

การวิเคราะห์สถิติศาสตร์ของสายยึดโยงใต้ทะเลลึกโดยใช้ แบบจำลองอีลาสติกรีด

พลวัฒน์ แยมจินดา¹ และ สมชาย ชูชีพสกุล²
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี บางมด ทุ่งครุ กรุงเทพฯ 10140

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอวิธีการวิเคราะห์ทางสถิติศาสตร์ของสายยึดโยงใต้ทะเลลึก โดยใช้แบบจำลอง 3 มิติของอีลาสติกรีด ซึ่งใช้เวกเตอร์บอกตำแหน่งในการกำหนดตำแหน่งสมดุลของสายยึดโยง สมการอนุพันธ์ครอบคลุมปัญหาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างแรงลัพธ์ โมเมนต์ลัพธ์ และความเครียดในแนวสัมผัสภายใต้เงื่อนไขไม่ยึดตัวในแนวแกน ทั้งนี้ใช้ระเบียบวิธีกาลิเลอริคินไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสันในการหาคำตอบเชิงตัวเลขของปัญหาสมดุลสถิตแบบไม่เชิงเส้น และพิจารณาแรงเนื่องจากความเร็วของกระแส น้ำ แรงดันน้ำภายนอก แรงลอยตัว และน้ำหนักตัวเอง ซึ่งมีผลต่อสภาวะสมดุล เป็นกรณีศึกษาสำหรับงานวิจัยนี้ ผลการวิเคราะห์ที่ได้จากกระบวนการหาคำตอบเชิงตัวเลข เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยในอดีตพบที่มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

คำสำคัญ : การไม่ยึดตัวในแนวแกน / วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ / สายยึดโยงใต้ทะเล / อีลาสติกรีด

* Corresponding author. E-mail : polvath@hotmail.com

¹ นักศึกษาปริญญาโท สาขาเทคโนโลยีวิศวกรรมโยธา

² ศาสตราจารย์ สาขาวิศวกรรมโยธา

Static Analysis of Deep Water Mooring Lines using Elastic Rod Model

Polvath Yaemchinda^{1*}, Somchai Chucheeepsakul²

King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangmod, Thungkru, Bangkok 10140, Thailand

Abstract

This paper describes the static analysis of deep water mooring lines by a three-dimensional elastic rod model, which involves a position vector used to locate the equilibrium position of mooring lines. The governing differential equations are obtained from the resultant forces, resultant moments and the strain of the centerline in the tangential direction with inextensibility condition. The Galerkin finite element method together with the Newton-Rapson's iterative process was used to obtain numerical results of the nonlinear static problem. The applied static forces on the mooring lines such as the current velocity, hydrostatic force, buoyancy force and self-weight affecting the equilibrium configuration of mooring line are presented and discussed. The results of this study are compared with those from the previous research works and they are found to be in a very good agreement.

Keywords : Elastic Rod / Finite Element Method / Inextensibility / Mooring lines

* Corresponding author. E-mail : polvath@hotmail.com

¹ M.Eng Candidate, Department of Civil Engineering Technology, Faculty of Engineering.

² Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering.

1. บทนำ

ในปัจจุบันอุตสาหกรรมนอกฝั่งได้ขยายออกไปไกลถึงระดับน้ำลึกเพื่อค้นหาน้ำมันและก๊าซธรรมชาติทำให้ต้องออกแบบโครงสร้างให้ลอยน้ำได้เช่น Semi-Submerible Spar และ FPSO เป็นต้น การควบคุมให้โครงสร้างลอยนิ่งอยู่กับที่หรือบริเวณที่มีดำเนินกิจกรรมเช่น การขุดเจาะและการขนถ่ายน้ำมัน จำเป็นต้องใช้สายยึดโยงหรือเคเบิลเพื่อดำเนินการเคลื่อนที่เมื่อถูกแรงจากกระแสน้ำและแรงลมกระทำ การศึกษาปัญหาส่วนใหญ่ของเคเบิลเพื่อต้องการหาตำแหน่งการวางตัวของเคเบิลและแรงดึงที่จุดต่างๆ ตลอดความยาวโดยเฉพาะแรงดึงที่ปลายบนและปลายล่าง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเคเบิลใต้ทะเลใน 2 มิติ เช่น Berteaux [1] ได้ทำการศึกษาสมมูลสถิตของเคเบิลใต้ทะเลในรูปแบบที่ไม่ซับซ้อนเช่น Catenary โดยทราบค่าแรงดึงที่ปลายบนและคำนวณหาความยาวของเคเบิล Henghold และคณะ [2] ได้ทำการศึกษาสมภาวะสมดุลและคำนวณความถี่ธรรมชาติของเคเบิลในอากาศโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ Seck-Hong [4] ได้ทำการศึกษาเคเบิลภายใต้น้ำหนักแผ่นกึ่งที่ตลอดความยาวทั้งแนวราบและแนวตั้ง โดยแสดงคำตอบในรูปแบบที่แน่นอน Chuchee-sakul และ Huang [5] ได้ทำการศึกษาสมมูลสถิตของเคเบิลโดยทราบค่าแรงดึงที่ปลายบนและไม่คำนึงถึงผลการยึดตัวในแนวแกนโดยใช้วิธีแปรผัน สามารถ [11] ได้ทำการศึกษาทางสถิติศาสตร์ของเคเบิลในทะเลที่ยึดตัวได้ในระบบพิกัดขั้วโดยวิเคราะห์ถึงผลกระทบต่อสมดุลที่เกิดจากการยึดตัวในแนวแกนและอัตราส่วนปัวซอง

ศิลปะชัย [12] ได้ทำการศึกษาการสั่นแบบอิสระในระนาบของเคเบิลในทะเลในระบบพิกัดฉาก โดยคำนึงถึงผลการยึดตัวในแนวแกนและกำหนดค่าแรงดึงที่ปลายบนโดยพิจารณาผลกระทบของค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น เป็นต้น

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเคเบิลใต้ทะเลใน 3 มิติ เช่น Friswell [6] ได้ทำการศึกษาสมมูลสถิตศาสตร์ของเคเบิลในทะเลโดยไม่คำนึงถึงการยึดตัวในแนวแกนและพิจารณาผลของแรงลากเนื่องมาจากความเร็วของกระแสน้ำและ

วิเคราะห์ปัญหาของเคเบิลที่มีการหย่อนตัวมาก ภิเศก [13] ได้ทำการศึกษาทางสถิติศาสตร์ของการยึดตัวในแนวแกนที่มีผลต่อสมภาวะสมดุลของเคเบิลในทะเล ในระบบพิกัดฉากโดยทำการเปลี่ยนแปลงโมดูลัสความยืดหยุ่น และชยันนัทน์ [14] ได้ทำการศึกษาทางสถิติศาสตร์ของเคเบิลในทะเลที่ยึดตัวได้ด้วยพิกัดทรงกระบอก เป็นต้น

งานวิจัยเหล่านี้มีวัตถุประสงค์คล้ายคลึงกันคือหาความยาว แรงดึงและการวางตัวของเคเบิลซึ่งแต่ละวิธีก็มีข้อดีข้อเสียแตกต่างกัน ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องหาวิธีที่เหมาะสมที่สุดเพื่อลดปัญหาและขั้นตอนการคำนวณที่ยุ่งยากซับซ้อน ซึ่งงานวิจัยนี้จะทำการศึกษาทางสถิติศาสตร์โดยใช้แบบจำลองอีลาสติกรีดซึ่งแบบจำลองนี้ถูกนำเสนอโดย Garrett [3, 8] ซึ่งได้ทำการศึกษาทางพลศาสตร์ของเคเบิลและท่อลำเลียงใต้ทะเลควบคู่กับแท่นลอยการผลิตและไม่คำนึงถึงผลการยึดตัวในแนวแกน ต่อมา Kim [7] และคณะได้ทำการศึกษาทางพลศาสตร์ของเคเบิลและท่อลำเลียงใต้ทะเลควบคู่กับแท่นลอยการผลิตเช่นเดียวกับ Garrett [8] โดยเปลี่ยนวัสดุของเคเบิลเป็นโพลีเอสเตอร์ (polyester) และคำนึงถึงผลการยึดตัวในแนวแกน

แบบจำลองโครงสร้างเคเบิลใต้ทะเลนี้อยู่ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนโดยใช้เวกเตอร์บอกตำแหน่งกำหนดตำแหน่งสมดุลของเคเบิล สมการครอบคลุมของปัญหาเป็นสมการแบบไม่เชิงเส้นในระบบแกนรวมใหญ่ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ถูกสร้างขึ้นโดยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค่างโดยวิธีของกาลเลอร์คินร่วมกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยวิธีของนิวตัน-ราฟสันหลังจากนั้นนำสมการที่ได้มาประดิษฐ์โปรแกรมคำสั่งคอมพิวเตอร์โดยใช้ MATLAB ในการคำนวณหาคำตอบของปัญหาต่างๆ แล้วตรวจสอบความถูกต้องกับงานวิจัยอื่นๆ ที่ได้ทำไว้แล้วในอดีตและทำการวิจัยกรณีศึกษาต่างๆ อาทิเช่น ความเร็วของกระแสน้ำเมื่อเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของเคเบิล การหาค่าแรงดึงวิกฤตและความยาววิกฤตของเคเบิลเมื่อน้ำหนักประสิทธิผลของเคเบิลเป็นศูนย์หรือเคเบิลอยู่ในสภาวะแรงลอยตัวสะเทิน (neutrally buoyant cable) เป็นต้น

2. แบบจำลองอีลาสติกรีด

2.1 ระบบพิกัด

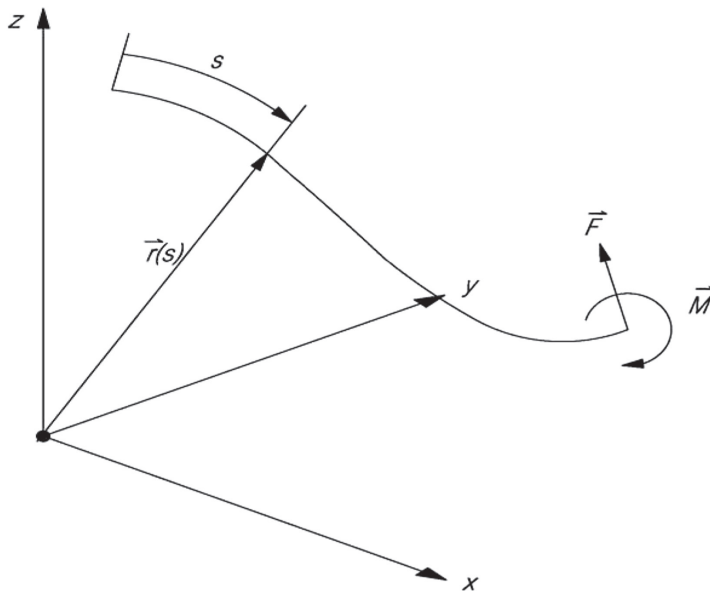
เมื่อให้เคเบิลเป็นเส้นโค้งอยู่ใน 3 มิติ (space-curve) และให้ $\vec{r}(s)$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งซึ่งเป็นฟังก์ชันของความยาวส่วนโค้งของเคเบิลตามรูปที่ 1 กำหนดให้ \hat{t} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง \hat{n} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวฉากของเส้นโค้ง และ \hat{b} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวฉากคู่ของเส้นโค้ง ซึ่งมีความสัมพันธ์กับเวกเตอร์ตำแหน่งดังนี้

$$\hat{t} = \vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (1)$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|} \quad (2)$$

$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n} \quad (3)$$

เมื่อ $(\)' = \frac{d(\)}{ds}$ และ $(\)'' = \frac{d^2(\)}{ds^2}$ ตามลำดับ



รูปที่ 1 ระบบพิกัดของเคเบิลได้ทะเล

2.2 สมการสมดุลของเคเบิล

สมมุติฐานของการวิเคราะห์ที่ในงานวิจัยนี้กำหนดให้คุณสมบัติทางกายภาพของเคเบิลสม่ำเสมอเป็นเนื้อเดียวกันตลอดความยาว หน้าตัดเล็กมากเมื่อเทียบกับความยาวและรัศมีความโค้ง หน้าตัดจะไม่เปลี่ยนแปลงหลังจากเสียรูปและไม่พิจารณาสภาวะการยึดตัวตามแนวแกน

เมื่อพิจารณาให้ชิ้นส่วนย่อยของเคเบิลความยาว ds ซึ่งอยู่ในสภาวะสมดุล โดยที่ \vec{F} เป็นเวกเตอร์ของแรงลัพธ์ภายในของชิ้นส่วนย่อย \vec{M} เป็นเวกเตอร์ของโมเมนต์ลัพธ์ภายในของชิ้นส่วนย่อย \vec{q} เป็นเวกเตอร์ของแรงภายนอกต่อหน่วยความยาว และ \vec{m} เป็นเวกเตอร์ของโมเมนต์ภายนอกต่อหน่วยความยาว ดังแสดงในรูปที่ 2 เมื่อชิ้นส่วนย่อยอยู่ในสภาวะสมดุล ผลรวมของเวกเตอร์ของแรงลัพธ์เท่ากับศูนย์จะได้สมการของแรงลัพธ์ดังนี้

$$\vec{F}' + \vec{q} = \vec{0} \quad (4)$$

$$\vec{M} = B\kappa\hat{b} + H\hat{t} \quad (6)$$

โดยทำนองเดียวกัน ผลรวมของเวกเตอร์โมเมนต์ลัพธ์ เท่ากับศูนย์ จะได้สมการเวกเตอร์ของโมเมนต์ลัพธ์ดังนี้

$$\vec{M}' + \vec{r}' \times \vec{F} + \vec{m} = \vec{0} \quad (5)$$

เมื่อ $B(=EI)$ คือสติฟเนสแรงดัด

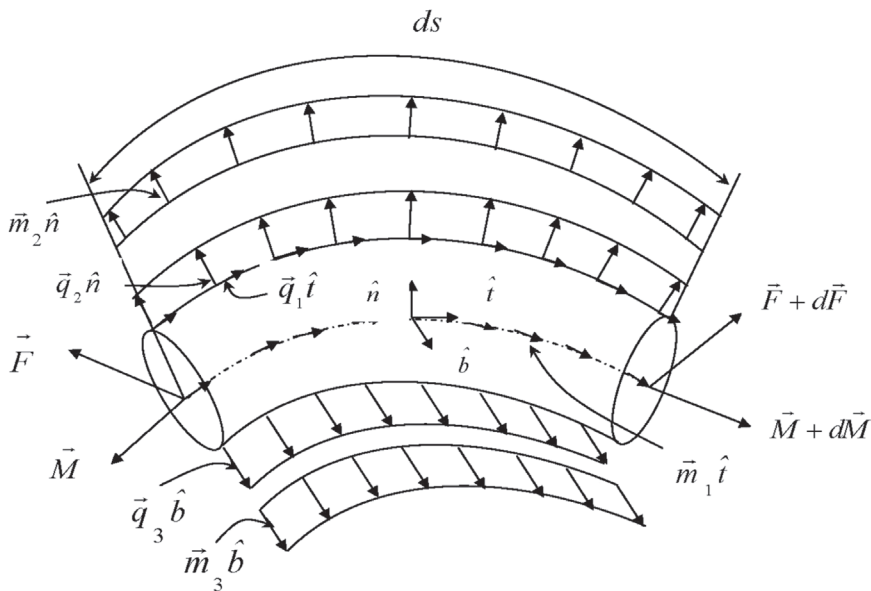
E คือโมดูลัสของความยืดหยุ่น

I คือโมเมนต์ความเฉื่อย

H คือแรงบิด

κ คือค่าความโค้ง

โมเมนต์ภายในประกอบด้วยโมเมนต์ดัดและแรงบิดมีความสัมพันธ์ดังนี้



รูปที่ 2 ชิ้นส่วนย่อยของเคเบิล

โดยทั่วไปแล้วแรงบิดและโมเมนต์ภายนอกที่กระทำต่อเคเบิลได้ทะเลื่อนั้นน้อยมากจึงตัดทิ้งได้ จากสมการที่ (5) และ (6) จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\vec{r}' \times [(E\vec{F}') + \vec{F}] = \vec{0} \quad (7)$$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross product) ในสมการที่ (7) ด้วย \vec{r}' จะได้

$$[(E\vec{F}') + \vec{F}] - \lambda\vec{r}' = \vec{0} \quad (8)$$

เมื่อ λ คือตัวคูณลากรางจ์แทนสเกลาร์ฟังก์ชัน จากนิยามความเครียด (strain definition)

$$\epsilon_t = \frac{dS - ds}{ds} = \frac{dS}{ds} - 1 \quad (9)$$

ถ้าส่วนโค้งนั้นราบเรียบ ความยาวส่วนโค้งประมาณได้จากสมการดังนี้

$$S = \int \sqrt{\vec{r}' \cdot \vec{r}'} ds \quad (10)$$

เมื่อ ϵ_t คือความเครียดในแนวแกน

dS คือความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนย่อยขณะเกิดความเครียด

ds คือความยาวส่วนโค้งของชิ้นส่วนย่อยขณะยังไม่เกิดความเครียด

จากสมการที่ (9) และสมการที่ (10) จะได้สมการความเครียดในแนวสัมผัสของเส้นโค้งของเคเบิลซึ่งมีความสัมพันธ์กับเวกเตอร์ตำแหน่งดังนี้

$$\varepsilon_t = [\bar{r}' \cdot \bar{r}']^{1/2} - 1 \quad (11)$$

เมื่อไม่พิจารณาการยืดตัวในแนวแกน ε_t มีค่าน้อยมาก สมการที่ (11) จะประมาณได้ดังนี้

$$\bar{r}' \cdot \bar{r}' \cong 1 \quad (12)$$

ผลคูณเชิงสเกลาร์ (dot product) ด้วย \bar{r}' ภายใต้เงื่อนไขไม่ยืดตัวในแนวแกนในสมการที่ (8) จะได้

$$\lambda = \bar{F} \cdot \bar{r}' + (E\bar{F}''') \cdot \bar{r}' \quad (13)$$

หรือ

$$\lambda = T - EI\kappa^2 \quad (14)$$

เมื่อ T คือแรงดึงในแนวแกน

จากสมการที่ (8) และสมการที่ (4) จัดรูปใหม่จะได้

$$-(E\bar{F}''') + (\lambda\bar{r}')' + \bar{q} = \bar{0} \quad (15)$$

2.3 แรงที่กระทำต่อเคเบิลใต้ทะเล

แรงภายนอกที่กระทำต่อเคเบิลใต้ทะเล ประกอบไปด้วยแรงในทิศทางตามแรงดึงดูดของโลก แรงดันน้ำสถิต และแรงดันน้ำพลศาสตร์ เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\bar{q} = \bar{w} + \bar{F}^s + \bar{F}^d \quad (16)$$

โดยที่

$$\bar{F}^s = \bar{B}_0 + (P\bar{r}')' \quad (17)$$

$$\bar{F}^d = \bar{F}_n + \bar{F}_t \quad (18)$$

$$\bar{F}_n = \frac{1}{2} \rho_w DC_n \bar{V}_n |\bar{V}_n| + \rho_w \frac{\pi}{4} D^2 C_m \bar{V}_n \quad (19)$$

$$\bar{F}_t = \frac{\pi}{2} \rho_w DC_t \bar{V}_t |\bar{V}_t| \quad (20)$$

$$\bar{V}_t = (\bar{r}' \cdot \bar{r}') \bar{r}, \quad \bar{V}_n = \bar{V} - \bar{V}_t \quad (21)$$

เมื่อ \bar{w} คือน้ำหนักของเคเบิลต่อหน่วยความยาว

\bar{F}^s คือแรงดันน้ำสถิตต่อหน่วยความยาว

\bar{F}^d คือแรงดันน้ำพลศาสตร์ต่อหน่วยความยาว

\bar{B}_0 คือแรงลอยตัวต่อหน่วยความยาว

P คือแรงดันน้ำสถิตที่ตำแหน่งใดๆ

\bar{F}_n คือแรงลากในทิศทางตั้งฉากต่อหน่วยความยาว

\bar{F}_t คือแรงลากในทิศทางสัมผัสต่อหน่วยความยาว

ρ_w คือความหนาแน่นของน้ำทะเล

D คือเส้นผ่านศูนย์กลางของเคเบิล

\bar{V} คือเวกเตอร์ความเร็วของกระแส

\bar{V}_n, \bar{V}_t คือความเร็วกระแสในแนวตั้งฉากและแนวสัมผัส

\bar{V}_n คือความเร่งกระแสในแนวตั้งฉาก

C_n, C_t, C_m คือค่าสัมประสิทธิ์แรงลากในแนวตั้งฉาก แรงลากในแนวสัมผัสและความเฉื่อย

จากสมการที่ (16), (17) และ (18) แทนในสมการที่ (15) จะได้

$$(E\bar{F}''') - (\tilde{\lambda}\bar{r}')' = \tilde{w} + \bar{F}^d \quad (22)$$

โดยที่ $\tilde{\lambda} = T + P - EI\kappa^2$ หรือ $\tilde{T} - EI\kappa^2$ และ $\tilde{w} = \bar{w} + \bar{B}_0$

จากสมการที่ (11) เมื่อยกกำลังสองทั้งสองข้างและละทิ้งพจน์กำลังสองของ ε_t เนื่องจากมีปริมาณน้อยจะได้

$$\frac{1}{2} [\bar{r}' \cdot \bar{r}' - 1] = \varepsilon_t = \frac{\tilde{T}}{AE} \quad (23)$$

เมื่อ \tilde{T} คือแรงดึงประสิทธิผล

\tilde{w} คือน้ำหนักประสิทธิผล

A คือพื้นที่หน้าตัด

สมการที่ (22) และ (23) เป็นแบบจำลองอีลาสติกรีดใน 3 มิติ ซึ่งจะนำไปใช้ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

3. การวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การวิเคราะห์เคเบิลใน 3 มิติหนึ่งชั้นส่วนย่อยมีดิกิริอิสระ 14 ตัว ประกอบไปด้วยเวกเตอร์กำหนดตำแหน่ง r ความชัน r' และแรงดึงในแนวแกน T การจำลองแบบโครงสร้างของเคเบิลแต่ละเลจะทำการแบ่งความยาวของเคเบิลทั้งหมดออกเป็นชั้นส่วนย่อยด้วยความยาวของแต่ละชั้นส่วนย่อยที่มีความยาวเท่าๆ กัน และจำนวนชั้นส่วนย่อยที่ใช้ขึ้นอยู่กับความแม่นยำในการหาผลเฉลย

การประมาณค่าตำแหน่ง ณ จุดต่างๆ บนชั้นส่วนย่อยจะใช้ฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่สาม ซึ่งเป็นฟังก์ชันรูปร่างเพื่อประมาณค่าของเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r} = r_1\vec{i} + r_2\vec{j} + r_3\vec{k}$ โดยที่ r_1, r_2 และ r_3 คือส่วนประกอบบนแกน x, y และ z ของ \vec{r} ส่วนแรงดึงในแนวแกน T หาได้จากการประมาณค่าฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับที่หนึ่ง สามารถเขียนให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ระหว่างเมตริกซ์และฟังก์ชันรูปร่างกับเวกเตอร์ของดิกิริอิสระที่จุดต่อของชั้นส่วนย่อยได้ดังต่อไปนี้

$$r_i(s) = [N] \{u\} \tag{24}$$

$$T(s) = [P] \{d\} \tag{25}$$

เมื่อ $0 \leq s \leq l$
 $[N], [P]$ คือเมตริกซ์แถวของฟังก์ชันรูปร่างของชั้นส่วนย่อยแสดงได้ดังนี้

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \tag{26}$$

$$[P] = [P_1 \ P_2] \tag{27}$$

$\{u\}, \{d\}$ คือเวกเตอร์ของดิกิริอิสระของค่าตำแหน่งที่จุดต่อของชั้นส่วนย่อยแสดงได้ดังนี้

$$\{u\} = [U_{i1} \ U_{i2} \ U_{i3} \ U_{i4}]^T \tag{28}$$

$$\{d\} = [\lambda_1 \ \lambda_2]^T \tag{29}$$

โดยที่

$$N_1 = 1 - \frac{3s^2}{l^2} + \frac{2s^3}{l^3}, \ N_2 = s - \frac{2s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2},$$

$$N_3 = \frac{3s^2}{l^2} - \frac{2s^3}{l^3}, \ N_4 = -\frac{s^2}{l} + \frac{s^3}{l^2} \tag{30a-d}$$

$$P_1 = 1 - \frac{s}{l}, \ P_2 = \frac{s}{l} \tag{31a-b}$$

และ

$$U_{i1} = r_i(s=0), \ U_{i2} = r'_i(s=0),$$

$$U_{i3} = r_i(s=l), \ U_{i4} = r'_i(s=l) \tag{32a-d}$$

$$\lambda_1 = T(s=0), \ \lambda_2 = T(s=l) \tag{33a-b}$$

กระบวนการ Galerkin finite element ทำโดยการคูณฟังก์ชันเศษตกค้างหรือฟังก์ชันนัลของสมการอนุพันธ์ R_d ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก W_i (weighting function) โดยมีสมการดังนี้

$$\int_0^l W_i(s) R_d(s) ds = 0 \tag{34}$$

โดยแทนค่า $W_i = N_j$ และ P_k โดยที่ $N_j, j = 1, 2, 3, 4$ และ $P_k, k = 1, 2$ นำสมการที่ (22) และ (23) แทนลงในสมการที่ (34) และจัดกระบวนการ Galerkin finite element แล้วอินทิเกรตสมการซึ่งเป็นการรวมชั้นส่วนย่อยเล็กๆ ของเคเบิลให้อยู่ในระบบรวมแล้วกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\int_0^l N_j \left(- (EI r_i'')'' + ((\tilde{T} - EI \kappa^2) r_i')' \right) ds = 0 \tag{35}$$

$$\int_0^l P_k \left(\frac{1}{2} (\bar{r}' \cdot \bar{r}' - 1) - \frac{\tilde{T}}{AE} \right) ds = 0 \tag{36}$$

สมการที่ (35) และ (36) ทำการอินทิเกรตทีละส่วนและเขียนใหม่ได้เป็น

$$\{R_{ij}\} = \int_0^l \left((EI r_i'') N_j'' + ((\tilde{T} - EI \kappa^2) r_i') N_j' \right) ds \tag{37}$$

$$\{G_k\} = \int_0^l P_k \left(\frac{1}{2} (\bar{r}' \cdot \bar{r}' - 1) - \frac{\tilde{T}}{AE} \right) ds = 0 \quad (38)$$

เนื่องจากเป็นสมการแบบไม่เชิงเส้นดังนั้นในการแก้ปัญหา จะใช้ระเบียบวิธีการของนิวตันราฟ-สัน (Newton-Raphson method) ซึ่งอยู่บนรากฐานของอนุกรมของเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดค่าอนุพันธ์ตั้งแต่อันดับที่สองขึ้นไปออก สมการที่ (37) และ (38) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$R_{ij}^{(n+1)} = R_{ij}^{(n)} + \frac{\partial R_{ij}}{\partial U_{lm}} \Delta U_{lm} + \frac{\partial R_{ij}}{\partial \lambda_n} \Delta \lambda_n \quad (39)$$

$$G_k^{(n+1)} = G_k^{(n)} + \frac{\partial G_k}{\partial U_{lm}} \Delta U_{lm} + \frac{\partial G_k}{\partial \lambda_n} \Delta \lambda_n \quad (40)$$

เมื่อระบบอยู่ในสภาวะสมดุลค่าฟังก์ชันทางด้านซ้ายมือของสมการที่ (39) และ (40) เท่ากับศูนย์สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{ijlm}^{11(n)} & k_{ijn}^{12(n)} \\ k_{klm}^{21(n)} & k_{kn}^{22(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta U_{lm} \\ \Delta \lambda_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R_{ij}^{(n)} \\ -G_k^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (41)$$

โดยที่

$$k_{ijlm}^{11(n)} = \frac{\partial R_{ij}}{\partial U_{lm}} = \frac{\partial}{\partial U_{lm}} \left(\int_0^l E I r_i'' N_j'' ds + \int_0^l (\tilde{T} - E I \kappa^2) r_i' N_j' ds \right) \quad (42)$$

$$k_{ijn}^{12(n)} = \frac{\partial R_{ij}}{\partial \lambda_n} = \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \left(\int_0^l \tilde{T} r_i' N_j' ds \right) \quad (43)$$

$$k_{klm}^{21(n)} = \frac{\partial G_k}{\partial U_{lm}} = \frac{\partial}{\partial U_{lm}} \left(\int_0^l \frac{1}{2} P_k (r_1' r_1' + r_2' r_2' + r_3' r_3') ds \right) \quad (44)$$

$$k_{kn}^{22(n)} = \frac{\partial G_k}{\partial \lambda_n} = \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \left(\int_0^l \left(-\frac{1}{AE} \tilde{T} P_k \right) ds \right) \quad (45)$$

เมื่อ $i = 1, 2, 3$ $j = 1, 2, 3, 4$ $k = 1, 2$

$l = 1, 2, 3$ $m = 1, 2, 3, 4$ $n = 1, 2$

ตามลำดับ

เงื่อนไขขอบเขตประกอบไปด้วยเงื่อนไขขอบเขตล่าง แทนค่าพิกัดของเคเบิลที่ปลายล่างและเงื่อนไขขอบเขตบน แทนค่าพิกัดที่ปลายบน วิธีการคำนวณโดยสมมุติค่าเริ่มต้นที่เหมาะสมของตัวไม่ทราบค่าต่างๆ คำนวณค่าเชิงตัวเลขของสมการที่ (37) (38) และ $[K]$ ในสมการที่ (41) แล้วรวมชิ้นส่วนย่อยต่างๆ ให้อยู่ในระบบรวมและใส่เงื่อนไขขอบเขตที่จุดปลายทั้งสองข้างซึ่งงานวิจัยนี้พิจารณาให้เป็นจุดหมุน คำนวณค่า ΔU และ $\Delta \lambda$ ในสมการที่ (41) และนำไปรวมกับค่าเดิมเพื่อที่จะได้ค่าใหม่และทำซ้ำจนกว่าค่าที่คำนวณได้จะประมาณเท่ากับศูนย์หรือค่าที่ยอมรับได้ และใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ MATLAB Version 7.8.0347 (R2009a) [9,10] มาใช้ในการเขียนโปรแกรมคำสั่งในการคำนวณหาค่าตอบเชิงตัวเลข

4. ผลการศึกษา

4.1 การตรวจสอบความถูกต้อง

เพื่อเป็นการตรวจสอบความน่าเชื่อถือของกระบวนการคำนวณที่ใช้ในการศึกษานี้โดยการเปรียบเทียบกับผลงานวิจัยในอดีตโดยจะแบ่งการตรวจสอบความถูกต้องออกเป็น 2 ส่วน ส่วนแรกจะวิเคราะห์เคเบิลใน 2 มิติโดยเปรียบเทียบกับ งานวิจัยของ Henghold และคณะ [2] และส่วนที่สองจะวิเคราะห์เคเบิลใน 3 มิติโดยเปรียบเทียบกับงานวิจัยของ Friswell [6] และกิเศก [13] ตามลำดับ

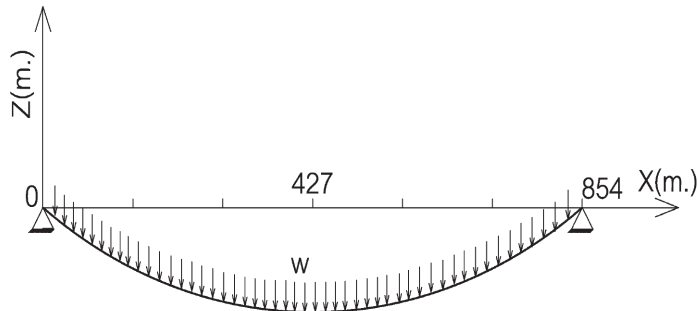
4.1.1 วิเคราะห์เปรียบเทียบผลใน 2 มิติ

กรณีนี้เคเบิลถูกวางตัวอยู่ในอากาศโดยมีจุดรองรับอยู่ในระดับเดียวกันและมีน้ำหนักเคเบิลกระจายสม่ำเสมอในแนวตั้ง ดังแสดงในรูปที่ 3 โดยกำหนดความยาวเพื่อตรวจสอบค่าแรงดึงที่ปลายบนและระยะแอนตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางกับงานวิจัยของ Henghold และคณะ [2] โดยข้อมูลที่ใช้วิเคราะห์ดังแสดงในตารางที่ 1

ผลการวิเคราะห์พบว่าค่าแรงดึงที่ปลายบนของงานวิจัยนี้ 8374.13 กิโลนิวตัน ส่วนงานวิจัยของ Henghold และคณะ [2] คำนวณได้ 8377.20 กิโลนิวตัน ซึ่งแตกต่างกันประมาณ 0.036% และเมื่อตรวจสอบระยะแอนตัวที่กึ่งกลางได้ผลการคำนวณที่เท่ากันคือ 123 เมตร ซึ่งผลการคำนวณอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้

ตารางที่ 1 ข้อมูลที่ใช้ในการวิเคราะห์เคเบิลใน 2 มิติ

1. น้ำหนักของเคเบิล	9479.9	นิวตัน/เมตร
2. เส้นผ่านศูนย์กลาง	0.3841	เมตร
3. โมดูลัสความยืดหยุ่น	3.68×10^8	กิโลนิวตัน/เมตร ²
4. ความยาวของเคเบิล	899.383	เมตร
5. จำนวนชั้นส่วนย่อย	20	ชั้น

**รูปที่ 3** การวางตัวของเคเบิลในอากาศเมื่อจุดรองรับมีระดับเดียวกัน**4.1.2 วิเคราะห์เปรียบเทียบผลใน 3 มิติ**

เคเบิลถูกวางตัวอยู่ในทะเล ดังแสดงในรูปที่ 4 และ 5 โดยใช้ข้อมูลของ Friswell [6] ในการวิเคราะห์ที่แสดงในตารางที่ 2 เพื่อใช้ในการคำนวณแรงดึงที่ปลาย

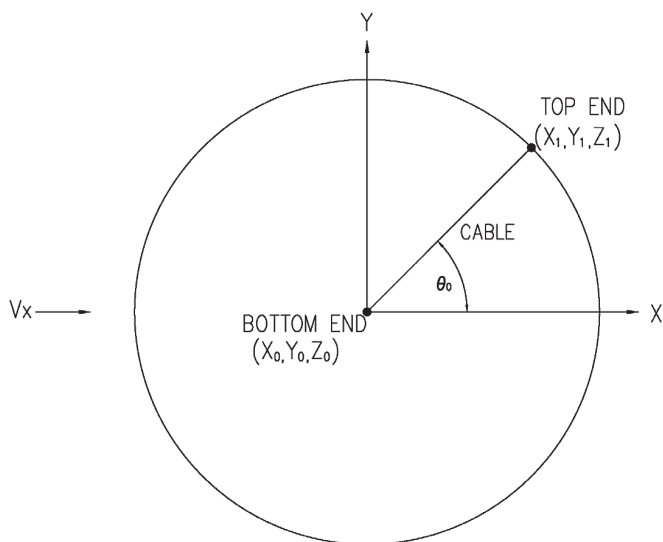
ล่างที่ตำแหน่งมุมมองา ต่างๆ ตั้งแต่ 0 และเพิ่มขึ้นครั้งละ 30 องศาจนถึงถึง 180 องศา แรงที่กระทำต่อเคเบิลได้แก่ น้ำหนักตัวเอง แรงทางด้านข้างเนื่องจากความเร็วของกระแสน้ำคงที่ตลอดความลึกในแกน x

ตารางที่ 2 ข้อมูลที่ใช้ในการวิเคราะห์ใน 3 มิติ

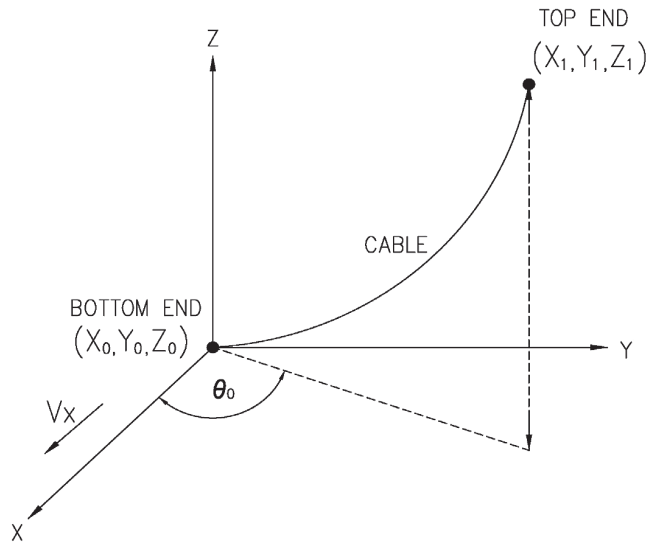
1. ความลึกของระดับน้ำทะเล	183	เมตร
2. น้ำหนักสุทธิ	12.3	นิวตัน/เมตร
3. เส้นผ่านศูนย์กลาง	0.023	เมตร
4. โมดูลัสความยืดหยุ่น	2.0×10^9	กิโลนิวตัน/เมตร ²
5. ความยาวของเคเบิล	305	เมตร
6. ความหนาแน่นของน้ำทะเล	1.021	กิโลนิวตัน/เมตร ³
7. ความเร็วกระแสน้ำคงที่ตลอดความลึกในแกน x	1.028	เมตร/วินาที
8. สปส.แรงลากในแนวตั้งฉากและลัมผัส	1.00, 0.005	
9. จำนวนชั้นส่วนย่อย	20	ชั้น

ตารางที่ 3 ผลการวิเคราะห์ใน 3 มิติ

มุมในแนวราบ (องศา)	แรงดึงที่ปลายล่าง (นิวตัน)		
	Friswell [6]	ภิศก [13]	งานวิจัยนี้
0	3,751.60	3,715.20	3,714.00
30	3,834.10	3,920.26	3,919.05
60	4,283.70	4,204.99	4,203.31
90	3,788.10	3,927.27	3,925.38
120	2,614.40	2,752.45	2,750.64
150	1,399.60	1,367.45	1,365.69
180	922.00	670.16	904.20



รูปที่ 4 แผนการวางตัวของเคเบิล



รูปที่ 5 การวางตัวของเคเบิลใน 3 มิติ

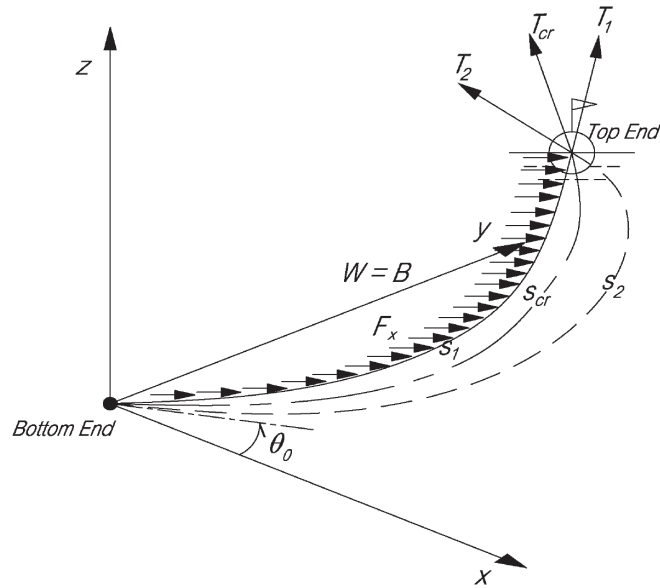
ผลการวิเคราะห์ที่ตั้งแสดงในตารางที่ 3 พบว่าค่าแรงดึงที่ปลายล่างของงานวิจัย Friswell [6] ภิศก [13] และงานวิจัยนี้ ผลการคำนวณใกล้เคียงกันทุกองศา ยกเว้นเมื่อเคเบิลทำมุม 180 องศา งานวิจัยนี้จะใกล้เคียงกับงานวิจัยของ Friswell [6] มากกว่าของภิศก [13] สาเหตุที่แตกต่างนี้อาจเนื่องมา

จากวิธีรุงเงอ-คัททาที่ใช้อันดับที่ต่างกันคืองานวิจัยของ Friswell [6] ใช้อันดับที่ 4 ส่วนงานวิจัยของภิศก [13] ใช้อันดับที่ 5

4.2 การวิเคราะห์หาค่าแรงดึงวิกฤตและความยาววิกฤตเมื่อเคเบิลอยู่ในสภาวะแรงลอยตัวสะเทิน

การวางตัวของเคเบิลที่ใช้ในการวิเคราะห์ที่ตั้งแสดงในรูปที่ 5 โดยปลายด้านบนจะมีการเคลื่อนที่เป็นวงกลม

ที่ตั้งแสดงในรูปที่ 4 กำหนดให้เคเบิลถูกเปลี่ยนแปลงตำแหน่งทุก 30 องศาจนถึง 360 องศาโดยเริ่มที่ 0 องศาในระนาบ xz แต่ละตำแหน่งจะคำนวณหาค่าความยาววิกฤตและค่าแรงดึงวิกฤตโดยจะกำหนดความยาวเริ่มต้น S_1 เท่ากับ 1,140 เมตร และเพิ่มความยาวคงที่จนกระทั่งได้ค่าแรงดึงที่ปลายบนและล่างเท่ากับค่าเริ่มต้น $T_1 = T_2$ และนำค่าที่ได้มาเขียนกราฟเพื่อหาจุดวิกฤตซึ่งเป็นจุดที่เกิดแรงดึงต่ำสุด T_{cr} แรงภายนอกที่ใช้ในการวิเคราะห์กำหนดให้มีแรงกระทำในแกน x คงที่โดยข้อมูลที่ใช้ในการวิเคราะห์ที่ตั้งแสดงในตารางที่ 4

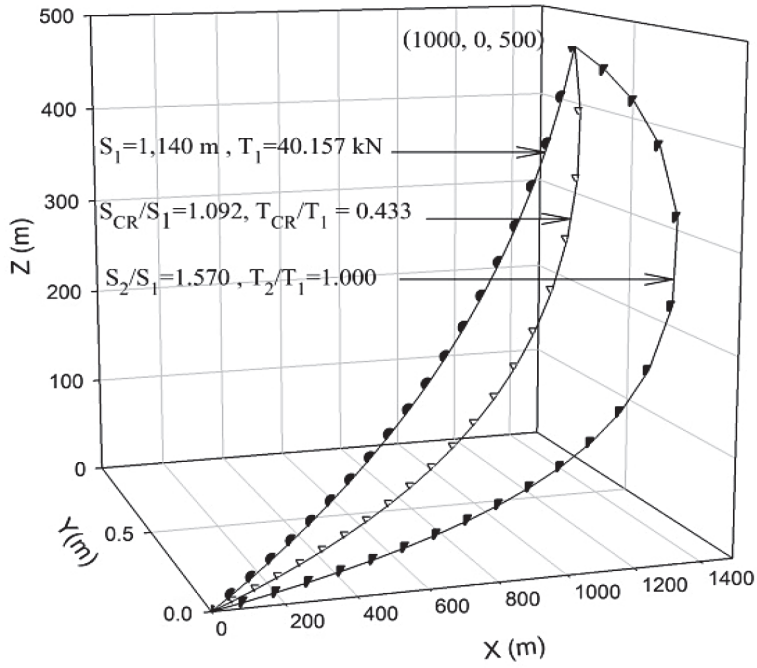


หมายเหตุ S_1, T_1 คือ ความยาวและแรงดึงเริ่มต้น
 S_2, T_2 คือ ความยาวและแรงดึงสุดท้าย
 S_{cr}, T_{cr} คือ ความยาวและแรงดึงวิกฤต

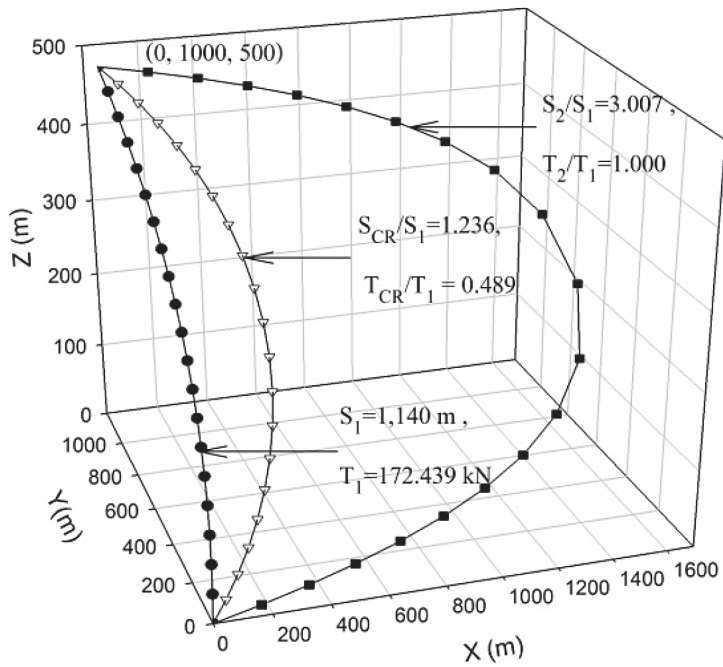
รูปที่ 5 การวางตัวของเคเบิลใน 3 มิติ

ตารางที่ 4 ข้อมูลที่ใช้ในการวิเคราะห์แรงลอยตัวสะเทิน

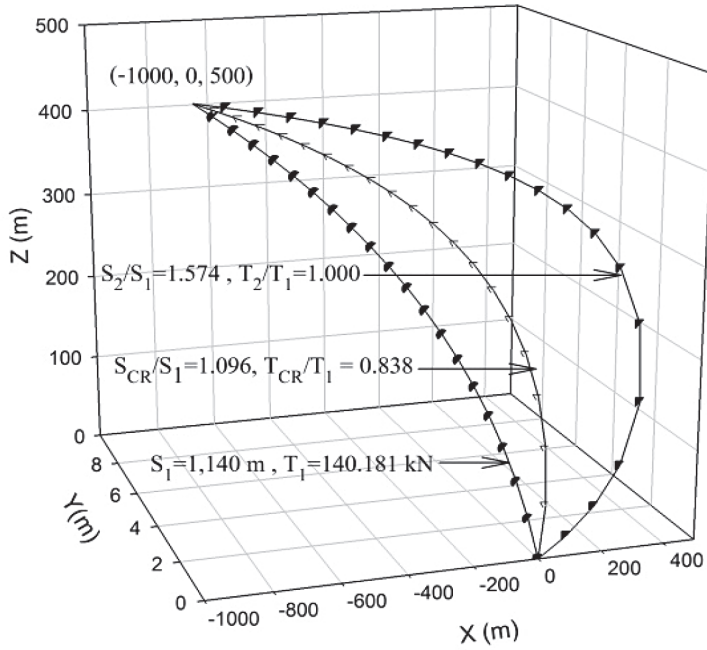
1. ความลึกของระดับน้ำทะเล	500	เมตร
2. ระยะห่างระหว่างปลายล่างและบนในระนาบคงที่	1,000	เมตร
3. น้ำหนักสุทธิ	0	นิวตัน/เมตร
4. เส้นผ่านศูนย์กลางกลาง	0.03	เมตร
5. โมดูลัสความยืดหยุ่น	2.0×10^9	กิโลนิวตัน/เมตร ²
6. ความยาวของเคเบิล	แปรเปลี่ยน	เมตร
7. ความหนาแน่นของน้ำทะเล	1,021	กิโลนิวตัน/เมตร ³
8. แรงกระทำคงที่ในทิศทางแนวแกน x	100	นิวตัน/เมตร
9. จำนวนชิ้นส่วนย่อย	20	ชิ้น



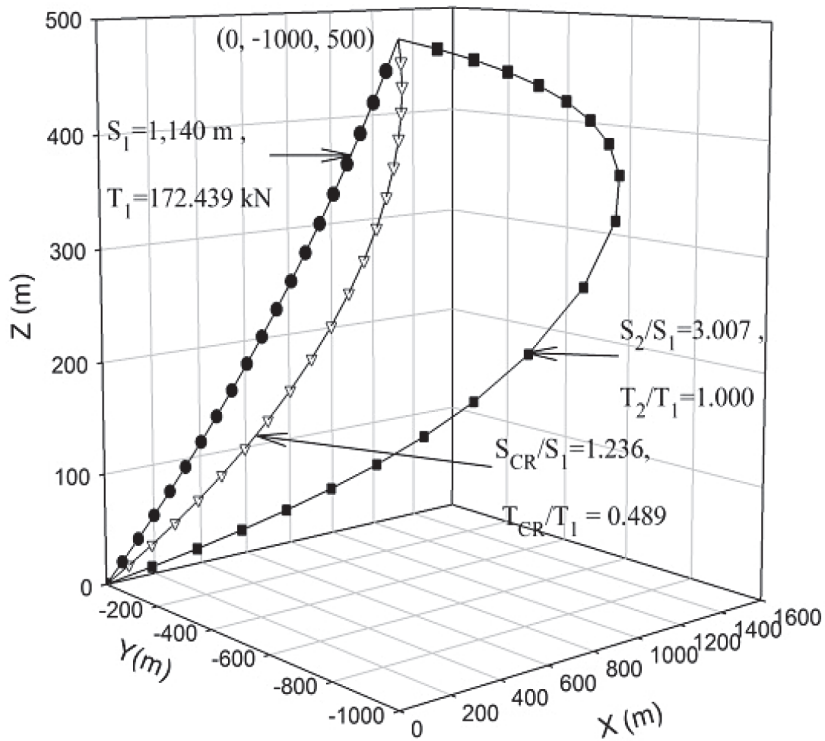
(a) $\theta_0 = 0$ องศา



(b) $\theta_0 = 90$ องศา

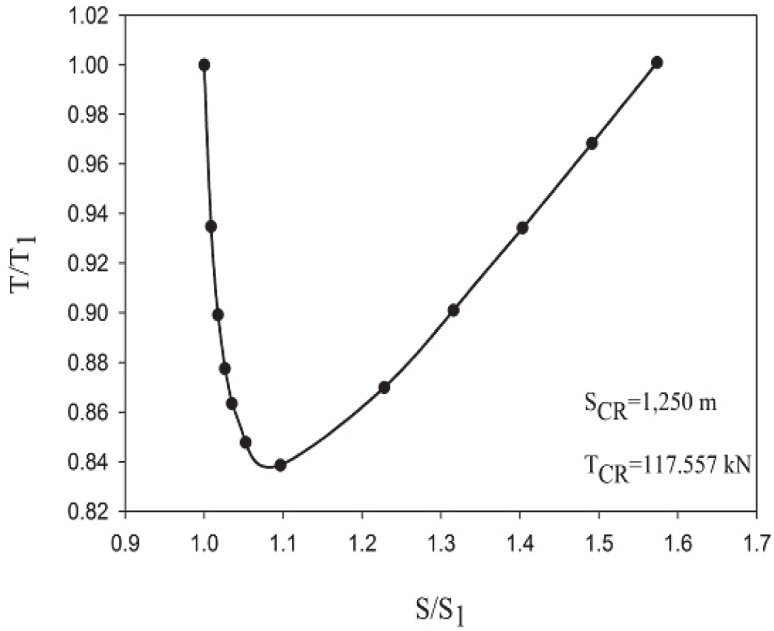


(c) $\theta_0 = 180$ องศา

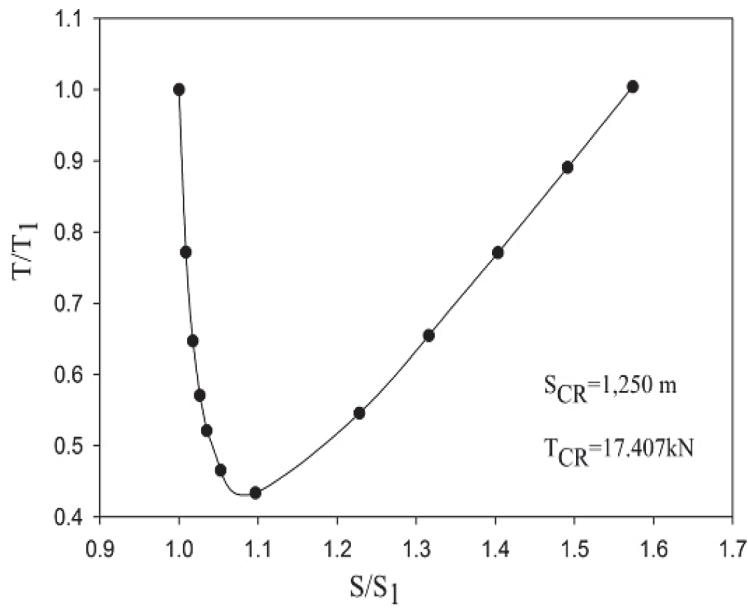


(d) $\theta_0 = 270$ องศา

รูปที่ 6 การวางตัวของเคเบิลใน 3 มิติเมื่อมุมเท่ากับ 0, 90, 180 และ 270 องศาตามลำดับ

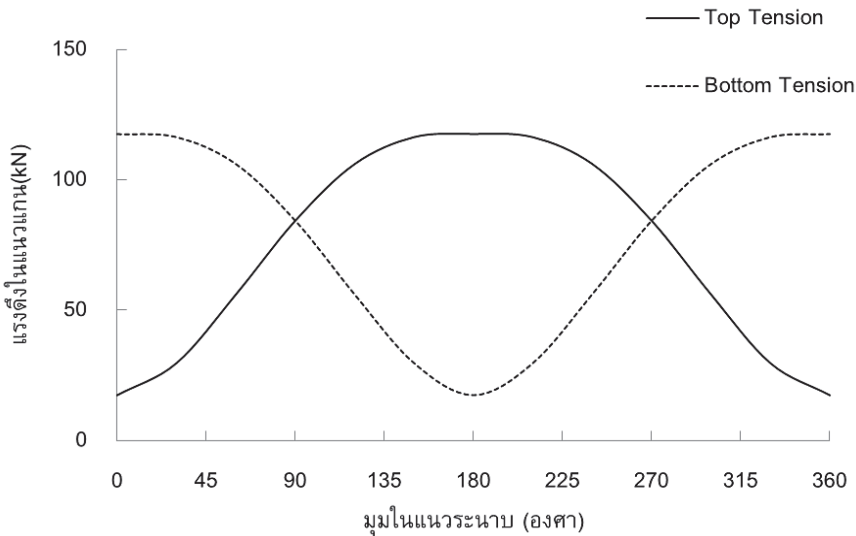


(a) แรงดึงที่ปลายบน



(b) แรงดึงที่ปลายล่าง

รูปที่ 7 แรงดึงที่ปลายบนและปลายล่าง เมื่อมุมเท่ากับ 180 องศา



รูปที่ 8 แรงดึงวิกฤตที่ปลายบนและปลายล่างจาก 0 ถึง 360 องศา

จากการศึกษาพบว่าค่าแรงดึงที่จุดวิกฤตและความยาววิกฤตจะแปรเปลี่ยนตามมุมองศา เมื่อพิจารณา รูปที่ 8 ช่วงมุมระหว่าง 0 ถึง 90 และ 270 ถึง 360 ค่าแรงดึงที่ปลายล่างจะมากกว่าค่าแรงดึงที่ปลายบน และในช่วง 90 ถึง 270 องศา ค่าแรงดึงที่ปลายบนจะมากกว่าค่าแรงดึงที่ปลายล่าง และที่มุม 90 องศาและ 270 องศา ค่าแรงดึงที่ปลายบนจะเท่ากับปลายล่าง และที่มุม 180 องศา ค่าแรงดึงที่ปลายบนจะมีค่าสูงสุดคือ 117.557 กิโลนิวตัน ส่วนปลายล่างจะมีค่าต่ำสุด และจากกราฟตัวอย่างในรูปที่ 7 แสดงค่าแรงดึงที่ปลายบนและปลายล่างเมื่อมุม 180 องศาพบว่าความยาว 1,250 เมตรจะได้ค่าแรงดึงต่ำสุดหรือแรงดึงวิกฤต สำหรับที่แรงดึงค่าอื่นที่ไม่ใช่แรงดึงวิกฤตค่าหนึ่งๆ จะมี 2 ชุดความยาวที่ให้ค่าแรงดึงที่เท่ากัน เช่นที่ความยาว 1,140 เมตรจะมีแรงดึง 140.181 กิโลนิวตันซึ่งเท่ากับความยาวที่ 1,794 เมตร เป็นต้น นั้นหมายความว่าความยาวที่น้อยกว่าความยาววิกฤตเคเบิลจะอยู่ในสภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพและความยาวที่มากกว่าความยาววิกฤตเคเบิลจะอยู่ในสภาวะสมดุลแบบไม่มีเสถียรภาพ

ข้อเสนอแนะในการออกแบบเคเบิลในกรณีนี้คือ ผู้ออกแบบต้องระวังในส่วนโครงสร้างสมอที่ยึดกับพื้นทะเล เพราะแรงดึงที่ปลายล่างจะมากกว่าที่ปลายบนในช่วงมุมในระนาบ 0 ถึง 90 และ 270 ถึง 360 องศา

5. สรุปผลการศึกษา

งานวิจัยนี้ ได้นำเสนอวิธีการวิเคราะห์สมดุลสถิตของสายยึดโยงใต้ทะเลหรือเคเบิลใน 3 มิติ ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน โดยมีเวกเตอร์บอกตำแหน่งซึ่งเป็นฟังก์ชันของความยาวส่วนโค้งของเคเบิล และให้ความยาวส่วนโค้งของเคเบิลเป็นตัวแปรอิสระมีค่าเวกเตอร์ตำแหน่ง และแรงดึงเป็นตัวแปรตาม

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์มาจากความสัมพันธ์ระหว่างแรงลัพธ์ โมเมนต์ลัพธ์และความเครียดในแนวสัมผัสภายใต้เงื่อนไขไม่ยืดตัวในแนวแกนซึ่งเรียกว่าแบบจำลองอิลาสติกรีด หลังจากนั้นใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการสร้างสมการเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาเคเบิลใน 3 มิติ และเขียนโปรแกรมคำสั่งในการคำนวณหาคำตอบโดยใช้โปรแกรม MATLAB โดยการเลือกจำนวนเอลิเมนต์ควรเลือกจำนวนตั้งแต่ 20 เอลิเมนต์ขึ้นไป ซึ่งค่าคำตอบที่ได้จะมีค่าแตกต่างกันน้อยมาก สำหรับผลการคำนวณที่ได้เมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยในอดีตพบว่ามีผลสอดคล้องกัน

ข้อดีของแบบจำลองนี้คือสามารถกระทำได้ในระบบแกนรวมใหญ่ โดยไม่ต้องแปลงจากระบบแกนย่อย แรงภายนอกสามารถกระทำได้ใน 3 ทิศทางพร้อมกัน สามารถคำนวณตำแหน่งการวางตัวของเคเบิลในตำแหน่งพิกัดที่มีค่าเป็นลบ และคำนวณค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดของหน้าตัดได้

6. เอกสารอ้างอิง

1. Berteaux, H.O., 1976, *Buoy Engineering*, John Wiley & Sons, New York, pp. 97-134.
2. Henghold, W.M. and Russell, J.J., 1976, "Equilibrium and Natural Frequencies of Cable Structures (A Nonlinear Finite Element Approach)", *Computers and Structures*, Vol. 6, No. 4A, pp. 267-271.
3. Garrett, D.L., 1982, "Dynamic Analysis of Slender Rods", *Journal of Energy Resources Technology*, Vol. 104, pp. 302-307.
4. Seck-Hong, A., 1983, "Mechanics of Static Catenary with Current loading", *Journal of Waterway, Port, Coastal and ocean Engineering*, Vol. 109, No. 3, pp.340-349.
5. Chucheepsakul, S. and Huang, T., 1990, "Static Equilibrium of Marine Cable by a Variational Method", *Proceedings of the First Pacific/Asia Offshore Mechanics Symposium*, Vol. 1, Seoul, Korea, pp. 329-334.
6. Friswell, M.I., 1995, "Steady-State Analysis of Underwater Cables", *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, Vol. 121, pp. 98-104.
7. Kim, Y.B., 2003, "Dynamic Analysis of Multiple-Body Floating Platforms Coupled with Mooring Lines and Risers.", Ph.D. Dissertation, Texas A&M University.
8. Garrett, D.L., 2005, "Coupled analysis of floating production system", *Ocean Engineering*, Vol. 32, pp. 802-816.
9. Peter, K., 2007, *Matlab Guide to Finite Elements*, Springer Berlin Heidelberg, New-York, pp.1-174.
10. Ferreira, A.J.M., 2009, *Matlab Codes for Finite Element Analysis*, Springer Berlin Heidelberg, New York, pp.1-87.
11. Tansorajprasert, S., 1996, "Static Analysis of Extensible marine cable in Polar Coordinates", M.Eng. Thesis, Civil Engineering, King Mongkut's University of Technology Thonburi, pp. 1-48. (In Thai)
12. Lingphancharoen, S., 1997, "In-plane free vibrations of extensible marine cables", M.Eng. Thesis, Civil Engineering, King Mongkut's University of Technology Thonburi, pp. 1-124. (In Thai)
13. Petpert, P., 1999, "Effect of axial deformation on static equilibrium configurations of marine cables in three dimensions", M.Eng. Thesis, Civil Engineering, King Mongkut's University of Technology Thonburi, pp. 1-90. (In Thai)
14. Machara, C., 2003, "Static Equilibrium of a Marine Cable in 3D-Cylindrical Coordinates", M.Eng. Thesis, Civil Engineering, King Mongkut's University of Technology Thonburi, pp. 1-156. (In Thai)

