การวิเคราะห์พอร์ตการลงทุนในคณิตศาสตร์การเงิน

อาทิตย์ อินทรสิทธิ์[1, 2,*]
มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี 181 ถ.เจริญประดิษฐ์ ต.รูสะมิแล อ.เมือง จ.ปัตตานี 90000
ศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์ คณะกรรมการการอุดมศึกษา ถ.ศรีอยุธยา เขตราชเทวี กรุงเทพฯ 10400

บทคัดย่อ

ในบทความวิชาการฉบับนี้ได้อภิปรายนำเสนอการวิเคราะห์การสร้างพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพโดยทฤษฎีเส้นแนวขอบประสิทธิผล ซึ่งเป็นการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างการจัดสรรน้ำหนักของสินทรัพย์ในพอร์ตการลงทุนกับค่าคาดหมายและความเสี่ยงของผลตอบแทนของพอร์ตการลงทุน

เพื่อสร้างพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพซึ่งมีสินทรัพย์ n ตัว จึงสร้างระนาบเกินของน้ำหนัก ซึ่งบรรจุการจัดสรรน้ำหนักการลงทุนที่จะเป็นไปได้ของสินทรัพย์ทุกตัวในพอร์ตการลงทุนที่อยู่ในปริภูมิ n มิติ

ภายใต้ฟังก์ชันเชิงเส้น เมื่อส่งแต่ละการจัดสรรน้ำหนักการลงทุนที่จะเป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งอยู่ในระนาบเกินของน้ำหนักการลงทุนไปเป็นคู่อันดับ (σ, μ) ที่สอดคล้องกัน เกิดเป็นเส้นโค้งที่มีลักษณะเป็นหัวกระสุนคล้ายพาราโบลาเปิดขวาในระนาบ 2 มิติของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ และผลตอบแทนคาดหมาย μ ของพอร์ตการลงทุน

เซตของจุด (σ_{min}, μ) ที่ให้ความเสี่ยงต่ำสุดสำหรับแต่ละผลตอบแทนคาดหมาย ซึ่งสอดคล้องกับการจัดสรรน้ำหนักการลงทุนจะก่อให้เกิดพอร์ตการลงทุนที่มีประสิทธิภาพ

คำสำคัญ : ทฤษฎีเส้นแนวขอบประสิทธิผล / ทฤษฎีการจัดการพอร์ตสมัยใหม่ / ตัวแบบการประเมินสินทรัพย์ทุน / มูลค่าความเสี่ยง / การกระจายความเสี่ยงของพอร์ตการลงทุน

* *Corresponding author E-mail : iarthit@bunga.pn.pn.psu.ac.th*

1 *อาจารย์ประจำ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี*

2 *หัวหน้าโครงการวิจัยเดี่ยว RS-2-54-05-2*

Investment Portfolio Analysis in Financial Mathematics

Arthit Intarasit [1, 2, *]

Prince of Songkla University, Pattani Campus, 181 Charoenpradit Rd., Rusamelae, Muang, Pattani 94000.

The Centre of Excellence in Mathematics, the Commission on Higher Education (CHE), Si Ayutthaya Rd, Bangkok 10400.

Abstract

This academic article present an analysis of constructing an efficient investment portfolio based on the efficient frontier theory, which gives the relationship between allocation of weight assets in investment portfolio and the expected return and the standard deviation of the investment portfolio.

To construct an efficient investment portfolio consisting of n assets, a weight hyperplane is constructed, which contain all possible combinations of allocation of weight assets in the investment portfolio, laid in the n-dimensional space.

Under a linear mapping, each possible combination of this allocation of weight assets in the weight hyperplane is mapped to the corresponding order pair of (σ, μ) tracing out a curve that has a bullet shape like parabola open to the right in plan of 2-dimensional of standard deviation and σ expected return μ of investment portfolio.

The set of points (σ_{min}, μ) that gives the minimum risk for each expected return is the corresponding the combination of the allocation of weight assets generated the efficient investment portfolio.

Keywords : Efficient frontier theory / Modern portfolio Theory / Capital asset pricing model / Value at risk / Portfolio Diversification

---

* *Corresponding author E-mail : iarthit@bunga.pn.psu.ac.th*

1 *Lecturer, Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science and Technology,*

2 *Project Leader, CEM Project No. RS-2-54-05-2*

1. บทนำ

ในด้านการเงินและการลงทุน พอร์ตการลงทุน หรือพอร์ตโฟลิโอ (portfolio) มักเรียกอย่างสั้นๆ ว่า พอร์ต ซึ่งหมายถึง กลุ่มของสินทรัพย์ด้านการเงิน เช่น หุ้นสามัญ (common stock) หุ้นบุริมสิทธิ (preferred stock) หุ้นกู้ (debenture) พันธบัตรรัฐบาล (bond) และตราสารอนุพันธ์ด้านการเงิน เช่น ออปชัน (option) ฟิวเจอร์ (future) เป็นต้น ที่ถือครองและจัดการโดยผู้ลงทุนหรือสถาบันการเงิน

กระบวนการในการสร้างพอร์ต การตัดสินใจในการดำเนินการเลือก การจัดสรรน้ำหนักของสินทรัพย์ในพอร์ต และการบริหารความเสี่ยงของพอร์ตเพื่อให้ได้ผลตอบแทนตามเป้าหมายตามวัตถุประสงค์ในการสร้างพอร์ต เรียกว่า การจัดการพอร์ต (portfolio management) การจัดการพอร์ตอาจเป็นการบริหารจัดการพอร์ตโดยรายบุคคล ซึ่งผู้ลงทุนสร้างพอร์ตขึ้นเองหรืออาจเป็นการจัดการพอร์ตของกองทุนรวมที่มีการบริหารจัดการพอร์ตโดยผู้จัดการกองทุนระดับมืออาชีพหรือสถาบันการเงิน

ในช่วงก่อนทศวรรษที่ 1950 แทบไม่มีทฤษฎีอะไรเลยที่เกี่ยวข้องกับตลาดการเงินและการลงทุนในตลาดการเงิน ในช่วงเวลานั้นนักลงทุนกลุ่มหนึ่งมีความเชื่อว่าผลตอบแทนของพอร์ตมีความสัมพันธ์โดยตรงกับสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยงสูงแต่เพียงอย่างเดียว กล่าวคือ การลงทุนในสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยงสูงหรือสินทรัพย์ที่มีความผันผวน (volatility) ของผลตอบแทนสูงควรได้รับส่วนชดเชยความเสี่ยงของสินทรัพย์สูงขึ้นเพื่อชดเชยความเสี่ยงที่มากขึ้น การลงทุนในสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยงต่ำก็ควรได้รับส่วนชดเชยความเสี่ยงของสินทรัพย์ที่ต่ำ ทั้งนี้มักจะเปรียบเทียบผลตอบแทนของสินทรัพย์ที่ลงทุนกับผลตอบแทนของสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง เช่น เปรียบเทียบอัตราผลตอบแทนของหุ้นสามัญกับอัตราดอกเบี้ยของพันธบัตรรัฐบาล เป็นต้น

อย่างไรก็ตามการศึกษาและพัฒนาทฤษฎีพอร์ตโฟลิโอสมัยใหม่ (Modern Portfolio Theory) ในช่วงต้นทศวรรษที่ 1950 ถึงช่วงปลายปี 1970 ได้ยืนยันให้เห็นว่าความเสี่ยงของพอร์ตไม่ได้ขึ้นกับความเสี่ยงของสินทรัพย์ตัวใดตัวหนึ่งในพอร์ตเท่านั้น แต่มีความสัมพันธ์กับความเสี่ยงของสินทรัพย์ทุกตัวในพอร์ต ทฤษฎีพอร์ตโฟลิโอสมัยใหม่เป็นงานวิจัยและพัฒนาองค์ความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวกับการจัดการพอร์ตการลงทุน ทฤษฎีที่จัดอยู่ในกลุ่มของทฤษฎีพอร์ตโฟลิโอสมัยใหม่ ได้แก่ ทฤษฎีการจัดพอร์ตของมาร์โควิทส์ (Markowitz Portfolio Theory) หรือ MPT ตัวแบบประเมินสินทรัพย์ทุน (Capital Asset Pricing Model) หรือที่รู้กันในชื่อ CAPM (แค็ปเอ็ม) และสมมุติฐานตลาดที่มีประสิทธิภาพ (Efficient Market Hypothesis) หรือ EMH

ทฤษฎีพอร์ตโฟลิโอสมัยใหม่มีจุดเริ่มต้นจาก MPT ซึ่งได้รับการคิดค้นพัฒนาโดยศาสตราจารย์ ดร.แฮรี่ มาร์โควิทส์ (Harry M. Markowitz) ส่วนตัวแบบ CAPM ได้รับการพัฒนาในเวลาต่อมาโดย ศาสตราจารย์ ดร.เมอร์ตัน มิลเล่อร์ (Merton H. Miller) และศาสตราจารย์ ดร.วิลเลียม ชาร์ป (William F. Sharpe) ผลงานการพัฒนาทฤษฎีการจัดพอร์ตข้างต้นนี้ทำให้ศาสตราจารย์ทั้ง 3 ท่านได้รับรางวัลโนเบลสาขาวิชาเศรษฐศาสตร์ในความทรงจำถึง อัลเฟรด โนเบล จากราชวิทยาลัยวิทยาศาสตร์แห่งสวีเดน (Royal Swedish Academy of Sciences) ในปี 1990 ทฤษฎีการจัดพอร์ตดังกล่าวนี้มีบทบาทอย่างมากต่องานวิจัยและการพัฒนาในสาขาวิชาเศรษฐศาสตร์การเงิน (financial economics) และการเงินสำหรับองค์กร (corporate financial) ทั้งในอดีตและปัจจุบัน

MPT และ CAPM เป็นงานวิจัยและทฤษฎีการจัดพอร์ตการลงทุนแรกๆ ในช่วงศตวรรษที่ 1990 MPT เป็นการสร้างพอร์ตการลงทุนด้วยการคำนวณการจัดสรรน้ำหนักการลงทุนของสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง (risk assets) โดยการพิจารณาค่าคาดหมาย (expected value) และความแปรปรวน (variance) ของผลตอบรวมของพอร์ต ผลตอบแทนของพอร์ตมีการเปลี่ยนแปลงเป็นปฏิภาคโดยตรงกับความเสี่ยงของพอร์ต ส่วน CAPM เป็นการขยายแนวคิดของ MPT โดยสร้างพอร์ตการลงทุนที่มีสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยงและปราศจากความเสี่ยง (riskless assets) ภายใต้เงื่อนไขเดียวกันกับ MPT ทั้งนี้ผู้ลงทุนสามารถคาดหวังผลตอบแทนของพอร์ตในระดับความเสี่ยงที่ยอมรับได้จากน้ำหนักการลงทุนของสินทรัพย์ทั้งสองชนิดได้ โดยผู้ลงทุนจะได้รับผลตอบแทนของพอร์ตอย่างน้อยเท่ากับผลตอบแทนที่ได้รับจากสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง ในปัจจุบัน CAPM ยังคงเป็นเครื่องมือพื้นฐานที่

สำคัญในตลาดการเงิน ซึ่งช่วยในการวิเคราะห์หาน้ำหนักการลงทุนเพื่อใช้ประกอบการตัดสินใจของผู้ลงทุน อีกทั้งยังเป็นตัวแบบที่ได้รับความสนใจในแวดวงวิชาอีกด้วย ทั้งนี้อาจประยุกต์ใช้ตัวแบบทั้งสองนี้ในสาขาวิชาอื่นๆ นอกเหนือจากการจัดสรรสัดส่วนของสินทรัพย์ในพอร์ต เช่น อาจคำนวณหาสัดส่วนน้ำหนักของเครือข่ายใยประสาทแบบสุ่มในการสร้างตัวแบบเพื่อสร้างระบบจำลองการทำนายในอุตสาหกรรมการผลิตฮาร์ดดิสก์ไดร์ฟในงานวิจัย [1] หรือคำนวณหาสัดส่วนของปริมาณสินค้าในปัญหาการจัดตารางรถขนส่งสำหรับศูนย์กระจายสินค้า ผู้สนใจสามารถศึกษาตัวแบบการจัดตารางดังกล่าวนี้ด้วยวิธีฮิวริสติกได้จากงานวิจัย [4]

2. สมมุติฐานทฤษฎีพอร์ตโฟลิโอสมัยใหม่

ทฤษฎีพอร์ตโฟลิโอสมัยใหม่ทั้ง 3 ทฤษฎีมีข้อสมมุติที่เกี่ยวกับผู้ลงทุนที่มีเหตุผลในการลงทุนและผู้ลงทุนที่ไม่ชอบความเสี่ยง ซึ่งมีความหมายดังนี้

ผู้ลงทุนที่มีเหตุผล (rational investors) หมายถึงผู้ลงทุนที่ลงทุนอย่างมีเหตุผลในแง่ที่ว่าการตัดสินใจลงทุนซื้อขายหุ้นในตลาดของผู้ลงทุนอยู่บนพื้นฐานของการคาดคะเนด้วยเหตุผล (rational expectation) ซึ่งเป็นการคาดคะเนที่ดีที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ (optimal forecast) ด้วยข้อมูลที่ผู้ลงทุนมีอยู่

ถ้าพิจารณาผลตอบแทนที่จะได้รับจากสินทรัพย์สองชนิดใดๆ ที่มีค่าใกล้เคียงกันแล้วผู้ลงทุนส่วนใหญ่มักจะพอใจที่จะลงทุนในสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยงต่ำมากกว่าหลักทรัพย์ที่มีความเสี่ยงสูง ผู้ลงทุนที่มีลักษณะเช่นนี้เป็นผู้ลงทุนที่ไม่ชอบความเสี่ยง (risk averse)

ในที่นี้การสร้างพอร์ตการลงทุน หมายถึง การจัดสรรน้ำหนักของสินทรัพย์ที่จะถือครองในพอร์ตเพื่อให้ได้พอร์ตการลงทุนที่เหมาะสมตามเป้าหมายตามต้องการ

ทฤษฎีการจัดพอร์ตของมาร์โควิทส์ในงานวิจัย [5] หรือ MPT เป็นทฤษฎีการสร้างพอร์ตที่มีเพียงสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยงเท่านั้น ในที่นี้จะใช้คำว่า “หลักทรัพย์” แทนสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยงที่มีการซื้อขายในตลาดการเงิน ตลาดหลักทรัพย์ ทั้งนี้เมื่อกล่าวถึงสินทรัพย์อาจหมายถึงสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยงหรือปราศจากความเสี่ยงก็ได้

MPT สร้างพอร์ตโดยพิจารณาจากความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักการลงทุนของหลักทรัพย์ที่ได้ถือครองในพอร์ตกับผลตอบแทนคาดหมายและความเสี่ยงรวมของพอร์ตที่สร้างขึ้นโดยการวิเคราะห์จากผลตอบแทนคาดหมายและความเสี่ยงของแต่ละหลักทรัพย์และค่าสหสัมพันธ์ระหว่างหลักทรัพย์จากข้อมูลในอดีตของราคาหลักทรัพย์ในพอร์ต ทั้งนี้ MPT ใช้ความแปรปรวนหรือความผันผวนเชิงประวัติศาสตร์ (historical volatility) ซึ่งคำนวณจากข้อมูลในอดีตเป็นตัววัด (measure) ความเสี่ยง

MPT เกิดจากแนวคิดสำคัญที่ว่า ผู้ลงทุนที่มีเหตุผลจะสร้างพอร์ตโดยการกระจาย (diversify) การลงทุนของพอร์ตในสินทรัพยที่แตกแต่งกันเพื่อลดความเสี่ยงรวมของพอร์ตที่อาจจะเกิดขึ้น

เนื่องจากสินทรัพย์ในพอร์ตที่สร้างขึ้นไม่มีความสัมพันธ์เชิงบวกหรือลบระหว่างกันอย่างสมบูรณ์ จึงทำให้การกระจายการลงทุนของพอร์ตด้วยการลงทุนในสินทรัพย์ต่างๆ หลากหลายประเภทอาจจะลดความเสี่ยงและเพิ่มผลตอบแทนคาดหมายของพอร์ตโดยรวมได้

MPT มีสมมุติฐานที่สำคัญ ดังนี้

- ผู้ลงทุนมีเหตุผลในการลงทุนและไม่ชอบความเสี่ยง ผลตอบแทนของหลักทรัพย์มีการแจกแจงปกติ (normal distribution)
- ตัววัดความเสี่ยงของผลตอบแทนที่เหมาะสม คือ ความแปรปรวน
- พอร์ตมีเพียงสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง

ตัวแบบการประเมินสินทรัพย์ทุน หรือ CAPM ในงานวิจัย [7] เป็นตัวแบบที่ได้รับการพัฒนามา จาก MPT โดยมีแนวคิดสำคัญว่าพอร์ตที่ผู้ลงทุนสร้างขึ้นควรมีผลตอบแทนอย่างน้อยเท่ากับผลตอบแทนของสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงที่ผู้ลงทุนถือครองอยู่ในพอร์ต

CAPM มีข้อสมมุติฐานที่สำคัญ ดังนี้

- ผู้ลงทุนแสวงหาอรรถประโยชน์ (ความพึงพอใจหรือความอยู่ดีกินดี) สูงสุด
- ผู้ลงทุนมีเหตุผลและไม่ชอบความเสี่ยง
- ผลตอบแทนของสินทรัพย์มีการแจกแจงปกติ
- ตัววัดความเสี่ยงของผลตอบแทนที่เหมาะสม คือ ความแปรปรวน
- พอร์ตประกอบด้วยสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงและมีความเสี่ยง

สมมุติฐานตลาดที่มีประสิทธิภาพ หรือ EMH, Bülmke [3] กล่าวว่า ราคาของหลักทรัพย์ในตลาดการเงินทุกตัวจะสะท้อนถึงข้อมูลข่าวสารทั้งหมดที่มีอยู่ในปัจจุบัน ข้อมูลข่าวสารที่เกิดขึ้นใหม่จะส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของราคาสินทรัพย์อย่างทันทีโดยที่ผู้ลงทุนไม่สามารถจะคาดการณ์ได้ล่วงหน้า ดังนั้นจึงไม่สามารถวิเคราะห์ราคาหลักทรัพย์ได้จากข้อมูลในอดีต

EMH มี 3 รูปแบบ คือ EMH อย่างอ่อน EMH กึ่งเข้ม และ EMH อย่างเข้ม ผู้สนใจสามารถศึกษารายละเอียดเพิ่มเติมได้จากหนังสือ Budsaratrakul [2]

ใน MPT ได้สมมุติให้ผลตอบแทนของหลักทรัพย์มีการแจกแจงปกติอย่างไรก็ตามจากการศึกษาเชิงประจักษ์ของงานวิจัยหลายฉบับแสดงให้เห็นว่า ผลตอบแทนของหลักทรัพย์ในตลาดการเงินมีการแจกแจงแบบไม่ปกติ (non-normal distribution) แต่มีการแจกแจงแบบหางอ้วน (fat tail) เมื่อเทียบกับหางของการแจกแจงปกติซึ่งหมายถึงการเปลี่ยนแปลงของผลตอบแทนสูงมีความถี่เป็นจำนวนหนึ่งในบริเวณปลายหางของการแจกแจง อย่างไรก็ตามข้อสมมุติที่ว่าผลตอบแทนของหลักทรัพย์มีการแจกแจงแบบปกติยังคงเป็นตัวอย่างที่ดีตัวอย่างหนึ่งในการทำความเข้าใจการแจกแจงของผลตอบแทนของหลักทรัพย์ในตลาดการเงิน

การลงทุนในภาคปฏิบัติได้เกิดข้อคำถามหลายข้อที่เกี่ยวข้องกับการประยุกต์ใช้ทฤษฎีการจัดพอร์ตทั้ง 3 ทฤษฎีดังกล่าว ต่อไปนี้จะได้อภิปรายถึงข้อวิจารณ์ที่สำคัญบางประการจากผลการศึกษาของงานวิจัยหลายฉบับ ซึ่งก่อให้เกิดการปรับปรุงและพัฒนาทฤษฎีเหล่านี้ทั้งในอดีตและปัจจุบันดังนี้

ประการที่ 1

ผลตอบแทนของสินทรัพย์มีการแจกแจงไม่ปกติ

ได้อภิปรายเหตุผลไปแล้วก่อนหน้านี้

ประการที่ 2

ผู้ลงทุนอาจไม่มีเหตุผลในการตัดสินใจอันเนื่องมาจากการที่ผู้ลงทุนไม่สามารถเข้าถึงข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับหลักทรัพย์หรือข้อมูลที่เกี่ยวกับตลาดการเงินได้อย่างรวดเร็ว

ใน MPT และ EMH มีข้อสมมุติเพิ่มเติมว่าผู้ที่เกี่ยวข้องในตลาดทุกคนควรได้รับรู้ข้อมูลทุกอย่างที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการกำหนดราคาหลักทรัพย์โดยผู้ที่เกี่ยวข้องสามารถรับรู้ข่าวสารและการเปลี่ยนแปลงของราคาตลาดของสินทรัพย์ทุกตัวได้อย่างทันท่วงที ด้วยเหตุนี้จึงกล่าวได้ว่าหลักทรัพย์ทุกตัวมีราคาที่ยุติธรรม (fair price) แต่ในความเป็นจริงแล้วผู้ลงทุนรายบุคคลอาจเข้าถึงข้อมูลได้ช้ากว่านักลงทุนมืออาชีพ จึงส่งผลให้ผู้ลงทุนรายบุคคลอาจขายสินทรัพย์ในราคาที่ต่ำหรือซื้อสินทรัพย์ในราคาที่สูงกว่าราคายุติธรรมใหม่ที่เกิดขึ้น ในขณะที่นักลงทุนมืออาชีพจะสามารถขายสินทรัพย์ในราคาที่สูงหรือซื้อสินทรัพย์ในราคาที่ต่ำกว่ามูลค่ายุติธรรมใหม่ที่เกิดขึ้นได้

ประการที่ 3

ปัจจัยอื่น ๆ ที่ใช้วิเคราะห์การสร้างพอร์ต

MPT และ CAPM สร้างพอร์ตโดยการวิเคราะห์ผลตอบแทนคาดหมายและความเสี่ยงของผลตอบแทนของสินทรัพย์ที่ผู้ลงทุนเลือกลงทุนเท่านั้น อย่างไรก็ตามมีพารามิเตอร์อื่นๆ ที่ควรจะพิจารณาประกอบการวิเคราะห์ เช่น ความเบ้ (skew) และความโด่ง (kurtosis) ของการแจกแจงของผลตอบแทนของสินทรัพย์ เป็นต้น

3. เส้นแนวขอบประสิทธิผลมาร์โควิทส์

วิธีการวัดความเสี่ยงของสินทรัพย์ที่ไม่ซับซ้อน ซึ่งสะท้อนการเปลี่ยนแปลงของการแจกแจงของความแตกต่างระหว่างผลตอบแทนจริงกับผลตอบแทนคาดหมาย (expected return) ในการลงทุน ได้แก่ ความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard diviation) อย่างไรก็ตามในปัจจุบันมีวิธีการวัดความเสี่ยงของสินทรัพย์หลากหลายวิธี เช่น มูลค่าความเสี่ยง (value at risk) มูลค่าความเสี่ยงแบบมีเงื่อนไข (conditional value at risk) เป็นต้น

มีข้อสังเกตว่า หลักทรัพย์ต่างชนิดกัน เช่น พันธบัตร หุ้นกู้ และหุ้นสามัญ หรือ หลักทรัพย์ ประเภทเดียวกัน เช่น หุ้นสามัญของต่างบริษัท หรือหลักทรัพย์ของบริษัทเดียวกันจะมีความเสี่ยงต่างกัน

ทฤษฎีการจัดพอร์ตของมาร์โควิทส์หรือ MPT สร้างพอร์ตการลงทุนที่มีเพียงหลักทรัพย์ตั้งแต่ 2 หลักทรัพย์ขึ้นไปโดยการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างการจัดสรรน้ำหนักการลงทุนของหลักทรัพย์กับผลตอบแทนและความเสี่ยงของหลักทรัพย์ทุกตัวในพอร์ตโดยพิจารณาความ

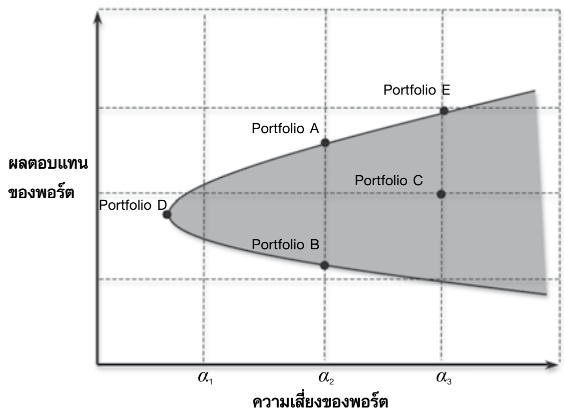
สัมพันธ์ระหว่างหลักทรัพย์แต่ละตัวในรูปของเมทริกซ์สหสัมพันธ์ (correlation matrix)

เซตของคู่อันดับที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดของความเสี่ยงและผลตอบแทนของพอร์ตที่เปลี่ยนแปลงตามการจัดสรรน้ำหนักของแต่ละหลักทรัพย์ที่สอดคล้องกันจะบรรจุอยู่ในบริเวณส่วนที่แรเงาของกราฟเส้นโค้งลักษณะคล้ายกับกระสุนปืน ดังรูป 3.1 เรียกเส้นโค้งนี้ว่า *เส้นโค้งกระสุนมาร์โควิทส์ (Markowitz bullet)*

การจัดสรรน้ำหนักของหลักทรัพย์ที่ให้ผลตอบแทนสูงสุดเมื่อกำหนดระดับความเสี่ยงค่าหนึ่งจะสอดคล้องกับคู่อันดับความเสี่ยงและผลตอบแทนของพอร์ตที่อยู่บนเส้นแนวขอบด้านบนของกราฟ (เช่น พอร์ต A D และ E) เส้นแนวขอบของเส้นโค้งนี้เรียกว่า *เส้นแนวขอบประสิทธิผลมาร์โควิทส์ (Markowitz efficient frontier)*

MPT มีข้อสมมุติว่าผู้ลงทุนไม่ชอบความเสี่ยง กล่าวคือ ผู้ลงทุนจะเลือกลงทุนในหลักทรัพย์ที่มีความเสี่ยงต่ำกว่าอีกหลักทรัพย์ถ้าหลักทรัพย์ทั้งสองมีผลตอบแทนคาดหมายเท่ากัน ดังนั้นผู้ลงทุนจะเลือกพอร์ตที่สอดคล้องกับผลตอบแทนคาดหมายและความเสี่ยงที่อยู่บนเส้นขอบประสิทธิผลส่วนบน (เช่น พอร์ต A D และ E) และไม่ใช่บริเวณส่วนล่าง

ผู้ลงทุนที่ไม่ชอบความเสี่ยงอย่างมาก (highly risk averse) หรือรับความเสี่ยงได้น้อยมีแนวโน้มจะลงทุนในพอร์ตที่อยู่บนเส้นขอบประสิทธิผลบริเวณด้านซ้ายมือ เช่น พอร์ต D ส่วนผู้ลงทุนที่ไม่ชอบความเสี่ยงอย่างน้อย (less risk averse) หรือรับความเสี่ยงได้มากมีแนวโน้มจะลงทุนในพอร์ตที่อยู่บนเส้นขอบประสิทธิผลบริเวณด้านขวามือ เช่น พอร์ต E



รูป 3.1 เส้นแนวขอบประสิทธิผลมาร์โควิทส์

กล่าวได้ว่า MPT ให้พอร์ตบนเส้นแนวขอบประสิทธิผลพอร์ตเหล่านี้ให้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานต่ำสุดเมื่อกำหนดระดับของผลตอบแทนคาดหมายและแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงระหว่างผลตอบแทนและความเสี่ยงของพอร์ตที่สอดคล้องกับน้ำหนักการลงทุนต่างๆ ที่เปลี่ยนแปลงไป

พอร์ตทุกพอร์ตที่อยู่ภายในบริเวณที่แรเงา เช่น พอร์ต C และพอร์ตที่อยู่บนเส้นโค้งในบริเวณส่วนล่างของเส้นโค้ง เช่น พอร์ต B ถูกครอบงำ (dominated) ด้วยพอร์ตที่อยู่บนเส้นแนวขอบประสิทธิผล ซึ่งอยู่ในระนาบตั้งฉากเดียวกัน เช่น พอร์ต C ถูกครอบงำโดยพอร์ต E และพอร์ต B ถูกครอบงำโดยพอร์ต A

เมื่อกำหนดระดับความเสี่ยง (ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน) เท่ากับ a_2 พอร์ต A เป็นพอร์ตที่ให้ผลตอบแทนคาดหมายสูงสุดเมื่อเทียบกับพอร์ต B อย่างไรก็ตามพอร์ต D มีความเสี่ยงต่ำสุดเมื่อเทียบกับพอร์ตต่างๆ

บริเวณที่อยู่เหนือเส้นขอบประสิทธิผลเป็นบริเวณที่ไม่มีพอร์ตที่ลงทุนได้ (unattainable)

ถ้าพอร์ตมีจำนวนสินทรัพย์มากขึ้นจะยิ่งทำให้มีการจัดเรียงที่จะเป็นไปได้ของการจัดสรรน้ำหนักของสินทรัพย์เหล่านี้ในจำนวนสูงส่งผลให้กราฟเส้นโค้งเปิดกว้างมากขึ้น กล่าวได้ว่า มีการจัดสรรน้ำหนักของสินทรัพย์ที่จะเป็นไปได้มากขึ้นนั่นเอง

4. พอร์ต ผลตอบแทน และความเสี่ยง

4.1 พอร์ต

ในที่นี้จะศึกษาการวิเคราะห์การสร้างพอร์ตใน 1 ช่วงเวลาเท่านั้น ซึ่งมีเวลาเริ่มต้น $t = 0$ และเวลาสิ้นสุด $t = T$

กำหนดให้ a_i แทนสินทรัพย์ชนิดที่ i เมื่อ $i = 1, ..., n$ โดยที่ $n \geq 2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มและกำหนดให้ $V_{i,0}$ และ $V_{i,T}$ แทนมูลค่าเริ่มต้นและมูลค่าสุดท้ายของสินทรัพย์ a_i ตามลำดับ

นิยามพอร์ตที่มีสินทรัพย์ต่างๆ n ตัวเป็นอันดับ n - ทูเพิล (tuple) ของจำนวนจริง ซึ่งแทนด้วย

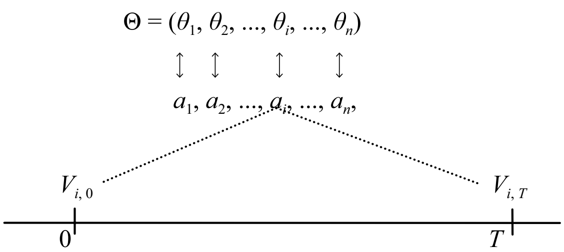
$$\Theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$$

เมื่อ θ_i แทนน้ำหนักของสินทรัพย์

สินทรัพย์ a_i ในพอร์ต Θ มีสถานะชอร์ต (short position) ถ้า θ_i มีค่าเป็นลบ ซึ่งหมายถึงการทำชอร์ตเซล (short sale) กับหุ้น a_i หรือทำชอร์ตเซลบนตราสารอนุพันธ์ a_i

สินทรัพย์ a_i ในพอร์ต Θ มีสถานะลอง (long position) ถ้า θ_i มีค่าเป็นบวก ซึ่งหมายถึง การซื้อหรือถือครองหุ้น a_i หรือได้ซื้อตราสารอนุพันธ์ a_i

รูป 4.1 แสดงองค์ประกอบของพอร์ต Θ ซึ่งประกอบด้วยสินทรัพย์ a_i พอร์ต Θ น้ำหนักของสินทรัพย์ θ_i และมูลค่าของสินทรัพย์ $V_{i,0}$ ณ เวลาเริ่มต้นและ $V_{i,T}$ ณ สิ้นสุด



รูป 4.1 องค์ประกอบของพอร์ต Θ

4.2 น้ำหนักของสินทรัพย์ในพอร์ต

ขนาดสินทรัพย์ในพอร์ตอาจวัดได้ด้วยร้อยละของมูลค่าสินทรัพย์ทั้งหมด

น้ำหนัก (weight) หรือสัดส่วนการลงทุนของสินทรัพย์ a_i ในพอร์ต แทนด้วย w_i หมายถึงร้อยละของมูลค่าสินทรัพย์ทั้งหมดในพอร์ต ณ เวลาเริ่มต้น $t = 0$ ซึ่งคำนวณได้ดังนี้

$$w_i = \frac{\theta_i V_{i,0}}{\sum_{j=1}^{n} \theta_j V_{i,0}}$$

ผลบวกของน้ำหนักสินทรัพย์ทุกตัวในพอร์ตมีค่าเท่ากับ 1 เสมอ

$$w_1 + w_2 + ... + w_n = 1$$

อย่างไรก็ตาม ถ้าไม่มีการปรับเปลี่ยนน้ำหนักการลงทุนของสินทรัพย์ในพอร์ตในช่วงเวลาระหว่างเวลาเริ่มต้น $t = 0$ ถึง $t = T$ แล้วน้ำหนักการลงทุนของพอร์ตจะมีค่าเท่าเดิมไม่เปลี่ยนแปลง

4.3 ผลตอบแทนของสินทรัพย์

ผลตอบแทนของสินทรัพย์ (asset return) R_i เป็นไปตามสมการ

$$V_{i,T} = V_{i,0}(1 + R_i)$$

ซึ่งสมมูลกับ

$$R_i = \frac{V_{i,T} - V_{i,0}}{V_{i,0}}$$

มีข้อสังเกตว่า มูลค่าสินทรัพย์ ณ เวลาสิ้นสุดในอนาคต $V_{i,T}$ เป็นตัวแปรสุ่ม ดังนั้นผลตอบแทนของสินทรัพย์ R_i จึงเป็นตัวแปรสุ่ม ด้วยเหตุนี้จึงสามารถคำนวณค่าคาดหมายและความแปรปรวนของผลตอบแทนของสินทรัพย์ได้ ทั้งนี้อาจใช้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานวัดความเสี่ยงของผลตอบแทนของสินทรัพย์แทนความแปรปรวนของผลตอบแทนของสินทรัพย์ก็ได้

4.4 ผลตอบแทนกับความเสี่ยงของพอร์ต

กำหนดให้ R_i แทนผลตอบแทนของสินทรัพย์ a_i ที่อยู่ในพอร์ต Θ ซึ่งมีสินทรัพย์จำนวน n สินทรัพย์และกำหนดให้

$$\mu_i = \varepsilon(R_i) \text{ และ } \sigma_i^2 = \mathrm{Var}(R_i)$$

แทนค่าคาดหมายและความแปรปรวนของผลตอบแทนของสินทรัพย์ a_i ตามลำดับโดยที่เมื่อ ε แทนฟังก์ชันค่าคาดหมายและ Var แทนฟังก์ชันความแปรปรวน

สินทรัพย์มีความเสี่ยง ถ้า $\sigma_i^2 > 0$ และสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง ถ้า $\sigma^2 = 0$

ผลตอบแทนของพอร์ต Θ (return of portfolio) แทนด้วย R ซึ่งคำนวณได้จากผลบวก n จำนวนของผลคูณของน้ำหนักการลงทุนกับผลตอบแทนของสินทรัพย์ a_i นั่นคือ

$$R = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i$$

ผลตอบแทนคาดหมายของพอร์ต Θ (expected return of portfolio) แทนด้วย μ ซึ่งคือค่าคาดหมายของผลตอบแทนของพอร์ต นั่นคือ

$$\mu = \varepsilon(R) = \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right)$$

เนื่องจากฟังก์ชันค่าคาดหมายมีสมบัติเชิงเส้น (linear) จึงได้

$$\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon(R_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i$$

ดังนั้น

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i$$

เมื่อนิยามความเสี่ยงของพอร์ตด้วยความแปรปรวนของผลตอบแทนของพอร์ต Θ ซึ่งแทนด้วย σ^2 ดังนั้น

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(R) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right)$$

เนื่องจากผลตอบแทนของสินทรัพย์แต่ละตัวในพอร์ต Θ มีความสัมพันธ์ต่อกันหรือกล่าวได้ว่าสินทรัพย์แต่ละตัวไม่เป็นอิสระซึ่งกันและกัน จึงได้

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \mathrm{Cov}(R_i, R_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j\end{aligned}$$

เมื่อ $\mathrm{Cov}(R_i, R_j)$ แทนความแปรปรวนร่วมเกี่ยว (covariance) ระหว่างผลตอบแทนของสินทรัพย์ R_i กับ R_j โดยที่

$$\mathrm{Cov}(R_i, R_j) = \varepsilon[(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)]$$

เมื่อ μ_i และ μ_j มีค่าจำกัด

$\rho_{i,j}$ แทนสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient) ระหว่างผลตอบแทนของสินทรัพย์ R_i และ R_j โดยที่

$$\rho_{i,j} := \rho_{R_i, R_j} = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_j)}{\sigma_{R_i}\sigma_{R_j}}$$

5. ทฤษฎีการจัดพอร์ตของมาร์โควิทส์

การทำสมดุลพอร์ต (balance a portfolio) เป็นวิธีการจัดสรรสัดส่วนน้ำหนักของสินทรัพย์ แต่ละตัวในพอร์ตเพื่อให้ความเสี่ยงรวมของพอร์ตมีค่าต่ำสุดเมื่อกำหนดผลตอบแทนคาดหมายค่าหนึ่งหรือเพื่อให้พอร์ตมีผลตอบแทนคาดหมายสูงสุด ณ ระดับความเสี่ยงที่กำหนด

ทฤษฎีการจัดพอร์ตของมาร์โควิทส์หรือ MPT เป็นการทำสมดุลของพอร์ตเพื่อจัดการความเสี่ยงของพอร์ตด้วยการจัดสรรน้ำหนักของสินทรัพย์ที่เหมาะสมโดยการสร้างกลุ่มสินทรัพย์จะมีเพียงสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง (ไม่รวมเงินฝากธนาคารหรือพันธบัตร) ตั้งแต่ 2 หลักทรัพย์ขึ้นไป MPT เป็นการสร้างพอร์ตจากการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างการจัดสรรน้ำหนักที่เหมาะสมของแต่ละหลักทรัพย์ในพอร์ตกับผลตอบแทนคาดหมายและความเสี่ยงของพอร์ตไปพร้อมๆ กัน โดยใช้ความแปรปรวนเป็นตัววัดความเสี่ยง

ผู้อ่านจะได้ทราบว่าความเสี่ยงของพอร์ตหรือความเสี่ยงรวมของสินทรัพย์ทั้งหมดในพอร์ตไม่อาจพิจารณาได้จากการคำนวณค่าความเสี่ยงของสินทรัพย์แต่ละตัวในพอร์ตเพียงอย่างเดียว แต่ต้องพิจารณาถึงปฏิสัมพันธ์ระหว่างสินทรัพย์แต่ละตัว (assets interact) ซึ่งคำนวณได้จากความแปรปรวนร่วมเกี่ยวหรือสหสัมพันธ์ของความเสี่ยงของสินทรัพย์แต่ละตัวในพอร์ตนั้นด้วย

ด้วยเหตุที่ MPT ใช้ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของผลตอบแทนของพอร์ตเป็นเกณฑ์ในการสร้างพอร์ตจึงรู้จักกันในอีกชื่อหนึ่งว่า ตัวแบบค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของพอร์ต (Mean-variance portfolio model)

การวิเคราะห์ตามทฤษฎีการจัดพอร์ตของมาร์โควิทส์มีรายละเอียด ดังนี้ สมมุติให้พอร์ตการลงทุน Θ มีหลักทรัพย์มากกว่า 2 หลักทรัพย์ขึ้นไปโดยกำหนดให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ แทนหลักทรัพย์แต่ละตัวและ $w_1, w_2, \ldots, w_n$

แทนน้ำหนักการลงทุนของหลักทรัพย์ $a_1, a_2, ..., a_n$ แต่ละชนิดตามลำดับ

กำหนดให้ W แทนเมทริกซ์ของน้ำหนักการลงทุนของแต่ละหลักทรัพย์ในพอร์ต Θ ดังนั้น

$$W = (w_1\ w_2\ ...\ w_n)$$

และกำหนดให้ O แทนเมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเท่ากับ 1 จึงได้

$$O = (1\ \ 1\ ...\ 1)$$

ผลรวมของสัดส่วนน้ำหนักการลงทุนของหลักทรัพย์แต่ละชนิดในพอร์ต Θ มีค่าเท่ากับ 1 นั่นคือ

$$w_1 + ... + w_n = 1$$

สังเกตว่า ผลคูณของเมทริกซ์ O และ W^t มีค่าเท่ากับ 1

$$O\,W^t = 1$$

เมื่อ W^t แทนเมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose matrix) ของเมทริกซ์ W

กำหนดให้ μ_i แทนค่าคาดหมายของหลักทรัพย์ a_i และ M แทนเมทริกซ์ของผลตอบแทนคาดหมายของหลักทรัพย์ นั่นคือ

$$M = (\mu_1\ \mu_2\ ...\ \mu_n)$$

และ C แทนเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมเกี่ยว (covariance matrix) ระหว่างผลตอบแทนของหลักทรัพย์แต่ละหลักทรัพย์ในพอร์ตโดยที่

$$C = (c_{i,j})$$

เมื่อ $c_{i,j} = \mathrm{Cov}(R_i, R_j)$ โดยที่ $c_{i,j} = \sigma_i^2$ แทนความแปรปรวนของผลตอบแทนของหลักทรัพย์ a_i นั่นคือ $c_{i,j} = \mathrm{Var}\,(R_i)$

ผลตอบแทนค่าคาดหมายของพอร์ตคำนวณได้จากผลคูณระหว่างเมทริกซ์ M และ W^t ดังนั้น

$$\mu = MW^t = \mu_1 w_1 + ... + \mu_n w_n \qquad \textbf{(5.1)}$$

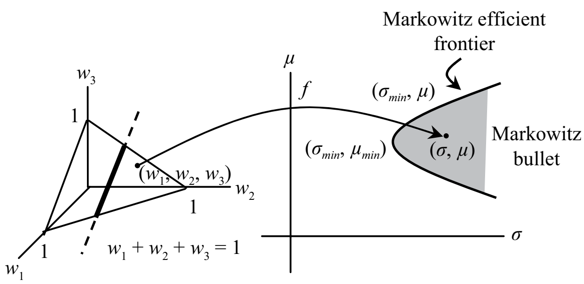
และความเสี่ยงของพอร์ตที่อยู่ในรูปเมทริกซ์เป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \mathrm{Var}(\mu_1 w_1 + ... + \mu_n w_n) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \mathrm{Cov}(R_i, R_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} w_i w_j \\
&= (w_1\ w_2\ ...\ w_n)\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \end{bmatrix} \\
&\qquad (w_1\ w_2\ ...\ w_n)^t \\
&= WCW^t \qquad \textbf{(5.2)}
\end{aligned}$$

5.1 มาร์โควิทส์บูลเล็ท

ในหัวข้อนี้จะอธิปรายถึงความสัมพันธ์ระหว่างการจัดสรรน้ำหนักของทุกหลักทรัพย์ W ในพอร์ตกับความเสี่ยงและผลตอบแทนของพอร์ต (σ, μ) เมื่อ μ และ σ คำนวณตามสูตร (5.1) และ (5.2) ตามลำดับ ซึ่ง (σ, μ) สอดคล้องกันกับแต่ละการจัดสรรน้ำหนัก ทั้งนี้ใช้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของพอร์ต σ เป็นตัววัดความเสี่ยง

แนวคิดของการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ของความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้แสดงได้ในรูปเชิงเรขาคณิตได้ดังรูป 5.1



รูป 5.1 มาร์โควิทส์บูลเล็ท

รูป 5.1 แสดงรูปเชิงเรขาคณิตของการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้ในกรณีที่พอร์ต Θ มีหลักทรัพย์เพียง 3 หลักทรัพย์เท่านั้น อย่างไรก็ตามรูปนี้จะก่อให้เกิดความเข้าใจเชิงเรขาคณิตในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ดังกล่าว ในกรณีทั่วไปเมื่อพอร์ต Θ มีหลักทรัพย์มากกว่า 3 ตัว ทั้งนี้จะได้ให้ความหมายของมาร์โควิทส์บูลเล็ทและเส้นแนวขอบประสิทธิผลมาร์โควิทส์ในภายหลัง ในกรณีทั่วไปภาพด้านซ้ายมือในรูป 5.1 แสดงปริภูมิ n มิติที่บรรจุเวกเตอร์น้ำหนัก W ที่ได้รับการจัดสรรในพอร์ต

เนื่องจากผลบวกของน้ำหนักของหลักทรัพย์ในพอร์ตต้องเท่ากับ 1 ดังนั้นเวกเตอร์น้ำหนักต้องอยู่บนระนาบเกิน (hyperplane) น้ำหนักการลงทุนเป็นไปตามสมการ

$$w_1 + ... + w_n = 1$$

ในกรณีที่ $n = 3$ จะเกิดเป็นระนาบสามัญ (ordinary plane) ที่มีจุดตัดแกน ได้แก่ $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ และ $(0, 0, 1)$ ในปริภูมิ 3 มิติ

ฟังก์ชัน f ในรูป 5.1 แทนฟังก์ชันที่ส่งแต่ละการจัดสรรน้ำหนักซึ่งแทนด้วยเวกเตอร์น้ำหนักในระนาบเกินน้ำหนักการลงทุนไปเป็นคู่อันดับของความเสี่ยงและค่าคาดหมายของผลตอบแทนที่สอดคล้องกับพอร์ตที่สร้างขึ้น นั่นคือ

$$f(w_1, ..., w_n) = (\sigma, \mu)$$

เมื่อ

$$\mu = \mu_1 w_1 + ... + \mu_n w_n = MW^t$$

และ

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} w_i w_j = WCW^t$$

เมื่อพิจารณาฟังก์ชัน f ในรูป 5.1 ในกรณีเมื่อ $n = 3$ จุดมุ่งหมายที่สำคัญคือเพื่อตรวจสอบเรนจ์ของเส้นตรงที่อยู่ในระนาบเกินของน้ำหนักการลงทุนภายใต้ฟังก์ชัน f

สมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรงในปริภูมิ n มิติไม่ว่าจะอยู่ในระนาบเกินน้ำหนักหรือไม่ก็ตามมีรูปแบบดังนี้

$$\ell(t) = (a_1 t + b_1, ..., a_n t + b_n) = At + B$$

เมื่อ

$$A = (a_1, ..., a_n) \text{ และ } B = (b_1, ..., b_n)$$

โดยที่พารามิเตอร์ t แปรเปลี่ยนจาก $-\infty$ ถึง ∞ มีข้อสังเกตว่า เมื่อ $t = 0$ ได้ $\ell(0) = B$ และ $t = 1$ ได้ $\ell(1) = A$

เวกเตอร์น้ำหนัก $W = (w_1, ..., w_n)$ ซึ่งคือการจัดสรรน้ำหนักการลงทุนเป็นพอร์ตๆ หนึ่ง ซึ่งเป็นจุดๆ หนึ่งบนเส้นตรงที่สอดคล้องกันกับ t ค่าหนึ่ง ผลตอบแทนคาดหมายคำนวณได้ดังนี้

$$\mu = MW = M(At + B) = (MA)t + MB$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของตัวแปร t

เมื่อแก้สมการข้างต้น โดยจัดนิพจน์ในรูปของตัวแปร t ได้ว่า

$$t = \frac{\mu - MB}{MA} = \alpha\mu + \beta \qquad \textbf{(5.3)}$$

ทั้งนี้ใช้สัญลักษณ์ α และ β เพื่อความสะดวกในการคำนวณและสมมุติด้วยว่าตัวหาร MA ไม่เป็นศูนย์

ต่อไปคำนวณความเสี่ยงในรูปของความแปรปรวนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= WCW^t \\ &= (At + B)C(A^t t + B^t) \\ &= (ACA^t)t^2 + (BCA^t + ACB^t)t + BCB^t \\ &= \gamma t^2 + \delta t + \varepsilon \qquad \textbf{(5.4)}\end{aligned}$$

ซึ่งอยู่ในรูปกำลังสองของ t ทั้งนี้ใช้สัญลักษณ์ γ, δ และ ε เพื่อให้สมการอยู่ในรูปอย่างง่าย

เมื่อแทนค่า (5.3) ซึ่งเป็นนิพจน์ของ t ที่มีพจน์ของ μ ลงใน (5.4) จึงได้

$$\sigma^2 = \gamma\,(\alpha\mu + \beta)^2 + \delta\,(\alpha\mu + \beta) + \varepsilon$$

ซึ่งอยู่ในรูปกำลังสองของ μ

เมื่อตัวแปร t แปรเปลี่ยนระหว่าง $-\infty$ ถึง ∞ ฟังก์ชัน $\ell(t)$ จะส่งเส้นตรงในระนาบเกินน้ำหนักการลงทุนไปเป็นคู่อันดับของความเสี่ยงและค่าคาดหมายของผลตอบแทนของพอร์ต ซึ่งเป็นจุดที่อยู่บนเส้นหรือ

ภายในของเส้นกราฟที่มีลักษณะคล้ายหัวกระสุนเป็นรูปพาราโบลาเปิดขวาในระนาบ (σ, μ) ดังรูป 5.1 ด้านขวามือ เรียกเส้นโค้งนี้ว่า *เส้นโค้งมาร์โควิทส์*

สรุปโดยง่ายได้ว่า เส้นตรงในระนาบเกินน้ำหนักการลงทุนจะถูกส่งไปเป็นเส้นโค้งมาร์โควิทส์ในระนาบ (σ, μ) ภายใต้ฟังก์ชัน *f*

มีข้อสังเกตที่สำคัญดังนี้

1. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็นตัววัดความเสี่ยงในการพิจารณาบนเส้นโค้งมาร์โควิทส์
2. เส้นโค้งมาร์โควิทส์ไม่เป็นเส้นโค้งพาราโบลา

5.2 พอร์ตที่ให้ความเสี่ยงต่ำสุด

พอร์ตที่ให้ความเสี่ยงต่ำสุด หมายถึง พอร์ตที่มีการจัดสรรน้ำหนักการลงทุนของหลักทรัพย์ที่ให้ความเสี่ยงต่ำสุด

กำหนดให้ $(\sigma_{min}, \mu_{min})$ แทนคู่อันดับที่มีความเสี่ยงและค่าคาดหมายของผลตอบแทนต่ำสุดจุดมุ่งหมายคือต้องการหาพอร์ตที่มีการจัดสรรน้ำหนักของสินทรัพย์การลงทุนในระนาบเกินน้ำหนักที่สอดคล้องกันกับคู่อันดับนี้

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ได้ให้สูตรในการคำนวณหาน้ำหนักของหลักทรัพย์ในพอร์ตดังกล่าวนี้ [6]

ทฤษฎีบท 5.1 *พอร์ตมีความเสี่ยงต่ำสุดเมื่อพอร์ตมีการจัดสรรน้ำหนักของแต่ละหลักทรัพย์ในพอร์ตดังนี้*

$$W = \frac{OC^{-1}}{OC^{-1}O^t} \qquad \textbf{(5.5)}$$

ในทฤษฎีบทนี้ มีข้อสังเกตว่าตัวส่วน $OC^{-1}O^t$ เป็นเพียงตัวเลขและตัวเศษ OC^{-1} เป็นผลคูณของเวกเตอร์หลัก O และเมทริกซ์ C^{-1}

<u>การพิสูจน์</u> ต้องการหาค่าต่ำสุดของความแปรปรวน

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} w_i w_j = WCW^t$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ คือ

$$OW^t = w_1 + ... + w_n = 1$$

โดยวิธีการออปติไมเซชันแบบตัวคูณลากรานจ์ (Lagrange multipliers) กำหนดให้ฟังก์ชันลากรานจ์มีรูปแบบดังนี้

$$g(w_1, ..., w_n) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} w_i w_j + \alpha(1 - w_1 - ... - w_n)$$

เมื่อหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับแต่ละตัวแปร $w_1, ..., w_n$ และ α ตามลำดับและกำหนดให้แต่ละอนุพันธ์ย่อยเหล่านั้นเท่ากับศูนย์ จัดพจน์จึงได้

$$CW^t = \frac{\alpha}{2} O^t$$

ดังนั้น

$$W = \frac{\alpha}{2} OC^{-1} \qquad \textbf{(5.6)}$$

ต่อไปหาค่า $\alpha / 2$ ด้วยการแทนค่า W ใน (5.6) ที่ได้นี้ลงในเงื่อนไขบังคับและโดยสมบัติความสมมาตรของ C และ C^{-1} จึงได้

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{OC^{-1}O^t}$$

เมื่อแทน $\alpha / 2$ ที่ได้นี้กลับลงไปในสูตร W ใน (5.6) จะได้สูตร (5.5) ตามต้องการ □

5.3 เส้นแนวขอบประสิทธิผล

กำหนดให้ (σ_{min}, μ) แทนคู่อันดับที่มีความเสี่ยงต่ำสุด σ_{min} สำหรับแต่ละค่าคาดหมายของผลตอบแทน μ ค่าหนึ่ง เรียกเซตที่บรรจุทุกคู่อันดับ (σ_{min}, μ) ว่า *เส้นแนวขอบประสิทธิผลมาร์โควิทส์* ซึ่งเป็นบริเวณบนเส้นโค้งมาร์โควิทส์

การจัดสรรน้ำหนักของแต่ละหลักทรัพย์ในพอร์ตที่ทำให้พอร์ตมีความเสี่ยงรวมต่ำสุด ซึ่งเป็นเส้นตรงในระนาบเกินน้ำหนักจะถูกส่งไปเป็นคู่อันดับ (σ_{min}, μ) ที่สอดคล้องกัน ซึ่งอยู่ในบริเวณบนเส้นโค้งมาร์โควิทส์ และเรียกเส้นตรงดังกล่าวข้างต้นนี้ว่า *เส้นตรงน้ำหนักที่มีความเสี่ยงต่ำสุด* (minimum-risk weight line)

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะให้สูตรการคำนวณหาน้ำหนักของแต่ละหลักทรัพย์ในพอร์ตที่ต้องจัดสรร ซึ่งสอดคล้องกับคู่อันดับ (σ_{min}, μ) บนเส้นแนวขอบประสิทธิผลมาร์โควิทส์

ทฤษฎีบท 5.2 *พอร์ตที่มีค่าคาดหมายของผลตอบแทน* μ *ค่าหนึ่งจะมีความเสี่ยงต่ำสุดเมื่อมีการจัดสรรน้ำหนักของแต่ละหลักทรัพย์ในพอร์ตเป็นดังนี้*

$$W = \frac{\begin{vmatrix} \mu & MC^{-1}O^t \\ 1 & OC^{-1}O^t \end{vmatrix} MC^{-1} + \begin{vmatrix} MC^{-1}M^t & \mu \\ OC^{-1}M^t & 1 \end{vmatrix} OC^{-1}}{\begin{vmatrix} MC^{-1}M^t & MC^{-1}O^t \\ OC^{-1}M^t & OC^{-1}O^t \end{vmatrix}} \quad \textbf{(5.7)}$$

เมื่อสัญลักษณ์ $|\,|$ หมายถึง ดีเทอร์มิเนนต์

จากทฤษฎีบทนี้มีข้อสังเกตว่าแต่ละค่า w_i ในเวกเตอร์ W เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ μ

<u>การพิสูจน์</u> ต้องการหาค่าต่ำสุดของความแปรปรวน

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} w_i w_j = WCW^t$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ คือ

$$MW^t = w_1\mu_1 + \ldots + w_n\mu_n = \mu$$

และ

$$OW^t = w_1 + \ldots + w_n = 1$$

โดยวิธีการออปทิไมเซชันแบบตัวคูณลากรานจ์ กำหนดให้ฟังก์ชันลากรานจ์มีรูปแบบดังนี้

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} w_i w_j + \alpha(1 - w_1\mu_1 - \ldots - w_n\mu_n) + \beta(1 - w_1 - \ldots - w_n)$$

เมื่อหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน g เทียบกับแต่ละตัวแปร $w_1, \ldots, w_n$, α และ β ตามลำดับและกำหนดให้แต่ละอนุพันธ์ย่อยเหล่านั้นมีเท่ากับศูนย์ จะได้ว่า

$$2CW^t = \alpha M^t + \beta O^t$$

ดังนั้น

$$W = \frac{1}{2}(\alpha M + \beta O)C^{-1} \quad \textbf{(5.8)}$$

ต่อไปแทนค่า W ตาม (5.8) ในรูปเมทริกซ์สลับเปลี่ยน W^t ลงในเงื่อนไขบังคับข้างต้นทั้งสอง จึงได้ระบบสมการต่อไปนี้

$$(MC^{-1}M^t)\alpha + (MC^{-1}O^t)\beta = 2\mu$$
$$(OC^{-1}M^t)\alpha + (OC^{-1}O^t)\beta = 2$$

เมื่อแก้ระบบสมการเพื่อหาค่า α และ β โดยหลักเกณฑ์คราเมอร์ (Cramer's rule) ได้ว่า

$$\alpha = \gamma^{-1} \begin{vmatrix} \mu & MC^{-1}O^t \\ 1 & OC^{-1}O^t \end{vmatrix}$$

และ

$$\beta = \gamma^{-1} \begin{vmatrix} MC^{-1}M^t & \mu \\ OC^{-1}M^t & 1 \end{vmatrix}$$

โดยที่ $2\gamma = \begin{vmatrix} MC^{-1}M^t & MC^{-1}O^t \\ OC^{-1}M^t & OC^{-1}O^t \end{vmatrix}$

เมื่อแทนค่า α และ β ลงใน (5.8) จะได้สูตร W ใน (5.7) ตามต้องการ $\square$

เรียกจุด (x, y) ที่มีรูปแบบ (σ, μ) สำหรับพอร์ตหนึ่งว่า *จุดที่ลงทุนได้ (attainable point)*

เนื่องจากจุดที่อยู่บนเส้นแนวขอบประสิทธิผลมาร์โควิทส์ทำให้เกิดความเสี่ยงต่ำสุด ดังนั้นจุดที่ลงทุนได้ทุกจุดต้องอยู่บนเส้นโค้งมาร์โควิทส์หรืออยู่ในบริเวณเส้นโค้งมาร์โควิทส์ด้านขวามือของจุดใดจุดหนึ่งที่อยู่บนเส้นโค้งมาร์โควิทส์ซึ่งเป็นที่มีค่าคาดหมายผลตอบแทนของพอร์ตเท่ากัน จุดดังกล่าวนี้มีความเสี่ยงสูงมากกว่าคู่อันดับที่อยู่บนเส้นแนวขอบประสิทธิผลมาร์โควิทส์

จุดที่สามารถลงทุนได้จะอยู่ในบริเวณพื้นที่ที่แรเงาด้านขวามือของรูป 5.1 บริเวณพื้นที่ที่แรเงานี้จะรวมถึงบริเวณบนเส้นขอบ เนื่องจากเส้นโค้งมาร์โควิทส์มีรูปร่างคล้ายกระสุนปืน ซึ่งมีลักษณะคล้ายแบบพาราโบลาเปิดขวาจึงรู้จักกันในชื่อว่า *กระสุนปืนมาร์โควิทส์*

คำนิยามต่อไปนี้จะช่วยอธิบายความสัมพันธ์ของจุดที่ลงทุนได้กับจุดที่อยู่บนเส้นแนวขอบประสิทธิผลมาร์โควิทส์

กำหนดให้ $P_1 = (\sigma_1, \mu_1)$ และ $P_2 = (\sigma_2, \mu_2)$ เป็นจุดที่ลงทุนได้ แล้ว (σ_1, μ_1) ครอบงำ (dominates) (σ_2, μ_2) ถ้า

$$\sigma_1 \le \sigma_2 \text{ และ } \mu_1 \ge \mu_2$$

กล่าวได้ว่า P_1 มีความเสี่ยงน้อยกว่าหรือเท่ากับ P_2 แต่ P_1 มีค่าคาดหมายผลตอบแทนมากกว่าหรือเท่ากับ P_2

ทฤษฎีบท 5.3 *จุดที่ลงทุนได้ใดๆ เป็นจุดที่ถูกครอบงำโดยจุดที่ลงทุนได้ที่อยู่บนเส้นแนวขอบเส้นแนวขอบประสิทธิผลมาร์โควิทส์*

จากทฤษฎีบทนี้กล่าวได้ว่า ผู้ลงทุนสามารถสร้างพอร์ตได้โดยเลือกการจัดสรรน้ำหนักของหลักทรัพย์ในพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสำหรับค่าคาดหมายของผลตอบแทนตามความต้องการได้โดยการเลือกจุด (σ, μ) ที่สอดคล้องซึ่งอยู่บนเส้นแนวขอบประสิทธิผลมาร์โควิทส์

6. ตัวแบบประเมินสินทรัพย์ทุน

6.1 ทฤษฎีพอร์ตมาร์โควิทส์

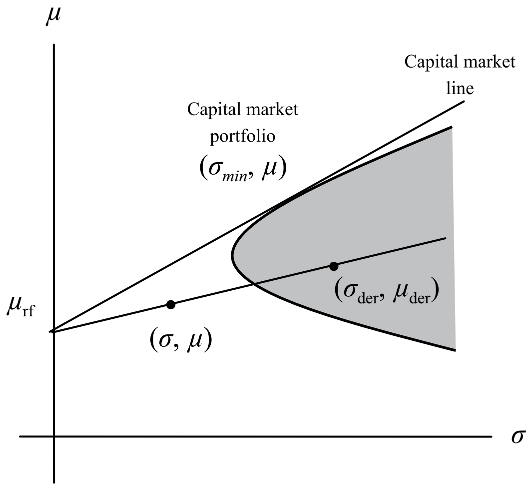
ในหัวข้อนี้จะได้อภิปรายถึงการจัดพอร์ตด้วย *ตัวแบบประเมินสินทรัพย์ทุน (The Capital Asset Pricing Model)* หรือที่รู้จักกันในชื่อ *CAPM (อ่านว่า แค็ปเอ็ม)*

ตัวแบบ CAPM ได้รับการพัฒนาโดยศาสตราจารย์วิเลียม ชาร์ป (Willam Sharpe) ซึ่งต่อมาท่านได้รับรางวัลโนเบลจากการคิดค้นนี้ ทั้งนี้ จอห์น ลินท์เนอร์ (John Lintner) และเจน มอส ซิน (Jan Mossin) ก็ได้พัฒนาตัวแบบ CAPM อย่างอิสระในช่วงเวลาเดียวกัน ด้วยเหตุนี้ตัวแบบ CAPM จึงรู้จักกันในอีกชื่อหนึ่งว่า *SLM capital asset pricing model*

ในการจัดพอร์ตตาม MPT ได้สมมุติให้สินทรัพย์ทั้งหมดในพอร์ตเป็นหลักทรัพย์ อย่างไรก็ตามตัวแบบ CAPM เป็นการพัฒนา MPT โดยการเพิ่มสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงเข้าไปในพอร์ตด้วย

สินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง คือ สินทรัพย์ที่มีความเสี่ยงเท่ากับศูนย์ เพราะว่าได้ใช้ความแปรปรวนเป็นตัววัดความเสี่ยง ดังนั้นความแปรปรวนของสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงจึงเท่ากับศูนย์

เมื่อเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคาดหมายและความเสี่ยงของผลตอบแทนของพอร์ตในตัวแบบ CAPM จะได้จุดซึ่งอยู่บนแกนตั้ง (จุด $(0, \mu_{rf})$) ดังรูป 6.1



รูป 6.1 เส้นตลาดทุน

6.2 การสร้างตัวแบบ CAPM

ตัวแบบ CAPM ถูกพัฒนาและปรับปรุงจาก MPT บนแนวคิดที่ว่าผู้ลงทุนสามารถปรับเปลี่ยนค่าคาดหมายหรือความเสี่ยงของผลตอบแทนที่จะได้รับจากพอร์ตได้โดยการปรับสมดุลระหว่างสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยงและปราศจากความเสี่ยงในพอร์ต ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

กำหนดให้ $a_1, ..., a_n$ แทนสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง โดยที่ $w_1, ..., w_n$ แทนน้ำหนักการลงทุนของสินทรัพย์ $a_1, ..., a_n$ ตามลำดับ

a_{rf} แทนสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงโดยที่ w_{rf} แทนน้ำหนักการลงทุนของสินทรัพย์ a_{rf}

สมมุติว่าพอร์ต $\tilde{\Theta}$ มีสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง a_{rf} และสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง $a_1, ..., a_n$ นั่นคือ

$$\tilde{\Theta} = (w_1, ..., w_n, w_{rf})$$

น้ำหนักการลงทุนของสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง มีค่าอย่างมากเท่ากับ 1 นั่นคือ

$$w_{\text{risky}} = \sum_{i=1}^{n} w_i < 1$$

ทั้งนี้เพราะว่า น้ำหนักการลงทุนของพอร์ตมีค่าเท่ากับ 1 นั่นคือ

$$w_{\text{rf}} + \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

ค่าคาดหมายของผลตอบแทนของพอร์ต $\widetilde{\Theta}$ มีค่าเท่ากับ

$$\mu = w_{\text{rf}}\mu_{\text{rf}} + \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i = w_{\text{rf}}\mu_{\text{rf}} + \mu_{\text{risky}}$$

เพราะว่าความแปรปรวนของ a_{rf} มีค่าเท่ากับ 0 และผลตอบแทน R_{rf} เป็นค่าคงตัว ดังนั้น ความแปรปรวนร่วมเกี่ยวระหว่างผลตอบแทนของ a_{rf} และ a_i เมื่อ $1 \le i \le n$ จึงมีค่าเท่ากับ 0 จึงได้

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \text{Var}\left(w_{\text{rf}}R_{\text{rf}} + \sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right) \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} w_{\text{rf}} w_j \text{Cov}(R_{\text{rf}}, R_j)}_{0} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \text{Cov}(R_i, R_j) \\ &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i\right) = \sigma^2_{\text{risky}}\end{aligned}$$

จึงได้

$$\sigma = \sigma_{\text{risky}}$$

เมื่อปรับสมดุลของสินทรัพย์ในพอร์ต $\widetilde{\Theta}$ โดยการนำเอาสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง a_{rf} ออกแล้วคำนวณน้ำหนักของสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยงที่เหลืออยู่ในพอร์ตใหม่ โดยยังคงให้น้ำหนักรวมของพอร์ตเท่ากับ 1 เรียกพอร์ตเช่นนี้ว่า *พอร์ตที่มีเพียงสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง* (derived risky portfolio) เท่านั้น ตัวอย่าง เช่น เดิมพอร์ตประกอบด้วยสินทรัพย์ 3 รายการ ดังนี้ สินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง a_{rf} โดยมีน้ำหนักการลงทุน $w_{\text{rf}} = 0.20$

สินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง a_1 โดยมีน้ำหนักการลงทุน $w_{\text{rf}} = 0.30$

สินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง a_2 โดยมีน้ำหนักการลงทุน $w_{\text{rf}} = 0.50$

ผลรวมของน้ำหนักของสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยงมีค่าเท่ากับ 0.8

เมื่อทำการปรับสมดุลของสินทรัพย์ในพอร์ตใหม่ โดยการนำเอาสินทรัพย์ a_{rf} ออกจะได้น้ำหนักการลงทุนของสินทรัพย์ที่เหลืออยู่ในพอร์ตเป็นดังนี้

สินทรัพย์ a_1 มีน้ำหนักการลงทุน $w_1 = 0.30 / 0.80 = 0.375$

สินทรัพย์ a_2 มีน้ำหนักการลงทุน $w_2 = 0.50 / 0.80 = 0.625$

สังเกตว่า ผลรวมของน้ำหนักของสินทรัพย์ที่เหลือเท่ากับ 1

กำหนดให้ μ_{der} และ σ^2_{der} แทนค่าคาดหมายผลตอบแทนและความเสี่ยงของพอร์ต Θ ตามลำดับ แล้วค่าคาดหมายผลตอบแทนและความเสี่ยงของพอร์ต $\widetilde{\Theta}$ ที่มีพจน์ของ μ_{der} และ σ^2_{der} เป็นดังนี้

$$\begin{aligned}\mu &= w_{\text{rf}}\mu_{\text{rf}} + \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i \\ &= w_{\text{rf}}\mu_{\text{rf}} + w_{\text{risky}}\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{w_{\text{risky}}} \mu_i \\ &= w_{\text{rf}}\mu_{\text{rf}} + w_{\text{risky}}\mu_{\text{der}}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right) \\ &= w^2_{\text{risky}}\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{w_{\text{risky}}} R_i\right) \\ &= w^2_{\text{risky}}\sigma^2_{\text{der}}\end{aligned}$$

จึงได้

$$\begin{aligned}\mu_i &= w_{\text{rf}}\mu_{\text{rf}} + w_{\text{risky}}\mu_{\text{der}} \\ \sigma &= w_{\text{risky}}\sigma_{\text{der}}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $w_{\text{rf}} + w_{\text{risky}} = 1$ จึงได้

$$\mu_{\text{der}} = \mu_{\text{rf}} + w_{\text{risky}}(\mu_{\text{der}} - \mu_{\text{rf}}) \quad \textbf{(6.1ก)}$$

$$\sigma = w_{\text{risky}}\sigma_{\text{der}} \quad \textbf{(6.1ข)}$$

สมการ (6.1ก) เป็นสมการเส้นตรงเมื่อ w_{risky} เป็นจำนวนจริงใดๆ

แก้สมการ (6.1ข) เพื่อหา w_{risky} แล้วจึงแทนลงใน (6.1ก) ได้ว่า

$$\mu = \frac{\mu_{\text{der}} - \mu_{\text{rf}}}{\sigma_{\text{der}}}\sigma - \mu_{\text{rf}}$$

กราฟเส้นตรงของสมการนี้แสดงในรูป 6.1 ทั้งนี้เมื่อ $w_{\text{risky}} = 0$ ได้ว่า

$$(\sigma, \mu) = (0, \mu_{\text{rf}})$$

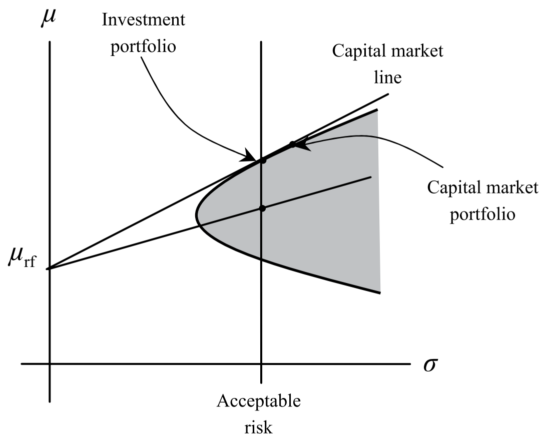
และเมื่อ $w_{\text{risky}} = 1$ ได้ว่า

$$(\sigma, \mu) = (\sigma_{\text{der}}, \mu_{\text{der}})$$

มีข้อสังเกตว่า คู่อันดับ $(\sigma_{\text{der}}, \mu_{\text{der}})$ ที่สอดคล้องกับ $w_{\text{risky}} = 1$ เป็นคู่อันดับของค่าคาดหมายและความเสี่ยงของพอร์ตที่มีเพียงสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง ดังนั้นคู่อันดับนี้ต้องอยู่ภายในบริเวณที่แรเงาในกราฟกระสุนมาร์โควิทส์

การตีความการจัดพอร์ตในรูป 6.2 เป็นดังนี้ ผู้ลงทุนที่จัดพอร์ตซึ่งมีสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงและมีความเสี่ยงจะให้คู่อันดับค่าคาดหมายและความเสี่ยงของผลตอบแทนของพอร์ตเป็นคู่อันดับใดคู่อันหนึ่งที่อยู่บนเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างคู่อันดับ $(0, \mu_{\text{rf}})$ และ $(\sigma_{\text{der}}, \mu_{\text{der}})$ อย่างไรก็ตามเส้นตรงทุกเส้นที่เชื่อมระหว่างคู่อันดับบนแกนตั้งกับคู่อันดับ $(0, \mu_{\text{rf}})$ ใดๆ ซึ่งอยู่ในบริเวณรูปกระสุนมาร์โควิทส์จะเกิดคู่อันดับที่ให้ค่าคาดหมายของผลตอบแทนของพอร์ตสูงสุดเมื่อกำหนดความเสี่ยง ซึ่งเป็นเส้นตรงในแนวตั้งกับกราฟกระสุนมาร์โควิทส์ ดังรูป 6.2

เรียกเส้นสัมผัสดังกล่าวนี้ว่า *เส้นตลาดทุน* (capital market line) หรือเส้น CML และเรียกคู่อันดับที่อยู่บนเส้นตรงที่สัมผัสกับเส้นขอบประสิทธิผลมาร์โควิทส์ว่า *พอร์ตตลาด (ทุน)* ((capital) market portfolio) หรือ (C)MP



รูป 6.2 พอร์ตการลงทุน ณ ระดับความเสี่ยงที่กำหนด

มีข้อสังเกตว่าถึงแม้เส้นโค้งมาร์โควิทส์มีความคล้ายคลึงกับเส้นโค้งพาราโบลา แต่เส้นโค้งมาร์โควิทส์จะแบนออกเมื่อความเสี่ยง (ตามแกนนอน) เพิ่มมากขึ้น ด้วยเหตุนี้ถ้า μ_{rf} มีค่าอย่างมากแล้วจะไม่เกิดเส้นสัมผัสที่เกิดระหว่างคู่อันดับ $(0, \mu_{\text{rf}})$ กับคู่อันดับที่อยู่ในบริเวณส่วนบนของเส้นโค้งมาร์โควิทส์ ดังนั้นจึงไม่มีเส้น CML ซึ่งทำให้ไม่เกิด MP

สมมุติว่ามีเส้น CML อยู่จริงแล้วจะสามารถหาคู่อันดับใดๆ บนเส้นตรง CML ได้เสมอโดยการปรับสมดุลระหว่างน้ำหนักการลงทุนของ w_{rf} และ w_{risky}

มีข้อสรุปที่สำคัญจากรูป 6.2 ดังนี้ เพื่อให้ได้ค่าคาดหมายผลตอบแทนของพอร์ตสูงสุดเมื่อกำหนดระดับความเสี่ยงค่าหนึ่งผู้ลงทุนควรจะลงทุนในพอร์ตที่มีสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงและ MP ทั้งนี้ผู้ลงทุนสามารถคำนวณน้ำหนักการลงทุนของสินทรัพย์ในพอร์ตดังกล่าวได้ตามระดับความเสี่ยงที่ต้องการ

6.3 สมการของ CML

ถ้าพอร์ตตลาด (MP) มีคู่อันดับค่าคาดหมายและความเสี่ยงของผลตอบแทนของพอร์ตแทนด้วย (σ_M, μ_M) แล้วสมการของ CML เป็นดังนี้

$$\mu = \frac{\mu_M - \mu_{\text{rf}}}{\sigma_M}\sigma + \mu_{\text{rf}}$$

ดังนั้น สำหรับคู่อันดับใดๆ (σ, μ) บนเส้นตรงนี้ จึงได้

$$\mu - \mu_{\mathrm{rf}} = \frac{\mu_M - \mu_{\mathrm{rf}}}{\sigma_M}\,\sigma$$

ซึ่งเป็นค่าคาดหมายของผลตอบแทนเพิ่มเติมจากค่าคาดหมายของผลตอบแทนของสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง เรียกผลต่างนี้ว่าส่วนชดเชยความเสี่ยง

มีข้อสังเกตว่า เมื่อผู้ลงทุนต้องการผลตอบแทนของพอร์ตเพิ่มเติมย่อมคาดได้ว่าต้องมีความเสี่ยงเพิ่มขึ้นด้วยเช่นกัน

น้ำหนักการลงทุนของ MP เป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.1 *สำหรับค่าคาดหมายของผลตอบแทนของสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงใดๆ μ_{rf} ค่าหนึ่ง น้ำหนักการลงทุนที่จัดสรรใน MP คำนวณได้จากสูตรต่อไปนี้*

$$W = \frac{(M - \mu_{\mathrm{rf}}O)C^{-1}}{(M - \mu_{\mathrm{rf}}O)C^{-1}O^t}$$

เมื่อเมทริกซ์ M, O และ C นิยามแล้วในหัวข้อก่อน

มีข้อสังเกตว่าสูตรการคำนวณ W ในทฤษฎีบท 6.1 ตัวหารของ W เป็นจำนวนจริง

7. ตัวอย่างการจัดพอร์ต

ในหัวข้อนี้จะได้แสดงการคำนวณการจัดสรรน้ำหนักของพอร์ตการลงทุนโดยใช้ทฤษฎีบท 5.1, 5.2 และ 6.1 โดยจะแสดงวิธีการคำนวณด้วย Microsoft Excel นอกจากนี้จะได้แสดงการหาน้ำหนักการลงทุนของสินทรัพย์ในพอร์ตและเส้นโค้งมาร์โควิทส์ด้วย MATLAB โดยใช้คำสั่ง frontcon

กำหนดให้พอร์ตการลงทุนประกอบด้วยหลักทรัพย์ 3 ชนิดโดยมีค่าผลตอบแทนความเสี่ยงและสัมประสิทธิสหสัมพันธ์ระหว่างหลักทรัพย์แต่ละตัวแสดงดังนี้ ดัชนี 1, 2 และ 3 แทนหลักทรัพย์ทั้ง 3 ชนิดตามลำดับ

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0.55, 3.25, 5)$$
$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0.01, 1.05, 2.25)$$
$$\rho_{1,2} = \rho_{2,1} = -0.15$$
$$\rho_{1,3} = \rho_{3,1} = 0.25$$
$$\rho_{2,3} = \rho_{3,2} = 0.75$$

คำนวณค่าต่างๆ ที่ต้องใช้ในทฤษฎีบท 5.1 โดย Microsoft Excel จึงได้ดังรูป 7.1

ตามทฤษฎีบท 5.1 พอร์ตที่ให้ความเสี่ยงต่ำสุดเมื่อมีการจัดสรรน้ำหนักการลงทุนของหลักทรัพย์ ดังนี้

$$W = \frac{OC^{-1}}{OC^{-1}O^t}$$

Capital Asset Pricing Model-Fill in Grey Cells

User Data		Returns μ_i	Risks σ_i	Correlation		
	i=1	0.55	0.01	-0.15	$\rho_{1,2}=\rho_{2,1}$	Assume:
	i=2	3.25	1.05	0.25	$\rho_{1,3}=\rho_{3,1}$	$\rho_{1,1}=\rho_{2,2}=\rho_{2,2}=1$
	i=3	5	2.25	0.75	$\rho_{2,3}=\rho_{3,2}$	
$C=(c_{ij})=(\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j)$		j=1	j=2	j=3		
	i=1	0.0001	-0.0016	0.0056		
	i=2	-0.0016	1.1025	1.7719		
	i=3	0.0056	1.7719	5.0625		
Inverse of C		14767.9325	108.4991	-54.3835		
		108.4991	2.8703	-1.1252		
		-54.3835	-1.1252	0.6518		
Min Risk Point		**OC^{-1}=**	14822.0481	110.2443	-54.8569	**O=(1 1 1)**
		$OC^{-1}O^t$=	14877.4354			
		W=	0.9963	0.0074	-0.0037	**$M=(\mu_1\ \mu_2\ \mu_3)$**
		μ=	0.5536			**$\mu=MW^t$**
		WC=	0.0001	0.0001	0.0001	
		WCW^t=	0.0001			
		σ=	0.0082			
Min Risk Line		**MC^{-1}=**	8203.0674	63.3772	-30.3089	
		$MC^{-1}O^t$=	8236.1358			
		$OC^{-1}M^t$=	8236.1358			
		$MC^{-1}M^t$=	4566.1186			
		Denom Det=	98202.6042			

รูป 7.1 แผ่นงาน Microsoft Excel ของการคำนวณค่าต่างๆ ในตัวอย่างนี้ตามทฤษฎีบท 5.1

จากรูป 7.1 คำนวณตัวเศษของ

$$OC^{-1} = [1\ 1\ 1] \begin{bmatrix} 14767.9325 & 108.4991 & -54.3835 \\ 108.4991 & 2.8703 & -1.1252 \\ -54.3835 & -1.1252 & 0.6518 \end{bmatrix}$$

$$= [14822.0481\ \ 110.2443\ \ -54.8569]$$

และตัวส่วนของ W

$$OC^{-1}O^t$$
$$= [14822.0481\ \ 110.2443\ \ -54.8569]\ [1\ \ 1\ \ 1]^t$$
$$= 14877.4354$$

ดังนั้น

$$W = \frac{OC^{-1}}{OC^{-1}O^t}$$

$$= \frac{1}{14877.4354} [14822.0481\ \ 110.2443\ \ -54.8569]$$

$$= [0.9963\ \ 0.00741\ \ -0.0037]$$

ค่าคาดหมายและความเสี่ยงของผลตอบแทนของพอร์ตที่มีน้ำหนักการลงทุน W นี้ตามลำดับเป็นดังนี้

$$\mu = MW^t$$
$$= [0.55\ \ 3.25\ \ 5]\ [0.9963\ \ 0.0074\ \ -0.0037]^t$$
$$= 0.5536$$

และ

$$\sigma^2 = WCW^t$$
$$= [0.9963\ 0.00741\ -0.0037]$$
$$\times \begin{bmatrix} 0.0001 & -0.0016 & -0.0056 \\ 0.0016 & 1.1025 & 1.7719 \\ 0.0056 & 1.7719 & 5.0625 \end{bmatrix}$$
$$\times [0.9963\ 0.00741\ -0.0037]^t$$
$$= 6.724 \times 10^{-5}$$

ดังนั้น

$$= (\sigma_{\min}, \mu_{\min}) = (00.82\%, 55.36\%)$$

ต่อไปสร้างพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุดเมื่อกำหนดค่าคาดหมายผลตอบแทน μ ของพอร์ตค่าหนึ่ง โดยใช้สูตรในทฤษฎีบท 5.2

รูป 7.2 แสดงตัวอย่างการคำนวณความเสี่ยงต่ำสุดเมื่อกำหนดค่าคาดหมายของผลตอบแทน μ ที่แตกต่างกัน 3 ค่า คือ 0, 0.5 และ 1.45 ตัวอย่างการคำนวณในรูป 7.2 เป็นดังนี้

เมื่อกำหนดให้ μ = 0.5 โดยทฤษฎีบท 5.2 พอร์ตมีความเสี่ยงต่ำสุดเมื่อมีการจัดสรรน้ำหนักการลงทุนของหลักทรัพย์ ดังนี้

$$W = \frac{\begin{vmatrix} \mu & MC^{-1}O^t \\ 1 & OC^{-1}O^t \end{vmatrix} MC^{-1} + \begin{vmatrix} MC^{-1}M^t & \mu \\ OC^{-1}M^t & 1 \end{vmatrix} OC^{-1}}{\begin{vmatrix} MC^{-1}M^t & MC^{-1}O^t \\ OC^{-1}M^t & OC^{-1}O^t \end{vmatrix}}$$

จากผลการคำนวณดังรูป 7.2 ได้ว่า ตัวเศษพจน์แรกเท่ากับ

$$\begin{vmatrix} \mu & MC^{-1}O^t \\ 1 & OC^{-1}O^t \end{vmatrix} MC^{-1}$$

$$= -797.4181\ [8203.0674\ \ 63.3772\ \ -30.3089]$$
$$= [-6541274.1758\ \ -50538.1638\ \ 24168.8664]$$

ตัวเศษพจน์สองเท่ากับ

$$\begin{vmatrix} MC^{-1}M^t & \mu \\ OC^{-1}M^t & 1 \end{vmatrix} OC^{-1}$$

$$= 448.0507\ [14822.0481\ 110.2443\ \ -54.8569]$$
$$= [6641029.7286\ \ 49395.0260\ \ -24578.6772]$$

และตัวส่วนเท่ากับ

$$\begin{vmatrix} MC^{-1}M^t & MC^{-1}O^t \\ OC^{-1}M^t & OC^{-1}O^t \end{vmatrix} = 98202.6042$$

Return μ	Num Det 1	Num 1st Term		
0	-8236.1358	-67561577.3662	-521983.6340	249628.2361
0.5	-797.4181	-6541274.1758	-50538.1638	24168.8664
1.45	13336.1456	109397301.8859	845208.2296	-404203.9362

Num Det 2	Num 2st Term		
4566.1186	67679230.1031	503388.4005	-250483.1354
448.0507	6641029.7286	49395.0260	-24578.6772
-7376.2783	-109331550.9831	-813192.3854	404639.7934

Num of W			W		
117652.7370	-18595.2335	-854.8993	1.1981	-0.1894	-0.0087
99755.5528	-1143.1378	-409.8108	1.0158	-0.0116	-0.0042
65750.9028	32015.8441	435.8572	0.6695	0.3260	0.0044

Return μ	WC			σ^2=WCW^t	Risk σ
0.0000	0.0004	-0.2261	-0.3728	0.0465	0.2156
0.5000	0.0001	-0.0218	-0.0360	0.0005	0.0224
1.4500	-0.0004	0.3662	0.6039	0.1218	0.3490

รูป 7.2 แผ่นงาน Microsoft Excel ของการคำนวณค่าต่างๆ ในตัวอย่างนี้ตามทฤษฎีบท 5.2

Market Portfolio

Risk-Free Rate	M-RFR*O			(M-RFR*O)C^{-1}			Den
0.2500	0.3000	3.0000	4.7500	4497.5554	35.8162	-16.5947	4516.7769
0.5500	0.0000	2.7000	4.4500	50.9410	2.7429	-0.1376	53.5463
0.7500	-0.2000	2.5000	4.2500	-2913.4686	-19.3060	10.8338	-2921.9408

W			Return μ	WC			σ^2=WCW^t	Risk σ
0.9957	0.0079	-0.0037	0.5551	0.0001	0.0007	0.0011	0.0001	0.0082
0.9513	0.0512	-0.0026	0.6769	0.0000	0.0504	0.0831	0.0024	0.0487
0.9971	0.0066	-0.0037	0.5513	0.0001	-0.0009	-0.0015	0.0001	0.0082

รูป 7.3 แผ่นงาน Microsoft Excel ของการคำนวณค่าต่างๆ ในตัวอย่างนี้ตามทฤษฎีบท 6.1

ดังนั้น

$$W = \frac{1}{98202.6042}$$

$$([-6541274.1758 \ -50538.1638 \ 24168.8664] + [6641029.7286 \ 49395.0260 \ -24578.6772])$$

$$= \frac{1}{98202.6042} \times [99755.5528 \ -1143.13789 \ -409.8108]$$

$$= [1.0581 \ -0.0116 \ -0.0042]$$

จึงได้การจัดสรรน้ำหนักการลงทุนของหลักทรัพย์ที่ทำให้พอร์ตมีความเสี่ยงต่ำสุดเท่ากับ 0.0224 และผลตอบแทนคาดหมายเท่ากับ 0.5 ตามต้องการ ส่วนในรูป 7.3 จะแสดงตัวอย่างการคำนวณโดยใช้ทฤษฎีบท 6.1

ในตัวอย่างข้างต้นมีจุดมุ่งหมายเพื่อแสดงวิธีการคำนวณตามทฤษฎีบท 5.1 และ 5.2 โดยใช้ Microsoft Excel อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติจะสามารถสร้างพอร์ตการลงทุนและเส้นโค้งมาร์โควิทส์ได้โดยง่ายโดยใช้ MATLAB จากข้อมูลในตัวอย่างก่อนหน้านี้คำสั่งการสร้างพอร์ตโดยโปรแกรม MATLAB เป็นดังนี้

```
>> ExpReturn=[0.55 3.25 5.00];
>> ExpCovariance=[0.0001 -0.0016 0.0056;
-0.0016 1.1025 1.7719;
0.00566 1.7719 5.0625];
>> NumPorts=10;
>> [PortRisk, PortReturn, PortWts] =
frontcon(ExpReturn,ExpCovariance,NumPorts)
>>
frontcon(ExpReturn,ExpCovariance,NumPorts)
```

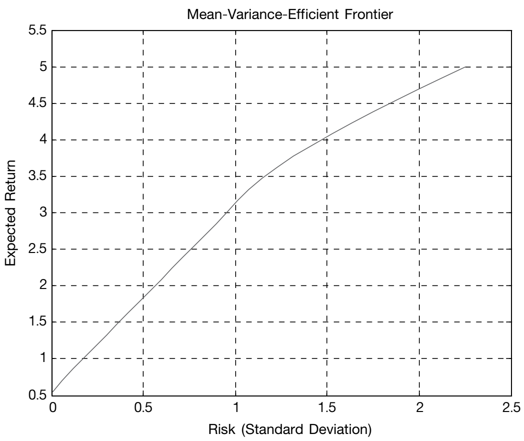
คำสั่ง 7.4 คำสั่งการสร้างพอร์ตโดย MATLAB

คำสั่งข้างต้นนี้จะแสดงพอร์ตการลงทุนจำนวน 10 พอร์ตดังตาราง 7.5 และเส้นโค้งมาร์โควิทส์ดังรูป 7.6

มีข้อสังเกตว่า การจัดสรรน้ำหนักหลักทรัพย์ของพอร์ตในแถวแรกของตาราง 7.5 มีค่าใกล้เคียงกับการคำนวณโดยใช้ Microsoft Excel

ความเสี่ยง σ	ผลตอบแทนค่าคาดหมาย μ	สัดส่วนการลงทุน		
		w_1	w_2	w_3
0.0099	0.5541	0.9985	0.0015	0.0000
0.1926	1.0481	0.8160	0.1832	0.0008
0.3848	1.5421	0.6360	0.3588	0.0053
0.5771	2.0361	0.4559	0.5343	0.0097
0.7693	2.5301	0.2759	0.7099	0.0142
0.9616	3.0240	0.0958	0.8855	0.0187
1.1701	3.5180	0	0.8468	0.1532
1.4773	4.0120	0	0.5646	0.4354
1.8476	4.5060	0	0.2823	0.7177
2.2500	5.0000	0	0	1.0000

ตาราง 7.5 พอร์ตที่ได้จากการรันคำสั่งข้างต้น



รูป 7.6 เส้นโค้งมาร์โควิทส์ที่ได้จากคำสั่งข้างต้น

8. อ้างอิง

1. Boonserm, P. and Achalakul, T., 2009, "The SNN-Based Predictive Model for HGA Manufacturing", *KMUTT Research and Development Journal*, Vol. 33, No. 3, pp. 185-196.

2. Budsaratrakul, P., 2006. *Fundamentals of Investment and Application*, 2 Edition, Chulalongkorn University Book Center, Bangkok, pp.108. (In Thai)

3. Bülmke, A., 2009, *How to Invest in Structured Products: A Guide for Investors and Investment Advisors*, Wiley, Chichester, West Sussex, U.K., pp. 223-324.

4. Kittitavornkul, K. and Pimsakul, S., 2011, "Scheduling of Inbound and Outbound Trucks in Retail Cross Docking Distribution Center by Heuristic Methods", *KMUTT Research and Development Journal*, Vol. 35, No. 2, pp. 219-233.

5. Markowitz, H., 1952, "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, Vol. 12, pp. 77-91.

6. Roman, S., 2004, *Introduction to the Mathematics of Finance: From Risk Management to Option Pricing*, Springer, United-states of America, pp. 41-75.

7. Sharpe, W., 1964, Capital Asset Price: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk, *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, pp. 425-442.