมการที่ (10) จะได้ค่าความโค้งหลัก $\kappa_1 = e/E$ และ $\kappa_2 = g/G$

4. การเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบาง

เมื่อโครงสร้างเปลือกบางเกิดการเสียรูปจะทำให้พื้นผิวอ้างอิง S เคลื่อนที่ไปยังพื้นผิวที่ตำแหน่งใหม่ S^* ดังนั้นเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง $\bar{R}$ บนพื้นผิวที่เกิดการเสียรูป S^* โดยอ้างอิงจากตำแหน่งของเวคเตอร์ระบุตำแหน่ง $\bar{r}$ บนพื้นผิวที่อ้างอิง S ที่ตำแหน่งเดียวกันคือ

$$\bar{R} = \bar{r} + \bar{q} = \bar{r} + \frac{\bar{r}_x}{\sqrt{E}} u + \hat{n} w \quad (11)$$

เมื่อ $\bar{q}$ คือเวคเตอร์ของระยะการเสียรูปจากพื้นผิวอ้างอิง S ไปยังพื้นผิวที่เกิดการเสียรูป S^*

u คือค่าการเสียรูปตามแนวสัมผัสกับเส้นเมอร์ริเดียน

w คือค่าการเสียรูปในแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน

กำหนดให้ $A = \sqrt{E}$ และ $B = \sqrt{G}$ ดังนั้น $\bar{R}_x$ และ $\bar{R}_y$ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\bar{R}_x = \left(A + u_x - \frac{e}{A} w\right) \frac{\bar{r}_x}{A} + \left(\frac{e}{A} u + w_x\right) \hat{n} \quad (12)$$

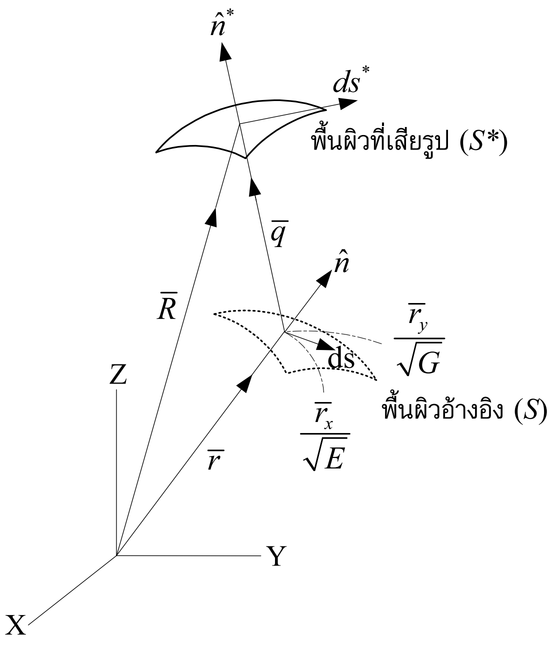
$$\bar{R}_y = \left(B + \frac{B_x}{A} u - \frac{g}{B} w\right) \frac{\bar{r}_y}{B} \quad (13)$$

สำหรับส่วนประกอบของเมตริกซ์เทนเซอร์ของพื้นผิวที่เสียรูป S^* สามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$E^* = \bar{R}_x \cdot \bar{R}_x = \left(A + u_x - \frac{e}{A} w\right)^2 + \left(\frac{e}{A} u + w_x\right)^2 \quad (14)$$

$$F^* = \bar{R}_x \cdot \bar{R}_y = 0 \quad (15)$$

$$G^* = \bar{R}_y \cdot \bar{R}_y = \left(B + \frac{B_x}{A} u - \frac{g}{B} w\right)^2 \quad (16)$$



รูปที่ 2 การเสียรูปและเวคเตอร์ระบุตำแหน่งของโครงสร้างเปลือกบาง

5. ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับระยะการเสียรูป

เมื่อพิจารณาความยาวชิ้นส่วนใดๆ บนพื้นผิวอ้างอิง S ซึ่งมีระยะ ds จะสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2 \tag{17}$$

เมื่อชิ้นส่วนเกิดการเสียรูปจะทำให้ระยะความยาว ds จะเปลี่ยนเป็น ds^* โดยสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$ds^{*2} = E^* dx^2 + 2F^* dxdy + G^* dy^2 \tag{18}$$

ดังนั้นค่าความเครียดของความยาวชิ้นส่วนในทิศทางของระบบพิกัดซึ่งสามารถนิยามได้จากการเปลี่ยนแปลงความยาวเวคเตอร์ของชิ้นส่วนในรูปยกกำลังสองเทียบกับความยาวของชิ้นส่วนที่สภาวะก่อนการเสียรูป [25] โดยเขียนในเทอมของเมตริกซ์เทนเซอร์ ดังสมการต่อไปนี้

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{E^*}{E} - 1\right) \tag{19}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{G^*}{G} - 1\right) \tag{20}$$

ซึ่งค่าความเครียดดังกล่าวข้างต้นนี้จะแตกต่างจากค่าความเครียดทางวิศวกรรม (engineering strain) ε_e ซึ่งจะมีค่า $\varepsilon_e = (ds^* / ds) - 1$ ดังนั้น $\varepsilon = \varepsilon_e + (\varepsilon_e^2 / 2)$ และเมื่อแทนค่าจากสมการที่ (14) ถึง (16) ลงไปในสมการที่ (19) และ (20) จะได้สมการสำหรับคำนวณหาค่าความเครียดดังต่อไปนี้

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A}u_x - \frac{e}{A^2}w + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}u_x - \frac{e}{A^2}w\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{A^2}u + \frac{1}{A}w_x\right)^2 \tag{21}$$

$$\varepsilon_y = \frac{B_x}{AB}u - \frac{g}{B^2}w + \frac{1}{2}\left(\frac{B_x}{AB}u - \frac{g}{B^2}w\right)^2 \tag{22}$$

กำหนดให้ $\{g\}^T = \lfloor u \; w \; u_x \; w_x \rfloor$ ดังนั้นค่าความเครียดสามารถแบ่งออกได้เป็นสองส่วนคือส่วนที่เป็นเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น โดยสามารถเขียนในรูปแบบดัชนี (index form) ได้ดังนี้

$$\varepsilon_x = \varepsilon_i^L + \varepsilon_i^N = L_k^i g_k + \frac{1}{2} H_{kl}^i g_k g_l \tag{23}$$

เมื่อ L_k^i และ H_{kl}^i คือเวคเตอร์และเมตริกซ์สมมาตร ตามลำดับ

6. พลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบาง

พลังงานความเครียด U สำหรับโครงสร้างที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้นทั่วไปสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$U = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{2\pi} \{\varepsilon\}^T [C'] \{\varepsilon\} t \, Ddydx \tag{24}$$

ในที่นี้ $$[C'] = \frac{E'}{1 - v^2}\begin{bmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

เมื่อ $[C']$ คือเมตริกซ์คุณสมบัติของวัสดุโครงสร้างเปลือกบาง

t คือความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง

E' คือโมดูลัสยืดหยุ่น

v คืออัตราส่วนปัวส์ซอง

สำหรับพลังงานความเครียด U ในสมการที่ (24) สามารถเขียนในรูปแบบดัชนี ได้ดังสมการ

$$U = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{2\pi} \varepsilon_i C_{ij} \varepsilon_j tDdydx \tag{26}$$

ในที่นี้ $C_{ij} = C_{ji}$ ดังนั้นเมื่อแทนค่าจากสมการที่ (23) ลงไปในสมการที่ (26) จะได้สมการสำหรับคำนวณหาค่าความเครียดดังต่อไปนี้

$$U = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{2\pi}\left(C_{ij}\varepsilon_i^L\varepsilon_j^L + 2C_{ij}\varepsilon_i^L\varepsilon_j^N + C_{ij}\varepsilon_i^N\varepsilon_j^N\right) tDdydx \tag{27}$$

เมื่อ $\varepsilon_i^L\varepsilon_j^L$, $\varepsilon_i^L\varepsilon_j^N$ และ $\varepsilon_i^N\varepsilon_j^N$ คือฟังก์ชั่นในเทอมของ $\{g\}$ ซึ่งมีดีกรีกำลังสอง, กำลังสาม, และกำลังสี่ ตามลำดับ ดังนั้นค่าพลังงานความเครียดสามารถเขียนได้ในรูปแบบที่เหมาะสม [23] ดังสมการ

$$U = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{1}{2}k_{kn} + \frac{1}{6}n_{kn}^1 + \frac{1}{12}n_{kn}^2\right) g_k g_n\right] tDdydx \tag{28}$$

ในที่นี้ $$k_{kn} = C_{ij} L_k^i L_n^j \quad (29)$$

$$n_{kn}^1 = C_{ij}\left(L_k^i H_{mn}^j + L_m^i H_{nk}^j + L_n^i H_{km}^j\right) g_m \quad (30)$$

$$n_{kn}^2 = C_{ij}\left(H_{kl}^i H_{mn}^j + \frac{1}{2} H_{nk}^i H_{lm}^j\right) g_l g_m \quad (31)$$

จากสมการที่ (29) ถึง (31) จะพบว่าเมตริกซ์ k, n^1 และ n^2 เป็นเมตริกซ์สมมาตร และการแปรผันของพลังงานความเครียด δU สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\delta U = \int_{x_1}^{x_2}\int_0^{2\pi} \delta g_k \left[\left(k_{kn} + \frac{1}{2} n_{kn}^1 + \frac{1}{3} n_{kn}^2\right) g_n\right] tDdydx \quad (32)$$

7. งานเสมือนที่เกิดจากแรงดันน้ำสถิตแบบเชิงเส้น

แรงดันน้ำสถิตแบบเชิงเส้นที่กระทำในแนวตั้งฉากกับพื้นผิวของโครงสร้างเปลือกบางสามารถคำนวณได้ดังสมการ

$$p_w = \rho_w \mathrm{g} Z_w \quad (33)$$

เมื่อ ρ_w คือค่าความหนาแน่นของน้ำทะเล

g คือค่าแรงโน้มถ่วงของโลก

Z_w คือระยะในแนวดิ่งวัดจากระดับผิวน้ำทะเล

ดังนั้นงานเสมือนเนื่องจากแรงดันน้ำสถิตแบบเชิงเส้น $\delta\Omega$ สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\delta\Omega = \int_{x_1}^{x_2}\int_0^{2\pi} p_w \{\delta w\} Ddydx \quad (34)$$

เนื่องจาก p_w เป็นค่าแรงดันน้ำซึ่งเป็นแรงไม่อนุรักษ์ (nonconservative force) ติดตามการเสียรูปคือในทิศทางตั้งฉากกับโครงสร้างตลอดเวลาตามหลักการของงานเสมือน (virtual work หรือ virtual displacement) ในการพิจารณา $\delta\Omega$ เป็นการพิจารณาการแปรเปลี่ยนการเคลื่อนที่ δ_w ดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องพิจารณาการแปรเปลี่ยนของ p_w หรือ δp_w

8. ผลรวมของงานเสมือน

ผลรวมของงานเสมือนสำหรับระบบโครงสร้างเปลือกบางได้มาจากการรวมผลการแปรผันของพลังงานความเครียดและงานเสมือนเนื่องจากแรงดันน้ำสถิตแบบเชิงเส้น ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\delta\pi = \delta U + \delta\Omega = 0 \quad (35)$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่าจากสมการที่ (32) และ (34) ลงไปในสมการที่ (35) จะสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{2\pi} \delta g_k \left[\left(k_{kn} + \frac{1}{2} n_{kn}^1 + \frac{1}{3} n_{kn}^2\right) g_n\right] tDdydx + \int_{x_1}^{x_2}\int_0^{2\pi} p_w \{\delta w\} Ddydx = 0 \quad (36)$$

จากสมการข้างต้นจะพบว่าสมการดังกล่าวเขียนอยู่ในรูปของเทอมไร้มิติค่อนข้างสูง ซึ่งมีความยุ่งยากซับซ้อนในการคำนวณหาค่าผลเฉลยแม่นตรง ดังนั้นจึงมีความจำเป็นต้องใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลข

9. วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ในการแก้ปัญหาโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะต้องทำการแบ่งโครงสร้างเปลือกบางออกเป็นชิ้นส่วนย่อยๆ ตามแนวพิกัด x ดังแสดงในรูปที่ 3 ดังนั้นเมื่อพิจารณาชิ้นส่วนใดๆ จะได้ว่าค่าการประมาณค่าการเคลื่อนที่ ณ จุดต่างๆ บนชิ้นส่วนย่อยจะสามารถทำได้โดยการกำหนดให้แต่ละจุดขั้วของชิ้นส่วนย่อยมีดีกรีอิสระเท่ากับ 4 และใช้ฟังก์ชั่นโพลีโนเมียลอันดับที่สาม (cubic polynomial) เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่เพื่อหาฟังก์ชั่นรูปร่าง (shape functions) และประมาณค่าการเสียรูปในแนวสัมผัส u และแนวตั้งฉาก w ดังสมการ

$$\{g\} = [\psi]\{d\} \quad (37)$$

ในที่นี้ $$\{d\}^T = \lfloor u(0)\ w(0)\ u_x(0)\ w_x(0)\ u(\alpha)\ w(\alpha)\ u_x(0)\ w_x(\alpha) \rfloor \quad (38)$$

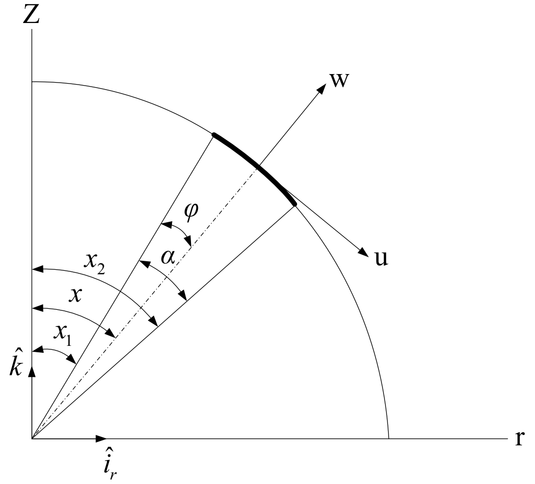
เมื่อ $\{g\}$ คือเวคเตอร์การเคลื่อนที่ที่จุดต่อ

$[\psi]$ คือเมตริกซ์ฟังก์ชั่นรูปร่างโพลีโนเมียลอันดับที่สาม

$\{d\}$ คือเวคเตอร์ของดีกรีอิสระที่จุดต่อ

ดังนั้นเมื่อแทนค่าสมการที่ (37) ลงไปในสมการที่ (36) จะสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\{\delta d\}^T \int_{x_1}^{x_2}\int_0^{2\pi} [\psi]^T \left([k] + \frac{1}{2}\,[n^1] + \frac{1}{3}\,[n^2] \right) [\psi]\, tDdydx\{d\} + \{f\} = 0 \qquad \textbf{(39)}$$



รูปที่ 3 ชิ้นส่วนทั่วไปและระยะพิกัด

ในที่นี้ $\{f\} = \{\delta w\}^T \int_{x_1}^{x_2}\int_0^{2\pi} p_w\,\{\psi\} Ddydx$ **(40)**

เนื่องจากดีกรีอิสระเฉพาะที่ (local degree of freedom) $\{d\}$ เหมือนกับดีกรีอิสระรวม (global degree of free-dom) $\{Q\}$ ดังนั้นผลรวมของงานเสมือนสำหรับระบบโครงสร้างเปลือกบางสามารถรวมได้โดยตรงโดยใช้สมการที่ (39) ซึ่งจะสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\left([K] + \frac{1}{2}\,[N_1] + \frac{1}{3}\,[N_2] \right) \{Q\} + \{F\} = \{0\} \qquad \textbf{(41)}$$

เนื่องจากโครงสร้างเปลือกบางที่มีความสมมาตรตามแนวแกนถูกนำมาพิจารณา ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่งบนสุดของโครงสร้างเปลือกบางจะมีค่าดังนี้

$$u = 0,\, w_x = 0 \qquad \textbf{(42)}$$

สำหรับเงื่อนไขที่บริเวณฐานรองรับจะพิจารณาให้เป็นแบบยึดหมุนอย่างสมบูรณ์แบบที่บริเวณพื้นทะเล โดยกำหนดให้

$$u = 0,\, w = 0 \qquad \textbf{(43)}$$

สำหรับเงื่อนไขที่บริเวณฐานรองรับจะพิจารณาให้เป็นแบบยึดแน่นอย่างสมบูรณ์แบบที่บริเวณพื้นทะเล โดยกำหนดให้

$$u = 0,\, w = 0,\, w_x = 0 \qquad \textbf{(44)}$$

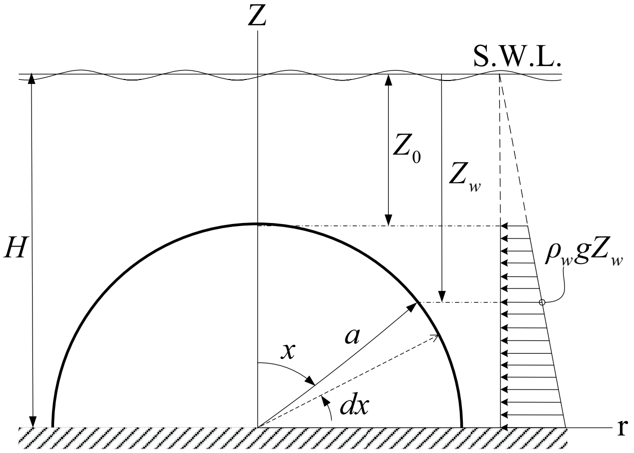
โดยที่ระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้นดังแสดงในสมการที่ (41) จะต้องทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตเนื่องจากความสมมาตรตามแนวแกนจากสมการที่ (42) พร้อมทั้งเงื่อนไขของฐานรองรับจากสมการที่ (43) หรือ (44) จึงจะสามารถคำนวนหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขได้ด้วยวิธีกระบวนการทำซ้ำ (iterative procedure)

10. ตัวอย่างการวิเคราะห์และผลลัพธ์เชิงตัวเลข

ในการนำเสนอสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของทฤษฎีของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัด (membrane shell theory) จึงได้มีการศึกษาถึงพฤติกรรมของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่มีความสมมาตรตามแนวแกนติดตั้งในทะเลลึกดังแสดงในรูปที่ 4 ซึ่งลักษณะของปัญหาดังกล่าวสามารถคำนวณหาคำตอบเชิงตัวเลขได้โดยการประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ของ Goan [26] และทำการดัดแปลงกระบวนในการแก้ปัญหาโดยเลือกใช้ตัวแปรอิสระเป็นพิกัด ในการแก้ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะทำได้โดยการเปรียบเทียบกับสูตรของ Roark [27] สำหรับกรณีที่โครงสร้างเปลือกบางแบบทรงกลมรับแรงดันภายในและภายนอกแบบสม่ำเสมอคงที่คือ

$$w = \frac{1}{2}\,\frac{pa^2}{E't}\,(1 - \nu) \qquad \textbf{(45)}$$

เมื่อ p คือค่าแรงดันคงที่



รูปที่ 4 โครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่มีความสมมาตรตามแนวแกนติดตั้งในทะเลลึก

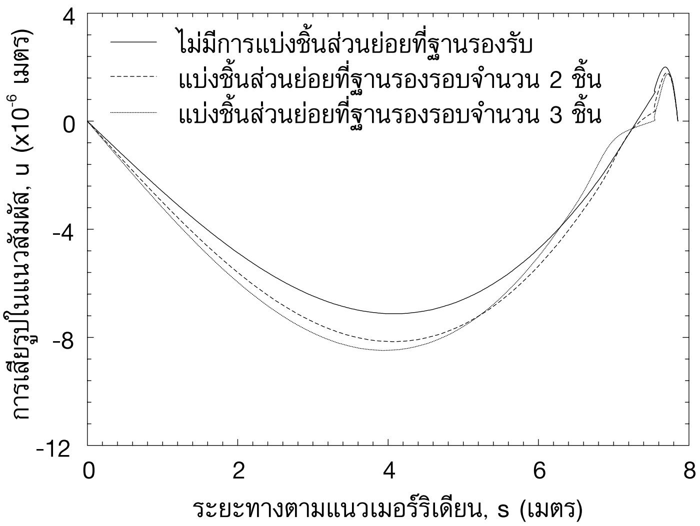
กำหนดให้แรงดันภายในคงที่มีค่า 0.5 เมกะปาสคาลและคุณสมบัติของโครงสร้างเปลือกบางสำหรับการคำนวณในครั้งนี้จะใช้ข้อมูลดังแสดงในตารางที่ 1 ซึ่งพบว่าค่าที่ได้ตรงกันดังแสดงในตารางที่ 2 และจากนั้นทำการทดสอบค่าการคำนวณเพื่อหาค่าจำนวนชิ้นส่วนย่อยที่มีความเหมาะสม โดยทำการแบ่งชิ้นส่วนย่อยตรงบริเวณฐานรองรับออกเป็น 2 และ 3 ชิ้นส่วนย่อย จะได้ผลลัพธ์ดังแสดงรูปที่ 5 และ 6 พบว่าการแบ่งจำนวนชิ้นส่วนย่อยจะส่งผลโดยตรงต่อระยะการเสียรูปในแนวเส้นสัมผัสและแนวตั้งฉาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งตรงบริเวณใกล้กับฐานรองรับ เนื่องจากการแบ่งจำนวนชิ้นที่มีความละเอียดจะเกิดการเสียรูปสูงกว่า อย่างไรก็ตามค่าการเสียรูปในแนวตั้งฉากของโครงสร้างในตำแหน่งปลายบนสุด ($x = 0$ เรเดียน) จะพบว่ามีความแตกต่างกันคือร้อยละ 2.246 และ 2.940 สำหรับกรณีโครงสร้างที่แบ่งชิ้นส่วนย่อยตรงบริเวณฐานรองรับออกเป็น 2 และ 3 ชิ้นส่วนย่อยตามลำดับ เมื่อเปรียบเทียบกับโครงสร้างที่ไม่มีการแบ่งชิ้นส่วนย่อยตรงบริเวณฐานรองรับ และเมื่อทำการแบ่งจำนวนชิ้นส่วนย่อยออกเป็น 4 ชิ้นส่วนย่อยตรงบริเวณฐานรองรับจะไม่สามารถคำนวณหาคำตอบได้ เนื่องจากผลที่ได้จากวิธีกระบวนการทำซ้ำไม่สามารถลู่เข้าคำตอบได้ ดังนั้นในงานวิจัยชิ้นนี้จึงได้กำหนดให้ใช้จำนวนของชิ้นส่วนย่อยที่มีความยาวของชิ้นส่วนเท่ากันหมด โดยไม่มีการแบ่งชิ้นส่วนย่อยตรงบริเวณฐานรองรับ

ตารางที่ 1 ข้อมูลและคุณสมบัติที่ใช้ในการวิเคราะห์

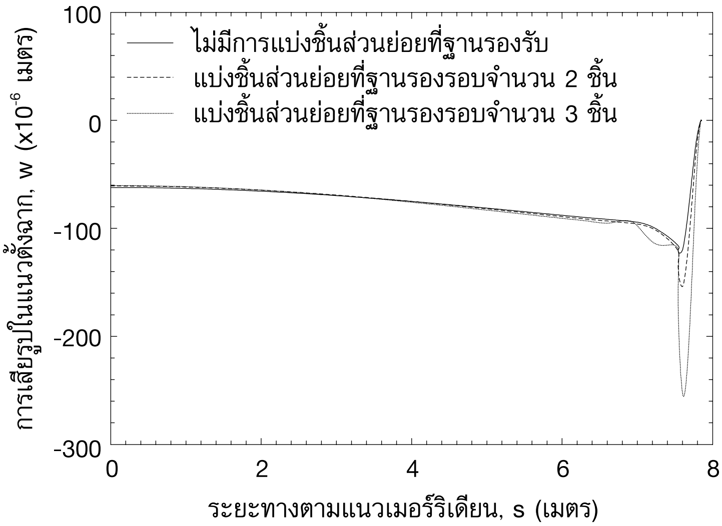
รายการ	สัญลักษณ์	ปริมาณ	หน่วย
โมดูลัสยืดหยุ่น	E'	2.04×10^{11}	นิวตัน/เมตร^2
อัตราส่วนปัวส์ซอง	v	0.30	
ความลึกของระดับน้ำทะเล	H	40	เมตร
รัศมีของโครงสร้างเปลือกบาง	a	5	เมตร
ความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง	t	0.20	เมตร
ความหนาแน่นของน้ำทะเล	ρ_w	1025	กิโลกรัม/เมตร^3

ตารางที่ 2 ผลการเปรียบเทียบระยะการเสียรูปในแนวตั้งฉากของโครงสร้างเปลือกบางแบบทรงกลมรับแรงดันภายในคงที่คือ 0.5 เมกะปาสคาล

x (เรเดียน)	**สูตรของ Roark [27] (เรเดียน)**	**งานวิจัยนี้ (เมตร)**	**ความแตกต่าง (ร้อยละ)**
0	0.107230	0.107267	-0.034505
$\pi/2$	0.107230	0.107230	0
π	0.107230	0.107194	0.033573



รูปที่ 5 การลู่เข้าคำตอบของผลการเสียรูปในแนวสัมผัสของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมเมื่อมีการแบ่งชิ้นส่วนย่อยที่ฐานรองรับ

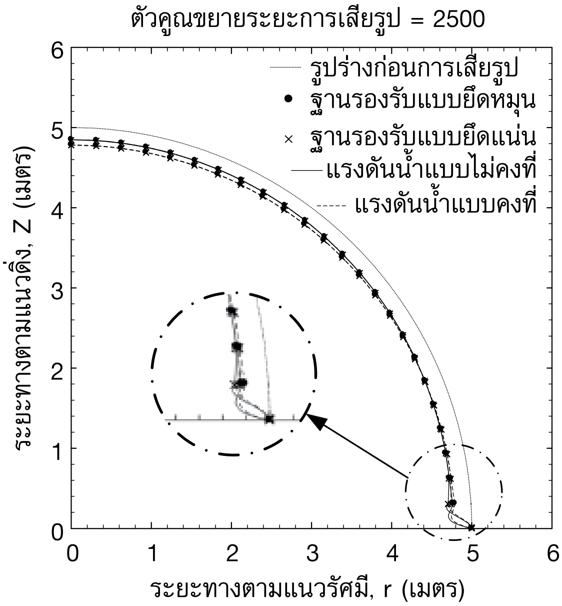


รูปที่ 6 การลู่เข้าคำตอบของผลการเสียรูปในแนวตั้งฉากของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมเมื่อมีการแบ่งชิ้นส่วนย่อยที่ฐานรองรับ

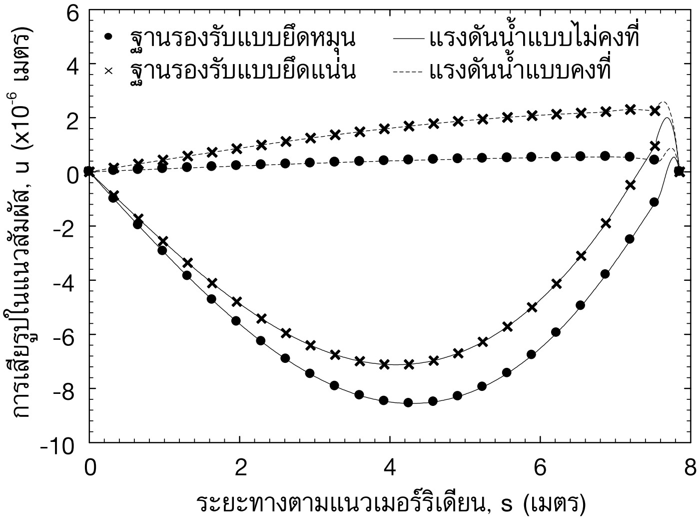
จากข้อมูลที่แสดงในตารางที่ 1 จะทำการศึกษาผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่มีความสมมาตรตามแนวแกนติดตั้งในทะเลลึก โดยทำการแปรเปลี่ยนเงื่อนไขของฐานรองรับ, ค่าอัตราส่วนความลึกของระดับน้ำทะเลต่อความยาวรัศมีของโครงสร้างเปลือกบาง, และอัตราส่วนความยาวรัศมีต่อความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง ซึ่งจะมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

10.1 ผลของเงื่อนไขฐานรองรับของโครงสร้างเปลือกบางที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลม

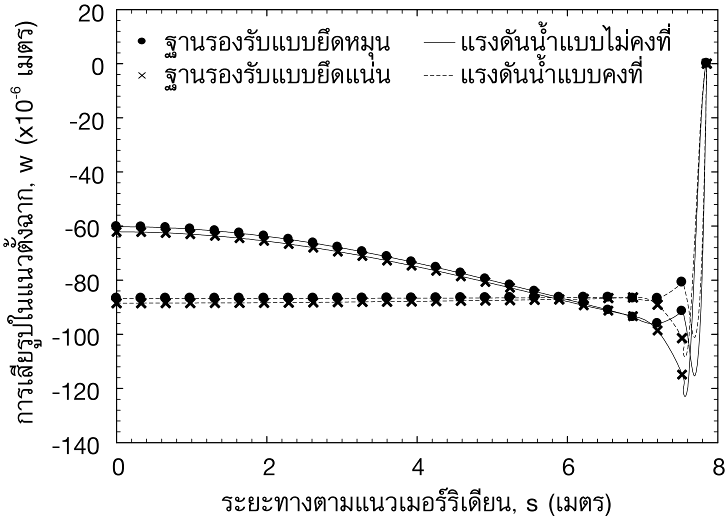
รูปที่ 7 แสดงรูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่สภาวะก่อนและหลังการเสียรูปโดยมีการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของฐานรองรับจะพบว่าค่าระยะการเสียรูปมีค่าใกล้เคียงกันทั้งสองเงื่อนไขของฐานรองรับแต่จะมีความแตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัดตรงบริเวณใกล้กับฐานรองรับเนื่องจากโครงสร้างเปลือกบางที่ใช้ในการวิเคราะห์จะคิดค่าพลังงานความเครียดในเทอมของเมมเบรนเพียงเท่านั้น สำหรับค่าพลังงานความเครียดในเทอมของแรงดัดซึ่งไม่ได้นำมาพิจารณาในการศึกษาครั้งนี้จึงทำให้ผลของโครงสร้างเปลือกบางที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่นมีค่าการเสียรูปมากกว่าโครงสร้างเปลือกบางที่มีฐานรองรับแบบยึดหมุน ซึ่งสามารถดูได้จากรูปที่ 8 และ 9 ซึ่งจะแสดงผลการเปรียบเทียบระยะการเสียรูปในแนวสัมผัสและแนวตั้งฉากกับระยะทางตามแนวเมอร์ริเดียนของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลม และเมื่อทำการพิจารณาให้โครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมรับแรงดันคงที่โดยสมมติให้ไม่มีการเปลี่ยนแปลงค่าของแรงดันตามระดับความลึกของระดับน้ำ ซึ่งในที่นี้จะกำหนดให้ใช้ค่าแรงดันคงที่มีค่าเท่ากับค่าแรงดันน้ำตรงบริเวณตำแหน่งของฐานรองรับจะพบว่ามีความแตกต่างกันอย่างชัดเจนดังในแสดงในรูปที่ 7 ถึง 9 ทั้งสองเงื่อนไขของฐานรองรับ ดังนั้นในการพิจารณาผลกระทบของแรงดันน้ำที่แปรเปลี่ยนตามความลึกจะพบว่าให้ค่าที่มีความถูกต้อง



รูปที่ 7 รูปร่างของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่สภาวะก่อนและหลังการเสียรูป

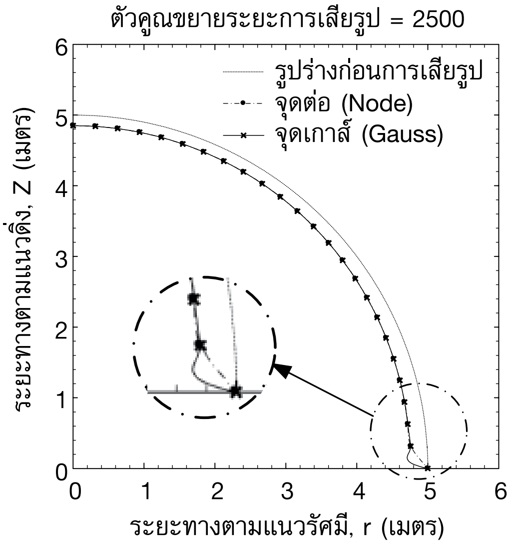


รูปที่ 8 เปรียบเทียบผลการเสียรูปในแนวสัมผัสของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมเมื่อชนิดของฐานรองรับต่างกัน

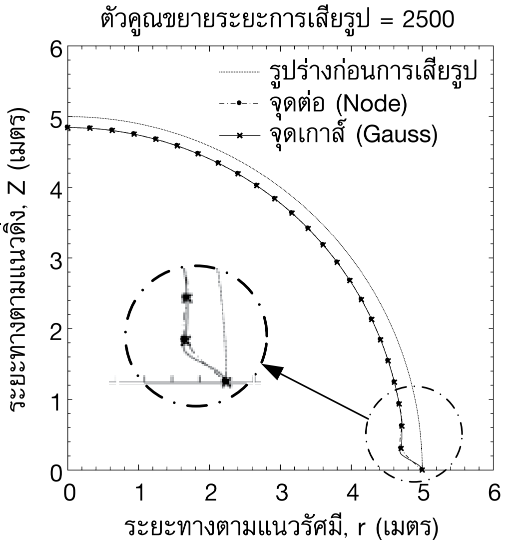


รูปที่ 9 เปรียบเทียบผลการเสียรูปในแนวตั้งฉากของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมเมื่อชนิดของฐานรองรับต่างกัน

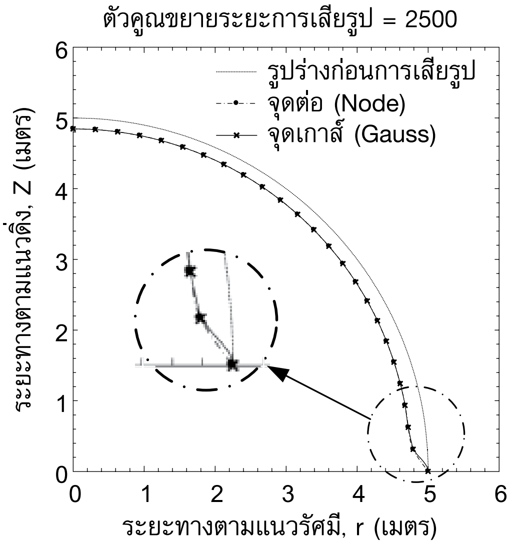
ในทางทฤษฎีเมมเบรนสำหรับโครงสร้างเปลือกบาง (thin shell) ที่ใช้เงื่อนไขที่จุดรองรับว่า $u=w=w_x=0$ เป็นจริงตามนั้น แต่ในการใช้งานจริงและในการคำนวณเชิงตัวเลข การใช้เงื่อนไข $w_x = 0$ จะทำให้เกิดปัญหาไม่สามารถใช้งานจริงในทางปฏิบัติและผลการคำนวณเชิงตัวเลขไม่เป็นที่ยอมรับ โดยจะมีรายละเอียดแสดงในรูปที่ 10 ซึ่งจากผลการคำนวณการใช้ฐานรองรับแบบยึดแน่น (fixed support) นั่นคือ $u = w = w_x = 0$ จะมีผลดีกว่าในเชิงทฤษฎีและสามารถนำไปใช้ได้ในทางปฏิบัติดังเช่นการออกแบบที่รองรับของโครงสร้างเปลือกบางทั่วๆ ไป ที่ตรงบริเวณฐานรองรับจะมีความหนาเพิ่มขึ้นกว่าบริเวณอื่นๆ เพื่อป้องกันไม่ให้เกิดการเสียรูปมากจนโครงสร้างเสียเสถียรภาพ



ก) สำหรับฐานรองรับที่มีเงื่อนไข $w_x \neq 0$



ข) สำหรับฐานรองรับที่มีเงื่อนไข $w_x = 0$

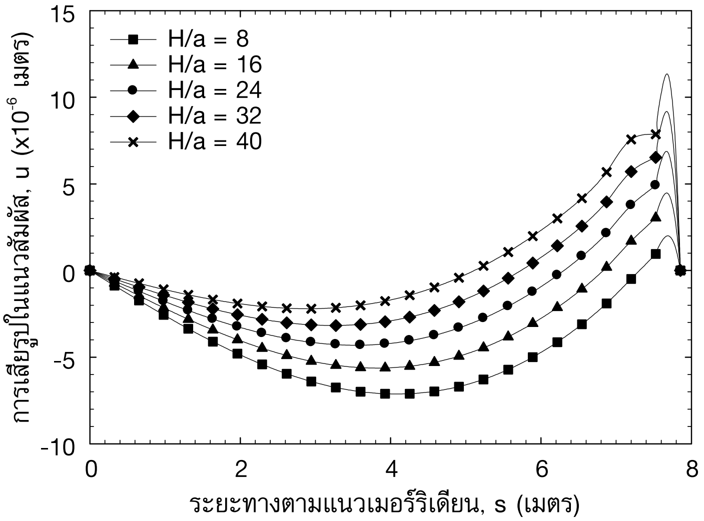


ค) สำหรับฐานรองรับที่มีเงื่อนไข $w_x = 0$ และความหนาของชิ้นส่วนย่อยบริเวณฐานรองรับมีความหนาเป็นสองเท่าของชิ้นส่วนอื่นๆ

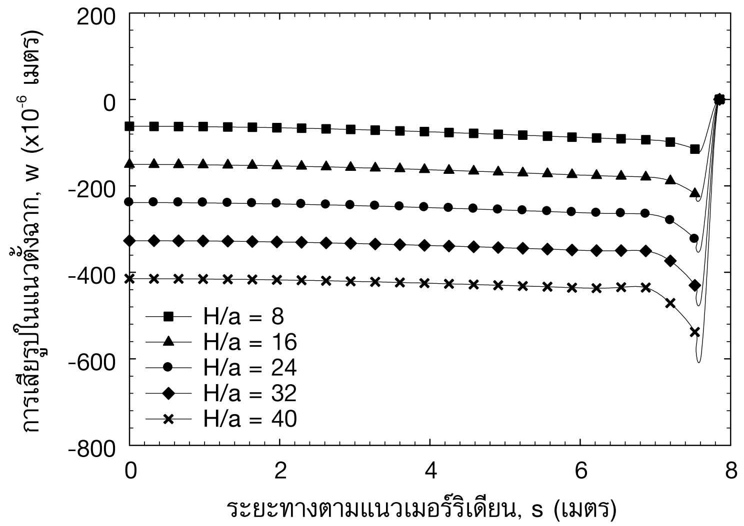
รูปที่ 10 รูปขยายบริเวณฐานรองรับสำหรับผลของการใช้เงื่อนไขสำหรับฐานรองรับที่มีความแตกต่างกัน

10.2 ผลของอัตราส่วนความลึกของระดับน้ำทะเลต่อความยาวรัศมีของโครงสร้างเปลือกบางที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น

ในกรณีนี้ ข้อมูลและคุณสมบัติของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่ใช้ในการคำนวณได้แสดงไว้ในตารางที่ 1 โดยที่ทำการปรับเปลี่ยนค่าอัตราส่วนความลึกของระดับน้ำทะเลต่อความยาวรัศมีของโครงสร้างเปลือกบาง จาก 8 ถึง 40 เพื่อศึกษาผลกระทบของความลึกของระดับน้ำทะเลที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น ซึ่งจากผลการวิเคราะห์จะพบว่าระยะการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมจะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่อค่าความลึกของระดับน้ำทะเลมีค่าสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 11 และ 12



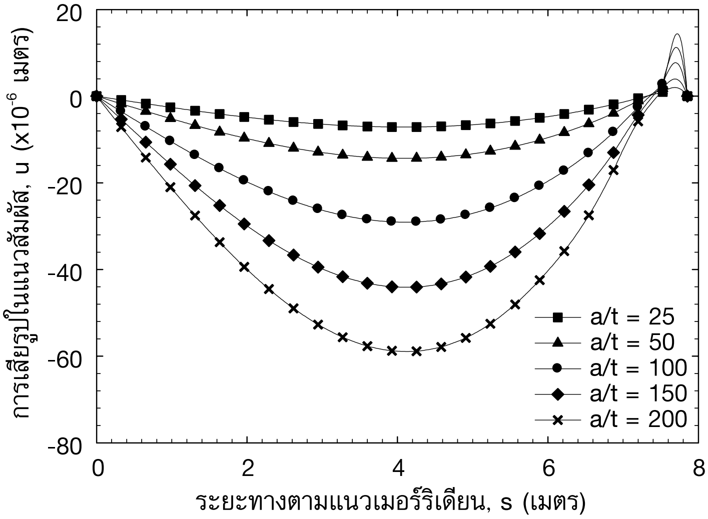
รูปที่ 11 ผลของการแปรเปลี่ยนระดับน้ำทะเลต่อระยะการเสียรูปในแนวสัมผัสของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น



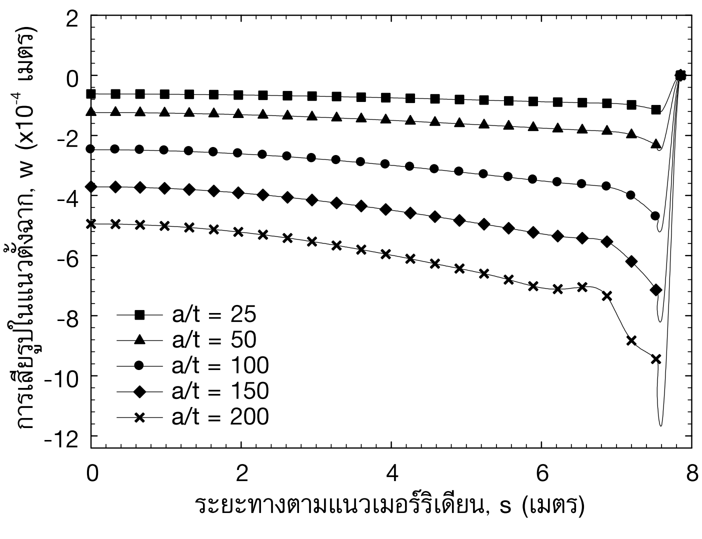
รูปที่ 12 ผลของการแปรเปลี่ยนระดับน้ำทะเลต่อระยะการเสียรูปในแนวตั้งฉากของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น

10.3 ผลของอัตราส่วนความยาวรัศมีต่อความหนาของโครงสร้างเปลือกบางที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น

สำหรับการศึกษาผลกระทบของอัตราส่วนความยาวรัศมีต่อความหนาของโครงสร้างเปลือกบางที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น ซึ่งในกรณีนี้จะใช้ข้อมูลและคุณสมบัติของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลม ดังแสดงไว้ในตารางที่ 1 โดยที่ทำการปรับเปลี่ยนค่าอัตราส่วนความยาวรัศมีต่อความหนาของโครงสร้างเปลือกบางจาก 25 ถึง 200 ซึ่งผลการวิเคราะห์จะพบว่าระยะการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมจะมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่อค่าอัตราส่วนความยาวรัศมีต่อความหนาของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าสูงขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 13 และ 14



รูปที่ 13 ผลของการแปรเปลี่ยนความหนาต่อระยะการเสียรูปในแนวสัมผัสของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น



รูปที่ 14 ผลของการแปรเปลี่ยนความหนาต่อระยะการเสียรูปในแนวตั้งฉากของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น

11. สรุปผลการศึกษา

การศึกษาผลตอบสนองทางสถิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัด แบบครึ่งทรงกลมที่มีความสมมาตรตามแนวแกนรองรับแรงดันน้ำสถิตแบบเชิงเส้น ซึ่งปัญหาสามารถเขียนได้ในรูปแบบการแปรผัน และใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณการเสียรูปทางสถิตศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบาง สามารถสรุปได้ดังนี้

1. ผลของการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขฐานรองรับของโครงสร้างเปลือกบางที่มีต่อโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมจะส่งผลสูงตรงบริเวณตำแหน่งของฐานรองรับซึ่งจะพบว่ากรณีที่โครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่นจะเสียรูปมากกว่ากรณีที่โครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลมที่มีฐานรองรับแบบยึดหมุน

2. ความลึกของระดับน้ำทะเลและอัตราส่วนความยาวรัศมีต่อความหนาของโครงสร้างเปลือกบางจะส่งผลกระทบโดยตรงต่อระยะการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางแบบครึ่งทรงกลม

12. กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยในลำดับที่ 1 และ 2 ใคร่ขอขอบคุณสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัยและมหาวิทยาลัยเทคโนโลยี-พระจอมเกล้าธนบุรี สำหรับโครงการปริญญาเอกกาญจนา-ภิเษก (สัญญาเลขที่ PHD/0134/2552) ที่ได้สนับสนุนทุนสำหรับงานวิจัยในครั้งนี้ จนงานวิจัยสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

13. เอกสารอ้างอิง

1. Langhaar, H.L., 1964, *Foundations of Practical Shell Analysis*, Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois.

2. Yang, T., and Kapania, R., 1983, "Shell Elements for Cooling Tower Analysis", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 109, No. 5, pp. 1270-1289.

3. Jianping, P., and Harik, I.E., 1992, "Axi-symmetric General Shells and Jointed Shells of Revolution", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 118, No. 11, pp. 3186-3202.

4. Toyota, K., Yasuzawa, Y., and Kagawa, K., 2002, "Hydroelastic Response Analysis of a Large Underwater Shell of Revolution", *Proceedings of the 12th International Offshore and Polar Engineering Conference*, 26-31 May, Kitakyushu, Japan, pp. 456-463.

5. Huang, T., 2002, "A Concept of Deep Water Axisymmetric Shell Storage Container Equatorially Anchored", *Proceedings of the 12th International Offshore and Polar Engineering Conference*, 26-31 May, Kitakyushu, Japan, Oral Presentation.

6. Grigolyuk, E.I., and Lopanitsyn, Y.A., 2002, "The Axisymmetric Postbuckling Behaviour of Shallow Spherical Domes", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 66, No. 4, pp. 605-616.

7. Bisarnsin, T., 1983, *Predicting the Effects of Radial Keratotomy*, Doctor of Philosophy Dissertation, Civil Engineering Program, The University of Texas at Arlington, 157 p.

8. Chen, L., 1984, *Large Displacement Analysis of an Ellipsoid Shell Subjected to an Imposed Displacement Along Equator*, Master of Engineering Thesis, Civil Engineering Program, The University of Texas at Arlington, 137 p.

9. Yeh, H.L., 1990, *A 3-D Model Predicting the Effects of Radial Keratotomy*, Doctor of Philosophy Dissertation, Civil Engineering Program, The University of Texas at Arlington, 172 p.

10. Spotts, M.F., 1939, "Analysis of Spherical Shells of Variable Wall Thickness", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 61, pp. A97-A102.

11. Langhaar, H.L., 1949, "A Strain Energy Expression for Thin Elastic Shells", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 16, No. 2, pp. 183-189.

12. Horvay, G., Linkous, C., and Born, J.S., 1956, "Analysis of Short thin Shells Under Axisymmetrical Edge Loading", *Journal of Applied*

Mechanics, Vol. 23, pp. 68-72.

13. Timoshenko, S., and Krieger, S.W., 1959, *Theory of Plates and Shell*, McGraw-Hill, New York.

14. Flügge, W., 1960, *Stresses in Shells*, Springer-Verlag, Berlin.

15. Goldenveiser, A.L., 1961, *Theory of Thin Elastic Shells*, Pergamon Press, Oxford.

16. Kraus, H., 1967, *Thin Elastic Shell*, John Wiley & Sons, New York.

17. Delpak, R., and Peshkam, V., 1991, "A Variational Approach to Geometrically Non-Linear Analysis of Asymmetrically Loaded Rotational Shells – I. Theory and Formulation", *Computers and Structures*, Vol. 39, No. 3-4, pp. 317-326.

18. Peshkam, V., and Delpak, R., 1993, "A Variational Approach to Geometrically Non-Linear Analysis of Asymmetrically Loaded Rotational Shells – II. Finite Element Application", *Computers and Structures*, Vol. 46, No. 1, pp. 1-11.

19. Polat, C., and Calayir, Y., 2010, "Nonlinear Static and Dynamic Analysis of Shells of Revolution", *Mechanics Research Communications*, Vol. 37, No. 2, pp. 205-209.

20. Wilson, E.L., Hsueh, T.M., and Jones, I.R., 1971, "Nonlinear Analysis of Deep Ocean Structures", *Proceedings of the 1971 Symposium of the International Association for Shell Structures Pacific Symposium Part 1*, pp. 457-474.

21. Royles, R., and Llambias, J.M., 1984, "Storage Aspects of Liquid Gases Underwater and the Structural Implications", *Proceedings International Symposium on Transport and Storage of LPG and LNG*, Vol. 2, pp. 55-72.

22. Yasuzawa, Y., 1993, "Structural Response of Underwater Half Drop Shaped Shell", *Proceedings of the 3rd International Offshore and Polar Engineering Conference*, 6-11 June, Singapore, pp. 475-481.

23. Rajasekaran, S., and Murray, D.W., 1973, "Incremental Finite Element Matrices", *Journal of the Structural Division*, Vol. 99, No. 12, pp. 2423-2438.

24. Langhaar, H.L., 1962, *Energy Methods in Applied Mechanics*, John Wiley & Sons, New York.

25. Mase, G.T., and Mase, G.E., 1999, *Continuum Mechanics for Engineers*, 2nd ed., CRC Press, Florida, pp. 116-120.

26. Goan, L.A., 2000, *An Analysis of an Axi-symmetrical Closed Shell Subjected to Equatorial Pull with Application to Accommodation of the Crystalline Lens*, Doctor of Philosophy Dissertation, Civil Engineering Program, The University of Texas at Arlington, 206 p.

27. Young, W.C., and Budynas RG., 2002, *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 7th ed., McGraw-Hill, New York.