

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับ การวิเคราะห์หาแรงดึงวิกฤตของท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลแบบสะเทินลอยตัว

การ์นต์ คล้ายฉ่ำ¹ ชัยณรงค์ อธิสกุล² และ สมชาย ชูชีพสกุล³
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี บางมด ทุ่งครุ กรุงเทพฯ 10140 ประเทศไทย

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอค่าแรงดึงวิกฤตที่ปลายด้านบนของท่อลำเลียงของไหลแบบสะเทินลอยตัว ซึ่งมีการวางตัวในแนวตั้งและติดตั้งในทะเลลึก สมการครอบคลุมปัญหาพัฒนาขึ้นโดยวิธีการแปรผันภายใต้หลักการงาน-พลังงานเสมือน พลังงานของระบบกำหนดขึ้นโดยพิจารณาพลังงานความเครียดเนื่องจากการดัดและการเสียรูปตามแนวแกน รวมถึงงานเนื่องจากแรงภายนอก อันได้แก่ แรงกระแสน้ำ และแรงเนื่องจากการชนถ่ายของไหลภายในท่อ ในการหาคำตอบของสมการใช้ระเบียบวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์และทำการตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบด้วยระเบียบวิธียิงเป้า แรงดึงวิกฤตที่ปลายบนของท่อหาได้จากการพิจารณาจุดต่ำสุดของกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึงที่ปลายด้านบนกับความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อ จากการพิจารณากราฟความสัมพันธ์ดังกล่าวพบว่าค่าแรงดึงวิกฤตของท่อเป็นค่าแรงดึงที่มีค่าต่ำสุดซึ่งทำให้ท่อยังคงสามารถรักษาภาวะสมดุลได้ ทั้งนี้หากค่าแรงดึงที่ปลายบนมีค่าต่ำกว่าค่าแรงดึงวิกฤตจะทำให้ไม่สามารถหาสถานะสมดุลของท่อได้ ส่วนในกรณีที่ค่าแรงดึงที่ปลายบนมีค่าสูงกว่าค่าแรงดึงวิกฤต พบว่าท่อสามารถเกิดสถานะสมดุลได้สองรูปแบบ ได้แก่ สถานะสมดุลแบบมีเสถียรภาพ และสถานะสมดุลแบบไม่มีเสถียรภาพ โดยเมื่อพิจารณาค่าแรงดึงที่ปลายด้านบนค่าเดียวกัน สถานะสมดุลของท่อที่มีการเคลื่อนที่น้อยกว่าจะเป็นสถานะสมดุลแบบมีเสถียรภาพ ส่วนอีกรูปแบบหนึ่งที่มีการเคลื่อนที่มากกว่าจะเป็นสถานะสมดุลแบบไม่มีเสถียรภาพ ซึ่งท่อที่อยู่ในสถานะสมดุลรูปแบบนี้ จะไม่สามารถรักษาภาวะสมดุลต่อไปได้หากมีแรงเพียงเล็กน้อยกระทำเพิ่มเติม ทั้งนี้นำเสนอผลกระทบเนื่องจากความยาวช่วง ระยะเยื้องระหว่างจุดรองรับทั้งสองตามแนวราบ แรงเนื่องจากกระแสน้ำ และความเร็วในการชนถ่ายของไหลภายในท่อที่มีต่อแรงดึงวิกฤตที่ปลายบนของท่อในบทความนี้

คำสำคัญ : แรงดึงวิกฤต / ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ / ท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลแบบสะเทินลอยตัว / ระเบียบวิธียิงเป้า / สมการแปรผัน

* Corresponding author : E-mail address : chainarong.ath@kmutt.ac.th

- 1 นักศึกษาปริญญาเอก ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์
- 2 ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์
- 3 ศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์

Finite Element Method for Critical Top Tension Analysis of Neutrally Buoyant Riser

Karun Klaycham¹ Chainarong Athisakul^{2*} and Somchai Chucheeepsakul³

King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangmod, Thungkru, Bangkok 10140, Thailand

Abstract

This paper aims to present the critical top tension of a neutrally buoyant riser in deep water. Variational formulation was developed based on the principles of virtual work-energy, which involve the strain energy due to bending and axial deformation, and the works done by current force and internal fluid flow. The finite element method was used to obtain the numerical solution, which was then verified by the shooting method. The critical top tension can be found by considering the lowest point on the stiffness-displacement curve between the top tension and total arc-length; the critical top tension is the minimum tension that is required to maintain the equilibrium state of the riser. If the top tension is lower than the critical top tension, the equilibrium would not be satisfied. If the top tension is greater than the critical top tension, there are two possible equilibrium configurations. The configuration associated with a smaller displacement is the stable configuration, while the others with a larger displacement is the unstable configuration. For the case of unstable equilibrium, the riser may be unable to maintain the equilibrium state if a small disturbance induces the riser motion. The effects of riser's span lengths, horizontal offsets, current forces and internal flow velocities on the critical top tensions of the risers are highlighted.

Keywords : Critical top tension / Finite element method / Neutrally buoyant riser / Shooting method / Variational formulation.

* Corresponding author : E-mail address : chainarong.ath@kmutt.ac.th

¹ Ph.D. Student, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering.

² Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering.

³ Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering.

1. บทนำ

ปัจจุบันความต้องการทางด้านพลังงานมีปริมาณเพิ่มมากขึ้นอย่างต่อเนื่องทุกปี โดยเฉพาะพลังงานจากปิโตรเลียมที่สะสมอยู่ใต้ท้องทะเล ท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเล (marine riser) เป็นองค์ประกอบสำคัญที่ใช้ในการลำเลียงปิโตรเลียมจากหลุมขุดเจาะใต้ทะเลมายังโครงสร้างนอกฝั่งบนระดับผิวน้ำ ซึ่งท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลจะมีลักษณะเป็นโครงสร้างที่มีความอ่อนตัวสูงและวางตัวอยู่ในแนวโค้ง โดยท่อจะต้องรับแรงกระทำเนื่องจากน้ำหนักประสิทธิผลของท่อ และแรงกระทำต่างๆ จากสภาพแวดล้อมได้แก่ แรง เนื่องจากการชนถ่ายของไหลภายในท่อ และแรงลากจากกระแส น้ำ เป็นต้น ด้วยเหตุนี้ท่อลำเลียงของไหลจึงมีความจำเป็นต้องได้รับการวิเคราะห์และออกแบบอย่างถูกต้องเหมาะสม เพื่อไม่ให้เกิดความเสียหายซึ่งจะนำไปสู่ผลกระทบต่อสภาพแวดล้อมทางทะเลเป็นอย่างมาก

จากการทบทวนวรรณกรรมที่ผ่านมาในอดีต พบว่ามีการวิจัยจำนวนมากที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์การแอ่นตัวมากและหาลักษณะการวางตัวของท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเล ณ สภาวะสมดุลสถิตศาสตร์ [1-11] อย่างไรก็ตามงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเสถียรภาพของท่อยังมีอยู่ไม่มากนัก ตัวอย่างเช่น Huang และ Dareing [12-13] ได้ศึกษาพฤติกรรมการโก่งเดาะและคำนวณหาค่าน้ำหนักวิกฤตของท่อที่วางตัวในแนวตั้งโดยอาศัยอนุกรมกำลังในการประมาณคำตอบเชิงตัวเลข Bernitsas [14] ได้วิเคราะห์หาหน้าหนักวิกฤตของท่อซึ่งพิจารณาถึงความหนาแน่นของของไหลภายในท่อและแรงลอยตัว ต่อมา Bernitsas และ Kokkinis [15-16] ได้ศึกษาผลกระทบของแรงดันภายในท่อและเงื่อนไขของจุดรองรับที่ปลายบนและปลายล่างของท่อต่อพฤติกรรมการโก่งเดาะของท่อที่วางตัวในแนวตั้ง และได้ขยายผลการวิจัยไปศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของท่อภายใต้แรงกระทำร่วมกันของน้ำหนักท่อแรงดึงที่ปลายบนของท่อและแรงดันของของไหล [17] ซึ่งงานวิจัยที่ได้กล่าวมานี้ ล้วนแล้วแต่เป็นการศึกษาเสถียรภาพของท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลภายใต้เงื่อนไขว่า ท่อวางตัวอยู่ในแนวตั้งและมีการแอ่นตัวน้อยเท่านั้น

ในกรณีที่ท่อลำเลียงของไหลถูกติดตั้งในทะเลที่มีระดับความลึกมากๆ น้ำหนักประสิทธิผลของท่อ (effective

weight) จะเป็นแรงกระทำหลักที่ทำให้ท่อเกิดการแอ่นตัวและส่งผลให้ท่อเกิดการโก่งเดาะขึ้น ดังนั้นจำเป็นต้องใส่แรงดึงที่ปลายบนของท่อเพื่อให้ท่อสามารถอยู่ในสภาวะสมดุลได้โดยไม่เกิดการโก่งเดาะขึ้น แรงดึงที่ปลายบนของท่อคือพารามิเตอร์ที่บ่งบอกถึงความแข็งแกร่งของท่อ (stiffness) ซึ่งหากท่อถูกติดตั้งในทะเลที่มีระดับความลึกมากๆ แรงดึงที่ปลายบนของท่อก็จะต้องมีค่ามากขึ้นตามไปด้วย แต่การเพิ่มแรงดึงให้มากขึ้นส่งผลให้ผนังท่อเกิดความเค้นมากขึ้นเช่นกัน ดังนั้นจึงจำเป็นต้องวิเคราะห์หาแรงดึงที่เหมาะสมที่ทำให้ท่อสามารถอยู่ในสภาวะสมดุลได้โดยไม่ทำให้ความเค้นที่เกิดขึ้นในผนังท่อมีค่ามากเกินไป ความจำเป็น วิศวกรและนักวิจัยจึงเริ่มให้ความสนใจแรงดึงวิกฤตที่ปลายบนของท่อ (critical top tension) หรือแรงดึงต่ำสุดที่ทำให้ท่อสามารถอยู่ในสภาวะสมดุลได้ Chucheeepsakul และ Monprapussorn [18] ได้ศึกษาการโก่งเดาะแบบไม่เป็นเชิงเส้นของท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเล และได้นำเสนอค่าแรงดึงวิกฤตที่ปลายบนของท่อ รวมถึงน้ำหนักวิกฤตของท่อที่วางตัวอยู่ในทะเลที่มีระดับความลึกน้อยกว่า 300 เมตร โดยใช้ระเบียบวิธีการยิงเป้า (shooting method) ในการหาค่าตอบเชิงตัวเลข ซึ่งวิธีนี้จะต้องทำการคาดเดาค่าเริ่มต้นที่จุดรองรับ และคำตอบที่ได้จะมีความถูกต้องก็ต่อเมื่อ ค่าเริ่มต้นที่คาดเดามีค่าใกล้เคียงกับคำตอบในระดับหนึ่ง สำหรับท่อลำเลียงของไหลที่วางตัวอยู่ในทะเลที่มีระดับความลึกมากๆ ท่อจะต้องการแรงดึงปริมาณมากที่ปลายบนหรือที่จุดรองรับ ส่งผลให้การเดาค่าเริ่มต้นที่จุดรองรับทำได้ค่อนข้างยาก ดังนั้นการใช้ระเบียบวิธีการยิงเป้าสำหรับวิเคราะห์ท่อลำเลียงของไหลในทะเลที่มีระดับความลึกมากๆ อาจไม่เหมาะสม

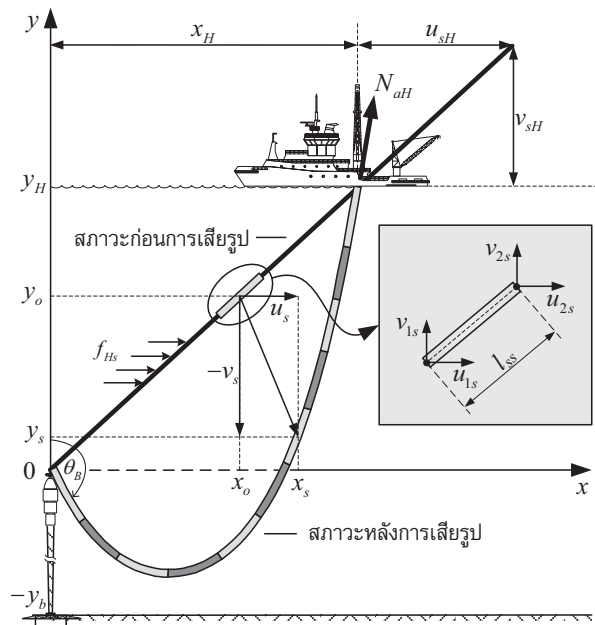
สำหรับท่อที่มีน้ำหนักประสิทธิผลมากๆ การติดตั้งทุ่นลอย (buoyancy module) ตลอดความยาวส่วนโค้งของท่อจะช่วยลดน้ำหนักประสิทธิผลของท่อลงได้ แต่ถ้าวางทุ่นลอยตัวที่เกิดจากทุ่นลอยเท่ากับน้ำหนักของท่อรวมกับน้ำหนักของของไหลภายในท่อ อาจส่งผลทำให้น้ำหนักประสิทธิผลของท่อมีค่าเท่ากับศูนย์ ณ สภาวะดังกล่าวท่อจะมีพฤติกรรมเป็นแบบสะเทินลอยตัว (neutrally buoyant riser) Chucheeepsakul และ Wang [19] ได้ทำการศึกษากลศาสตร์ของเคเบิลแบบสะเทินลอยตัว และได้นำเสนอแรงดึงวิกฤตที่ปลายบนของเคเบิล จากการศึกษาพบว่า

ถ้าแรงดึงมากกว่าแรงดึงวิกฤต ลักษณะการวางตัวของเคเบิลสามารถเกิดได้สองรูปแบบภายใต้แรงดึงค่าเดียวกัน และหากค่าแรงดึงที่ปลายบนมีค่าน้อยกว่าแรงดึงวิกฤตจะไม่สามารถหาสภาวะสมดุลของเคเบิลได้ อย่างไรก็ตามการศึกษานี้อาจไม่สามารถอธิบายพฤติกรรมของท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลได้อย่างสมบูรณ์ เนื่องจากไม่ได้พิจารณาความแข็งแกร่งต่อการดัด (bending rigidity) และผลกระทบเนื่องจากการขนถ่ายของไหลภายในท่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอการวิเคราะห์หาแรงดึงวิกฤตที่ปลายบนของท่อลำเลียงของไหลในทะเลลึกแบบสะเทินลอยตัว โดยอาศัยหลักการงาน-พลังงานเสมือน (virtual work-energy) ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของท่อ ซึ่งจะช่วยให้ได้สมการครอบคลุมปัญหาที่ไม่เป็นเชิงเส้น จากนั้นใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) ในการหาคำตอบเชิงตัวเลขโดยทำการแบ่งชิ้นส่วนย่อยตามความยาวส่วนโค้งของท่อ นอกจากนี้จะทำการศึกษาถึงผลกระทบจากพารามิเตอร์ต่างๆ อันได้แก่ ความยาวช่วงของท่อ ระยะเยื้องตามแนวราบระหว่างจุดรองรับที่ปลายทั้งสอง แรงเนื่องจากกระแสน้ำ และความเร็วของไหลภายในท่อที่มีผลต่อค่าแรงดึงวิกฤตที่ปลายบนและลักษณะการวางตัวของท่อในสภาวะสมดุลสถิตศาสตร์

2. สมการแปรผันของงาน-พลังงานเสมือนและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Variational formulation and finite element method)

เพื่อป้องกันการโก่งเดาะของท่อเนื่องจากน้ำหนักตัวเอง จึงจำเป็นต้องติดตั้งทุ่นลอย (buoyancy module) ตลอดความยาวส่วนโค้งของท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเล ถ้าแรงลอยตัวที่เกิดจากทุ่นลอยทำให้น้ำหนักประสิทธิผลของท่อมีค่าเป็นศูนย์ จะส่งผลให้ท่อลำเลียงของไหลมีพฤติกรรมเป็นแบบสะเทินลอยตัว รูปที่ 1 แสดงการวางตัวของท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเล ณ สภาวะสมดุลสถิตศาสตร์ ปลายล่างของท่อจะจำลองให้วางอยู่บนจุดรองรับแบบยึดหมุน (pinned support) ขณะที่ปลายบนของท่อจะวางพาดอยู่บนจุดรองรับที่ยอมให้ท่อสามารถเลื่อนไถลได้ (slip support) ซึ่งอยู่ที่พิกัดตำแหน่ง x_H, y_H เมื่อ x_H คือระยะที่วัดในแนวราบจากปลายล่างของท่อไปถึงปลายบนของท่อ (horizontal offset) และ y_H คือความลึกของน้ำทะเล (sea depth) หรือระยะที่วัดในแนวตั้งจากปลายล่างของท่อไปถึงปลายบนของท่อ ที่ตำแหน่งปลายบนของท่อจะต้องมีการให้แรงดึง (N_{aH}) เพื่อรักษาสภาวะสมดุลของท่อและป้องกันไม่ให้ท่อเกิดการโก่งเดาะ



รูปที่ 1 การวางตัวของท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลในสภาวะสมดุลสถิตศาสตร์

ในการศึกษานี้ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลแบบสะเทินลอยตัวจะพัฒนาขึ้นโดยอาศัยหลักการของงาน-พลังงานเสมือน โดยพิจารณาพลังงานความเครียดเสมือนเนื่องจากการดัด พลังงานความเครียดเสมือนเนื่องจากการเสียรูปตามแนวแกน และงานเสมือนเนื่องจากแรงกระทำภายนอกได้แก่ แรงจากการชนถ่ายของไหลและแรงลากจากกระแส น้ำ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1 พลังงานความเครียดเสมือนเนื่องจากการดัด (Virtual bending strain energy)

พลังงานความเครียดเนื่องจากการดัดสามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\delta U_b = \int_0^{s_s} \{ B_s \kappa_s y'_s \delta u''_s - B_s \kappa_s^2 x'_s \delta u'_s - B_s \kappa_s x'_s \delta v''_s - B_s \kappa_s^2 y'_s \delta v'_s \} ds_s \quad (1)$$

เมื่อกำหนดให้ (\prime) คืออนุพันธ์เทียบกับความยาวส่วนโค้งของท่อ (s_s) ตัวห้อย s แสดงถึงพารามิเตอร์ต่างๆ ณ สภาวะสมดุลสถิตศาสตร์ สำหรับตัวแปร x_s และ y_s คือพิกัดในแนวราบและพิกัดในแนวตั้งของท่อตามลำดับ ส่วนตัวแปร u_s และ v_s คือการเคลื่อนที่ของท่อในทิศทางตามแนวราบและทิศทางตามแนวตั้งตามลำดับ สำหรับตัวแปร $B_s = EI_{ps}$ คือความแข็งแกร่งต่อการดัด (bending stiffness) และตัวแปร $\kappa_s = x''_s y'_s - x'_s y''_s$ คือค่าความโค้งของท่อ (curvature)

2.2 พลังงานความเครียดเสมือนเนื่องจากการเสียรูปตามแนวแกน (Virtual strain energy due to axial deformation)

พลังงานความเครียดเสมือนเนื่องจากการเสียรูปตามแนวแกนของท่อสามารถหาได้ดังนี้

$$\delta U_a = \int_0^{s_s} \{ N_{as} x'_s \delta u'_s + N_{as} y'_s \delta v'_s \} ds_s \quad (2)$$

เนื่องจากท่อจะวางตัวอยู่ใต้น้ำทะเลดังนั้นการวิเคราะห์แรงภายในจำเป็นต้องพิจารณาผลของความดันสถิตจากของไหลทั้งภายในและภายนอกท่อ ทั้งนี้การ

พิจารณาผลของแรงดันดังกล่าวสามารถกระทำได้โดยการพิจารณาสมดุลของท่อในระบบเสมือนซึ่งแรงตามแนวแกนในระบบจากสมการที่ (2) จะมีค่าเทียบเท่ากับแรงดึงประสิทธิผล (N_{as}) ดังสมการต่อไปนี้ [20]

$$N_{as} = N + 2v(p_e A_{es} - p_i A_{is}) = EA_{ps} \varepsilon_s \quad (3)$$

เมื่อ p_e และ p_i คือแรงดันของของไหลภายนอกและภายในท่อตามลำดับ ส่วนตัวแปร N และ ε_s คือแรงดึงที่เกิดขึ้นจริงในผนังท่อ (true wall tension) และค่าความเครียดตามแนวแกนของท่อ (axial strain) ตามลำดับ สำหรับตัวแปร v จะแทนค่าอัตราส่วนปัวซอง A_{ps} คือพื้นที่หน้าตัดของเนื้อท่อ A_{es} และ A_{is} คือพื้นที่หน้าตัดภายนอกและพื้นที่หน้าตัดภายในของท่อตามลำดับ ซึ่งในการศึกษานี้จะพิจารณาให้หน้าตัดของท่อเป็นวงกลม

2.3 งานเสมือนเนื่องจากการชนถ่ายของไหล (Virtual work done by transporting fluid)

งานเสมือนเนื่องจากการชนถ่ายของไหลภายในท่อสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\delta W_I = - \int_0^{s_s} \{ m_{is} \kappa_s y'_s V_{is}^2 \delta u_s - m_{is} \kappa_s x'_s V_{is}^2 \delta v_s \} ds_s \quad (4)$$

เมื่อตัวแปร m_{is} และ V_{is} แทนค่ามวลต่อหนึ่งหน่วยความยาวส่วนโค้งและความเร็วของของไหลภายในท่อตามลำดับ

2.4 งานเสมือนเนื่องจากแรงลากของกระแสน้ำ (Virtual work done by current force)

งานเสมือนเนื่องจากแรงลากของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวราบสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\delta W_H = \int_0^{s_s} \{ f_{Hs} \delta u_s \} ds_s \quad (5)$$

เมื่อค่า f_{Hs} หมายถึงแรงกระทำเนื่องจากการแสน้ำกระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวส่วนโค้งของท่อในทิศทางตามแนวราบ เนื่องจากการศึกษานี้จะพิจารณาท่อลำเลียงของไหลว่ามีพฤติกรรมเป็นแบบสะเทินลอยตัวซึ่งน้ำหนักประสิทธิผลของท่อจะเท่ากับแรงลอยตัวที่เกิด

จากการติดตั้งหุ่นลอยตลอดความยาวของท่อ ดังนั้นจะไม่พิจารณางานเสมือนเนื่องจากน้ำหนักประสิทธิผลของท่อ

2.5 งาน-พลังงานเสมือนทั้งหมดของระบบ (Total virtual work-energy)

จากหลักการของงานเสมือน งานและพลังงานเสมือนทั้งหมดของระบบท่อสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\delta\pi_s = \delta U_b + \delta U_a - (\delta W_I + \delta W_H) \tag{6}$$

แทนสมการที่ (1), (2), (4) และ (5) ลงในสมการที่ (6) ทำให้สามารถเขียนสมการของงาน-พลังงานเสมือนทั้งหมดของระบบท่อได้ใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta\pi_s = & \int_0^{s_1} \left\{ B_s \kappa_s y'_s \delta u''_s + (N_{as} - B_s \kappa_s^2) x'_s \delta u'_s \right. \\ & \left. - B_s \kappa_s x'_s \delta v''_s + (N_{as} - B_s \kappa_s^2) y'_s \delta v'_s \right\} ds_s \\ & - \int_0^{s_1} \left\{ [f_{Hs} - m_{is} \kappa_s y'_s V_{is}^2] \delta u_s \right. \\ & \left. + [m_{is} \kappa_s x'_s V_{is}^2] \delta v_s \right\} ds_s \end{aligned} \tag{7}$$

สมการที่ (7) เป็นสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งในการศึกษานี้จะใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหาคำตอบเชิงตัวเลข

2.6 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method)

ในการศึกษานี้จะใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหาคำตอบเชิงตัวเลข โดยทำการแบ่งชิ้นส่วนย่อยตาม

ความยาวส่วนโค้งของท่อ เมื่อพิกัดในแนวราบ (x_s) และพิกัดในแนวตั้งของท่อ (y_s) ที่สภาวะสมดุลสถิตศาสตร์สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (8) และ (9) ตามลำดับดังนี้

$$x_s = x_o + u_s \tag{8}$$

$$y_s = y_o + v_s \tag{9}$$

จากสมการที่ (8) และ (9) ตัวแปร x_o และ y_o คือตำแหน่งในพิกัดตามแนวราบและแนวตั้งของท่อ ณ สภาวะก่อนการเสียรูป ส่วนองค์ประกอบของการเคลื่อนที่ตามแนวราบและแนวตั้งของท่อจะแทนด้วยตัวแปร u_s และ v_s ตามลำดับ ในการศึกษานี้ได้ประมาณค่าการเคลื่อนที่ดังกล่าวด้วยฟังก์ชันพหุนามดีกรีห้าเพื่อให้มีความต่อเนื่องของค่าการเคลื่อนที่ถึงอนุพันธ์อันดับที่สอง สำหรับค่าความเครียดตามแนวแกนของท่อ (ϵ_s) ซึ่งต้องการความต่อเนื่องถึงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเพื่อประโยชน์ในการคำนวณค่าแรงภายในได้อย่างถูกต้องแม่นยำจึงใช้ฟังก์ชันพหุนามดีกรีสามในการประมาณค่าความเครียด ดังนั้นค่าการเคลื่อนที่และค่าความเครียดตามแนวแกนของท่อ ณ ตำแหน่งต่างๆ ของชิ้นส่วนย่อยของท่อสามารถประมาณได้จากสมการต่อไปนี้

$$\{\bar{\mathbf{Q}}_s\} = \{u_s \quad v_s \quad \epsilon_s\}^T = [\mathbf{N}]\{\bar{\mathbf{q}}_{ns}\} \tag{10}$$

เมื่อเมตริกซ์ $[\mathbf{N}]$ คือเมตริกซ์ของฟังก์ชันรูปร่างซึ่งประกอบด้วยฟังก์ชันรูปร่างของพหุนามดีกรี 5 (N_{5i}) และฟังก์ชันรูปร่างของพหุนามดีกรี 3 (N_{3i}) ดังสมการต่อไปนี้

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_{51} & N_{52} & N_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{51} & N_{52} & N_{53} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{31} & N_{32} \\ & & & N_{54} & N_{55} & N_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & N_{54} & N_{55} & N_{56} & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{33} & N_{34} \end{bmatrix} \tag{11}$$

สำหรับเวกเตอร์ $\{\bar{q}_{ns}\}$ คือดีกรีอิสระของชิ้นส่วนย่อยของท่อ ซึ่งประกอบด้วยค่าการเคลื่อนที่และค่าความเครียดตามแนวแกนรวมถึงค่าอนุพันธ์ในอันดับต่างๆ ณ ตำแหน่งจุดต่อของชิ้นส่วนย่อยของท่อ

$$\{\bar{q}_{ns}\} = \begin{Bmatrix} u_{1s} & u'_{1s} & u''_{1s} & v_{1s} & v'_{1s} \\ v''_{1s} & \varepsilon_{1s} & \varepsilon'_{1s} & u_{2s} & u'_{2s} & u''_{2s} \\ v_{2s} & v'_{2s} & v''_{2s} & \varepsilon_{2s} & \varepsilon'_{2s} \end{Bmatrix}^T \quad (12)$$

จากหลักการของงาน-พลังงานเสมือน สมการที่ (7) จะเท่ากับศูนย์เมื่อระบบของท่ออยู่ในสภาวะสมดุล ดังนั้นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละชิ้นส่วนย่อยของท่อสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial \pi_{sk}}{\partial q_{nst}} = \int_0^{l_{ss}} \left[[N'']^T \begin{Bmatrix} B_s \kappa_s y'_s \\ -B_s \kappa_s x'_s \\ 0 \end{Bmatrix} + [N']^T \begin{Bmatrix} (N_{as} - B_s \kappa_s^2) x'_s \\ (N_{as} - B_s \kappa_s^2) y'_s \\ 0 \end{Bmatrix} \right] ds_s + \int_0^{l_{ss}} \left[[N] \begin{Bmatrix} -f_{Hs} + m_{is} \kappa_s y'_s V_{is}^2 \\ -m_{is} \kappa_s x'_s V_{is}^2 \\ EA_{ps} \varepsilon_s - N_{as} \end{Bmatrix} \right] ds_s = \{0\} \quad (13)$$

โดยที่ปลายล่างของท่อซึ่งรองรับด้วยจุดรองรับแบบยึดหมุน (pinned support) จะมีเงื่อนไขขอบเขตดังต่อไปนี้

$$u_s = 0, \quad u''_s = 0, \quad (14 \text{ ก-ข})$$

$$v_s = 0, \quad v''_s = 0 \quad (14 \text{ ข-ค})$$

ส่วนจุดรองรับที่ปลายบนของท่อจะเป็นจุดรองรับที่ยอมให้ท่อสามารถเลื่อนไถลได้ (slip support) ซึ่งเงื่อนไขขอบเขตจะกำหนดได้ดังต่อไปนี้

$$u_s = -u_{sH}, \quad u'_s = 0, \quad (15 \text{ ก-ข})$$

$$v_s = -v_{sH}, \quad v'_s = 0, \quad (15 \text{ ข-ค})$$

$$N_{as} = N_{aH}, \quad \varepsilon_{sH} = \frac{N_{aH}}{EA_{ps}} \quad (15 \text{ ค-ข})$$

หลังจากที่รวมระบบสมการของชิ้นส่วนย่อยของท่อในสมการที่ (13) แล้วจะได้ระบบสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งจะต้องใช้กระบวนการทำซ้ำ (iterative procedure) ในการหาคำตอบเชิงตัวเลข จากนั้นจะทำการสร้างกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึงที่ปลายบนของท่อ (N_{aH}) กับความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อ (s_i) ซึ่งค่าแรงดึงที่ปลายบนต่ำสุดบนกราฟจะเป็นค่าแรงดึงวิกฤตที่ปลายบน (N_{aHcr}) ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยใช้กระบวนการค้นหาของไดโคโตมัส (Dichotomous search algorithm)

3. ระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting method)

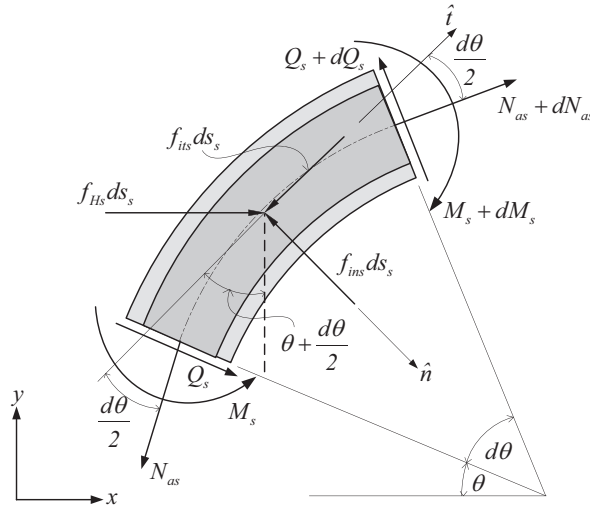
ระเบียบวิธียิงเป้าเป็นวิธีหนึ่งที่ยอมรับใช้สำหรับการหาคำตอบของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตแบบสองจุด (two-point boundary value problem) ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงอาศัยวิธีการนี้ในการตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สมการที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาจะเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วยสมการสมดุลและสมการความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของชิ้นส่วนย่อยของท่อ รวมถึงสมการความสัมพันธ์ระหว่างความโค้งกับโมเมนต์ตัดภายในท่อ

จากการพิจารณาผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของท่อในรูปที่ 2 ทำให้สามารถเขียนสมการสมดุลของแรงในทิศทางตามแนวสัมผัสและทิศทางตั้งฉากกับแนวแกนของท่อดังแสดงในสมการที่ (16) และสมการที่ (17) ตามลำดับ สำหรับสมการสมดุลของโมเมนต์แสดงได้ดังสมการที่ (18)

$$\frac{dN_{as}}{ds_s} = -Q_s \frac{d\theta}{ds_s} - f_{Hs} \sin \theta \quad (16)$$

$$\frac{dQ_s}{ds_s} = (N_{as} - m_{is} V_{is}^2) \frac{d\theta}{ds_s} + f_{Hs} \cos \theta \quad (17)$$

$$\frac{dM_s}{ds_s} = Q_s \quad (18)$$



รูปที่ 2 พังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของท่อ

ในที่นี้ M_s และ Q_s คือโมเมนต์ตัดและแรงเฉือนตามลำดับ จากหลักการของเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (differential geometry) ของเส้นโค้งในระนาบทำให้ได้สมการความสัมพันธ์ของรูปทรงเรขาคณิต (geometric relation) ของชิ้นส่วนย่อยของท่อดังนี้

$$\frac{dx_s}{ds_s} = \sin \theta, \quad \frac{dy_s}{ds_s} = \cos \theta, \quad \kappa_s = \frac{d\theta}{ds_s} \quad (19 \text{ ก-ค})$$

จากทฤษฎีของความยืดหยุ่น (theory of elasticity) ทำให้ได้สมการความสัมพันธ์ระหว่างแรงดิ่งกับความเครียดตามแนวแกน และสมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ตัดกับความโค้งของท่อ ดังนี้

$$N_{as} = EA_{Ps}\epsilon_s, \quad M_s = B_s\kappa_s \quad (20 \text{ ก-ข})$$

จากสมการที่ (16) ถึง (19) ซึ่งเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งแบบไม่เป็นเชิงเส้น ดังนั้นเพื่อให้ง่ายต่อการหาคำตอบเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีการยิงเป้าตัวแปรต่างๆ ในสมการจะถูกเขียนให้อยู่ในรูปของตัวแปรไร้มิติ ซึ่งมีความสัมพันธ์กันดังต่อไปนี้

$$s^* = s_s / s_l, \quad \hat{x} = x_s / L, \quad \hat{y} = y_s / L \quad (21 \text{ ก-ข})$$

$$\hat{s} = s_s / L, \quad \eta = L / \sqrt{I_{Ps} / A_{Ps}} \quad (21 \text{ ค-ค})$$

$$\hat{M} = M_s L / EI_{Ps}, \quad \hat{Q} = Q_s L^2 / EI_{Ps}, \quad \hat{N}_a = N_{as} L^2 / EI_{Ps} \quad (21 \text{ ข-จ})$$

$$\hat{\rho}_p = \rho_p A_{Ps} g L^3 / EI_{Ps}, \quad \hat{\rho}_e = \rho_e A_{es} g L^3 / EI_{Ps}, \quad \hat{\rho}_i = \rho_i A_{is} g L^3 / EI_{Ps} \quad (21 \text{ ฉ-ข})$$

$$\hat{V}_i = V_{is} L \sqrt{\rho_i A_{is} / EI_{Ps}} \quad (21 \text{ ฉ})$$

เมื่อ $L = \sqrt{x_H^2 + y_H^2}$ คือความยาวช่วงระหว่างจุดรองรับที่ปลายล่างและปลายบนของท่อ

เงื่อนไขของจุดรองรับ ณ ตำแหน่งปลายล่างและปลายบนของท่อจะถูกกำหนดดังนี้

ปลายล่าง ($s^* = 0$);
 $\hat{x} = 0, \quad \hat{y} = 0, \quad \theta = \theta_B, \quad \hat{M} = 0, \quad \hat{Q} = \hat{Q}_B, \quad \hat{N}_a = \hat{N}_{aB} \quad (22 \text{ ก-ข})$

ปลายบน ($s^* = 1$);
 $\hat{x} = \hat{x}_H, \quad \hat{y} = \hat{y}_H, \quad \theta = \theta_H, \quad \hat{M} = 0, \quad \hat{Q} = \hat{Q}_H, \quad \hat{N}_a = \hat{N}_{aH} \quad (23 \text{ ก-ข})$

สำหรับขั้นตอนและวิธีการคำนวณมีดังต่อไปนี้คือ เริ่มจากกำหนดค่าของตัวแปรควบคุม (control variable) ซึ่งในการศึกษานี้จะใช้ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อ (\hat{s}) เป็นตัวแปรควบคุม พร้อมทั้งกำหนดค่าเงื่อนไขของจุดรองรับ (\hat{x} , \hat{y} และ \hat{M}) ณ ตำแหน่ง $s^* = 1$ และ $s^* = 0$ ขั้นตอนต่อมาคือประมาณค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่า (θ , \hat{Q} และ \hat{N}_o) ณ ตำแหน่ง $s^* = 1$ จากนั้นอินทิเกรตสมการที่ (12), (13), (14) และ (15 ก-ข) จาก $s^* = 1$ ถึง $s^* = 0$ โดยใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-คุดตาอันดับห้า (fifth order Runge-Kutta) และใช้กระบวนการทำซ้ำในการปรับแก้ตัวแปรไม่ทราบค่าในระบบสมการจนกว่าผลคำตอบจะสอดคล้องกับเงื่อนไขในสมการที่ (24) ซึ่งในการศึกษานี้ได้กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ (tolerance) เท่ากับ 10^{-10}

$$\text{Min}_{\theta_H, \hat{Q}_H, \hat{N}_{aH}} \Phi = |\hat{x}(0)| + |\hat{y}(0)| + |\hat{M}(0)| = 0 \quad (24)$$

ขั้นตอนสุดท้ายคือกำหนดค่าส่วนเพิ่ม $\Delta \hat{s}_i$ เข้าไปใน \hat{s}_i และทำกระบวนการต่างๆ ที่ได้กล่าวมาข้างต้นซ้ำเพื่อสร้างกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง \hat{N}_{aH} กับ \hat{s}_i ค่าที่ต่ำที่สุดของ \hat{N}_{aH} จากกราฟคือค่าแรงดึงวิกฤตที่ปลายบนของท่อ

4. ผลคำตอบเชิงตัวเลข (Numerical results)

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขและอิทธิพลของตัวแปรต่างๆ ที่มีต่อค่าแรงดึงวิกฤตที่ปลายด้านบน (critical top tension) และเสถียรภาพของท่อ

ถึงแม้ว่าเสถียรภาพของท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลแบบสะเทินลอยตัวจะไม่ขึ้นอยู่กับน้ำหนักประสิทธิผลของท่อ [19]

4.1 การตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบเชิงตัวเลข

เป็นที่ทราบกันโดยทั่วไปว่า ความถูกต้องของคำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ขึ้นอยู่กับปัจจัยหลายๆ อย่าง ที่สำคัญคือจำนวนชั้นส่วนย่อยที่ใช้ในการวิเคราะห์ ดังนั้นเพื่อให้มั่นใจว่าจำนวนชั้นส่วนที่ใช้ในการวิเคราะห์มากเพียงพอและสามารถให้คำตอบที่มีความถูกต้อง จึงจำเป็นต้องตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบเทียบกับจำนวนชั้นส่วนที่ใช้ในการวิเคราะห์ ในการศึกษานี้ได้ใช้พารามิเตอร์ต่างๆ ดังแสดงในตารางที่ 1 และกำหนดความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อเท่ากับ 1,150 เมตร ตารางที่ 2 แสดงผลการวิเคราะห์ (แรงดึงที่ปลายบน (N_{aH}) มุมที่จุดรองรับบน (θ_H) และจุดรองรับล่างของท่อ (θ_B)) ที่ได้จากการใช้จำนวนชั้นส่วนย่อยตั้งแต่ 5-40 ชั้น จากตารางดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าเมื่อจำนวนชั้นส่วนเพิ่มมากขึ้นจะทำให้คำตอบที่ได้ลู่เข้าสู่ค่าค่าหนึ่งซึ่งเป็นค่าที่ถูกต้อง จากการเปรียบเทียบผลระหว่างคำตอบที่ได้จากการใช้จำนวนชั้นส่วนย่อยที่ต่างกับกับผลการวิเคราะห์ที่ใช้ชั้นส่วนย่อยจำนวน 40 ชั้น พบว่า คำตอบที่ได้จากการใช้ชั้นส่วนย่อยจำนวน 20 ชั้นกับ 40 ชั้นต่างกันไม่เกิน 0.5 เปอร์เซ็นต์ ดังนั้นการใช้ชั้นส่วนย่อยจำนวน 20 ชั้นจึงเพียงพอต่อการวิเคราะห์ผลสำหรับการศึกษานี้

ตารางที่ 1 ข้อมูลและสมบัติของท่อลำเลียงของไหลที่ใช้ในการวิเคราะห์

พารามิเตอร์	ค่าทั่วไป	ช่วงที่สนใจ
ความลึกระดับน้ำทะเล, y_H (m)	900	300-1,500
เปอร์เซ็นต์ของระยะเยื้องระหว่างจุดรองรับทั้งสองตามแนวราบตกความลึกระดับน้ำทะเล, $(x_H/y_H) \cdot 100$ (%)	50	20-100
ความเร็วของไหลภายในท่อ, V_{is} (m/s)	0	0-30
แรงเนื่องจากกระแส, f_{Hs} (kN/m)	1.0	0.2-1.2
ความหนาแน่นของน้ำทะเล, ρ_e (kg/m ³)	1025	-
ความหนาแน่นของไหลภายในท่อ, ρ_i (kg/m ³)	998	-
เส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกท่อ, D_{es} (m)	0.26	-
เส้นผ่านศูนย์กลางภายในท่อ, D_{is} (m)	0.20	-
โมดูลัสความยืดหยุ่นของท่อ, E (kN/m ²)	2.07×10^8	-

ตารางที่ 2 ตรวจสอบการลู่เข้าของค่าตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จำนวนชั้นส่วน	N_{aH} (kN)	% ต่างจาก 40 ชั้นส่วน	θ_H (rad)	% ต่างจาก 40 ชั้นส่วน	θ_B (rad)	% ต่างจาก 40 ชั้นส่วน
5	523.70	0.99	-0.53269	2.31	1.08627	0.50
10	527.68	0.23	-0.54168	0.66	1.09004	0.16
15	528.41	0.09	-0.54388	0.26	1.09103	0.07
20	528.67	0.05	-0.54467	0.11	1.09142	0.03
25	528.79	0.02	-0.54500	0.05	1.09160	0.02
30	528.85	0.01	-0.54516	0.02	1.09169	0.01
35	528.89	0.00	-0.54524	0.01	1.09175	0.00
40	528.91	-	-0.54529	-	1.09178	-

เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และกระบวนการหาค่าตอบเชิงตัวเลข จึงได้ทดสอบหาค่าแรงดึงวิกฤตของเคเบิลใต้น้ำแบบสะเทินลอยตัว (ไม่พิจารณาความแข็งแรงต่อการดัด) ซึ่ง Chucheepsakul และ Wang [19] ได้นำเสนอสมการ

สำหรับการวิเคราะห์หาแรงดึงวิกฤตและมุมวิกฤตที่จุดรองรับด้านบนของเคเบิลใต้น้ำแบบสะเทินลอยตัว ดังนี้

$$\sin^{-1} \left(\frac{\sin \theta_H}{1 + \frac{x_H f_{Hs}}{N_{aH}}} \right) - 2 \tan^{-1} \left[\frac{e^{\ln \left(\tan \frac{\theta_H}{2} \right)}}{e^{\frac{y_H f_{Hs}}{N_{aH} \sin \theta_H}}} \right] = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\cos \theta_H}{\sqrt{\left(1 + \frac{x_H f_{Hs}}{N_{aH}}\right)^2 - \sin^2 \theta_H}} - 2 \left[e^{\left[\ln \left\{ \tan \left(\frac{\theta_H}{2} \right) \right\} - \frac{y_H f_{Hs}}{N_{aH} \sin \theta_H} \right]} \right] \left[\frac{\frac{N_{aH} + y_H f_{Hs} \cot \theta_H}{N_{aH} \sin \theta_H}}{1 + e^{\left[2 \ln \left\{ \tan \left(\frac{\theta_H}{2} \right) \right\} - \frac{y_H f_{Hs}}{N_{aH} \sin \theta_H} \right]}} \right] = 0 \quad (26)$$

เมื่อพารามิเตอร์ที่ถูกกำหนดค่า y_H , x_H , และ f_{Hs} คือความลึกของระดับน้ำทะเล ระยะเยื้องระหว่างจุดรองรับทั้งสองตามแนวราบ และแรงเนื่องจากกระแสน้ำแบบกระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวเคเบิลตามลำดับ สำหรับตัวแปรไม่ทราบค่า N_{aH} และ θ_H คือแรงดึงและมุมหมุนที่

จุดรองรับด้านบนของเคเบิล ตามลำดับ ในการหาแรงดึงวิกฤต (N_{aHcr}) และมุมหมุนวิกฤต (θ_{Hcr}) ที่จุดรองรับด้านบนสามารถหาได้จากการแก้ระบบสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นได้แก่สมการที่ (25) และสมการที่ (26)

ตารางที่ 3 การเปรียบเทียบผลคำตอบเชิงตัวเลขระหว่างระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) กับงานวิจัยในอดีต [19] จากการวิเคราะห์เคเบิลใต้น้ำแบบสะเทินลอยตัว ($y_H = 300$ m, $x_H = 150$ m, และ $f_{Hs} = 1.0$ kN/m)

พารามิเตอร์	งานวิจัย [19]	การศึกษานี้ (FEM)	% ต่างต่าง
N_{aHcr} (kN)	168.25	168.51	0.15
θ_{Hcr} (rad)	-0.77825	-0.77252	0.74

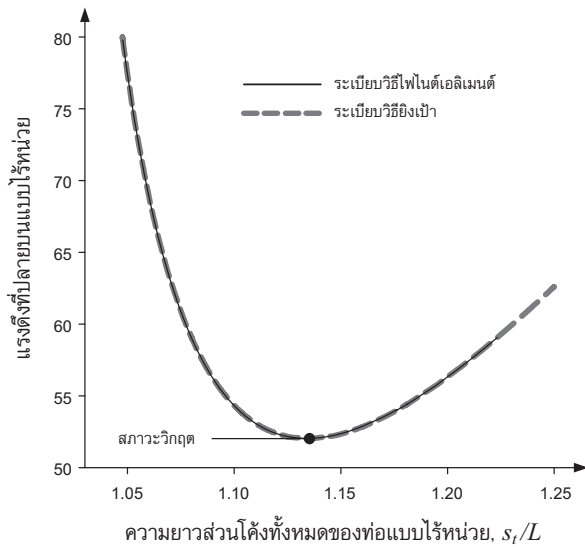
ตารางที่ 3 แสดงการเปรียบเทียบผลคำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับคำตอบที่ได้จากสมการที่ (25) และสมการที่ (26) พบว่าค่าแรงดึงวิกฤต (N_{aHcr}) และมุมวิกฤตที่จุดรองรับบน (θ_{Hcr}) ของเคเบิลใต้น้ำแบบสะเทินลอยตัวที่ได้จากการศึกษานี้กับผลคำตอบที่ได้จากสมการของ Chucheepsakul และ Wang [19] มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

สำหรับการตรวจสอบคำตอบเชิงตัวเลขของปัญหาท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลแบบสะเทินลอยตัวที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) จะทำการเปรียบเทียบผลคำตอบที่ได้กับคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากระเบียบวิธีการยิงเป้า (shooting method) ซึ่งค่าของพารามิเตอร์ต่างๆที่ใช้ในการตรวจสอบได้แก่ $\hat{y}_H = 0.57$, $\hat{x}_H = 0.82$, $\eta = 2240$, $\hat{f}_H = 296.19$, $\hat{\rho}_e = 109.58$, $\hat{\rho}_i = 63.13$ และ $\nu = 0.5$ รูปที่ 3(ก) แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึงที่ปลายบนของท่อ (\hat{N}_a) กับความ

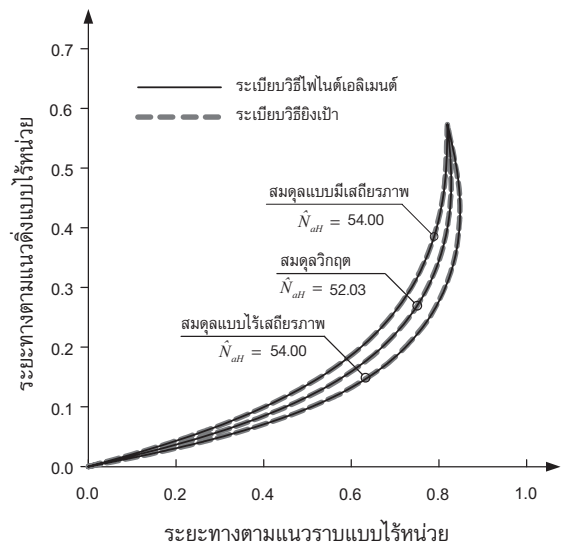
ยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อแบบไร้หน่วย (\hat{s}) โดยเปรียบเทียบผลคำตอบที่จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) กับระเบียบวิธียิงเป้า (SM) ซึ่งการเปรียบเทียบแสดงให้เห็นว่าทั้งสองวิธีนี้ให้ผลคำตอบที่สอดคล้องกัน จากรูป 3(ก) จุดต่ำสุดของค่าแรงดึงที่ปลายบนก็คือแรงดึงวิกฤตซึ่งมีค่าไร้หน่วยเท่ากับ 52.03 เมื่อพิจารณากรณีที่แรงดึงที่ปลายบนแบบไร้หน่วยมีค่าเท่ากับ 54.00 ซึ่งมากกว่าแรงดึงวิกฤต จะพบว่าท่อสามารถอยู่ในสถานะสมดุลได้ 2 รูปแบบดังแสดงในรูปที่ 3(ข) โดยสถานะสมดุลซึ่งมีการเคลื่อนที่น้อยกว่าเรียกว่าสถานะสมดุลแบบมีเสถียรภาพสำหรับสถานะสมดุลที่มีการเคลื่อนที่มากกว่าจะเป็นสถานะสมดุลแบบไม่มีเสถียรภาพ นอกจากนั้นตารางที่ 4 ได้แสดงการเปรียบเทียบผลคำตอบเชิงตัวเลขของแรงดึงที่ปลายบนและปลายล่างของท่อ (\hat{N}_{aH} , \hat{N}_{aB}) ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อ (\hat{s}) มุมที่จุดรองรับบน (θ_H) และจุดรองรับล่างของท่อ (θ_B) ณ สถานะสมดุลแบบ

มีเสถียรภาพ (stable) ไร้เสถียรภาพ (unstable) และสภาวะสมดุลวิกฤต (critical) ของท่อ ซึ่งการเปรียบเทียบผลคำตอบแสดงให้เห็นว่าคำตอบที่ได้จากวิธีการไฟไนต์-เอลิเมนต์และวิธีการยิงเป้ามีค่าใกล้เคียงกันมาก ทั้งนี้หากระดับความลึกมีค่าตั้งแต่ประมาณ 300 เมตรขึ้นไป

ระเบียบวิธียิงเป้าจะหาคำตอบได้ยากซึ่งไม่มีความเหมาะสมในการวิเคราะห์ ดังนั้นในการศึกษานี้จะใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการศึกษาผลของพารามิเตอร์ต่างๆ ต่อแรงดึงวิกฤตที่ปลายด้านบนของท่อในลำดับถัดไป



(ก)



(ข)

รูปที่ 3 เปรียบเทียบผลคำตอบเชิงตัวเลขระหว่างระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับระเบียบวิธียิงเป้า
 (ก) ความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึงที่ปลายบนกับความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อแบบไร้หน่วย
 (ข) การวางตัวของท่อ ณ สภาวะสมดุลต่างๆ

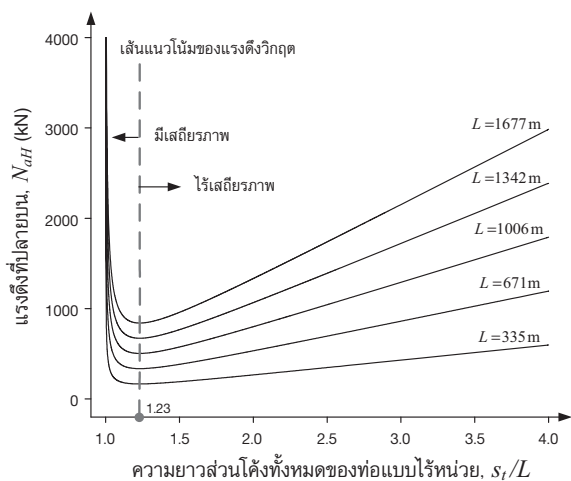
ตารางที่ 4 การเปรียบเทียบผลคำตอบเชิงตัวเลขระหว่างระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) กับระเบียบวิธียิงเป้า (SM) จากการวิเคราะห์ท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลแบบ สะเทินลอยตัว

พารามิเตอร์	เสถียรภาพ		วิกฤต		ไร้เสถียรภาพ	
	SM	FEM	SM	FEM	SM	FEM
\hat{N}_{aH}	54.00	54.00	52.03	52.03	54.00	54.00
\hat{N}_{aB}	296.63	296.63	294.65	294.65	296.63	296.63
\hat{s}_t	1.1022	1.1021	1.1345	1.1341	1.1763	1.1760
θ_H (rad)	0.0127	0.0125	-0.1397	-0.1362	-0.3109	-0.3107
θ_B (rad)	1.3738	1.3734	1.4026	1.4019	1.4291	1.4287

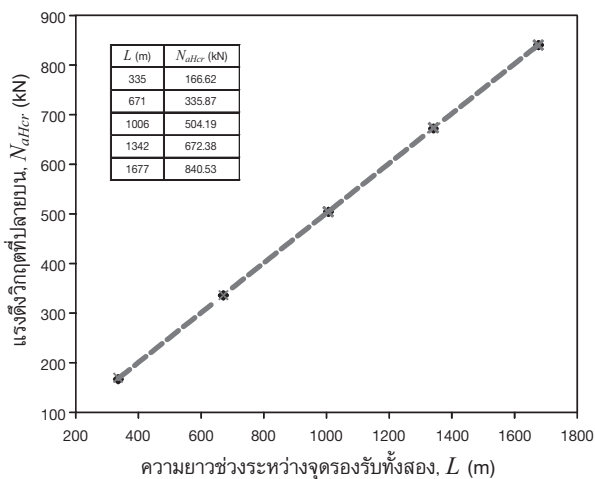
4.2 การศึกษาพารามิเตอร์ที่มีผลต่อแรงดึงวิกฤต

ในการศึกษาและวิเคราะห์ถึงอิทธิพลของพารามิเตอร์ต่างๆ ที่มีผลต่อแรงดึงวิกฤตที่ปลายด้านบนของท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลแบบสะเทินลอยตัวจะใช้ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ดังแสดงในตารางที่ 1 เพื่อหาแรงดึงวิกฤตที่ปลายด้านบนของท่อ จำเป็นต้องสร้างกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึงที่ปลายบนกับความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อ ซึ่งในงานวิจัยนี้จะศึกษาผลกระทบของความยาวช่วงระหว่างจุดรองรับ ระยะทางที่วัดตามแนวราบของท่อระหว่างจุดรองรับทั้งสอง แรงเนื่องจากกระแส น้ำ และความเร็วของของไหลภายในท่อต่อแรงดึงวิกฤตที่ปลายบนของท่อ จากรูปที่ 4(ก), 5(ก), 6(ก) และ 7(ก)

แสดงให้เห็นว่าการลดลงของค่าแรงดึงที่ปลายบนส่งผลทำให้ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อเพิ่มมากขึ้น ซึ่งสถานะนี้เรียกว่าสถานะสมดุลแบบมีเสถียรภาพ แรงดึงที่ปลายบนของท่อสามารถลดลงได้ถึงจุดจุดหนึ่งที่เป็นจุดต่ำสุดบนกราฟเรียกว่าจุดวิกฤต หลังจากนั้นจะเข้าสู่สถานะสมดุลแบบไม่มีเสถียรภาพ ซึ่งแรงดึงจะไม่สามารถลดลงได้อีก แต่จะเพิ่มมากขึ้นและยังคงส่งผลให้ความยาวส่วนโค้งเพิ่มขึ้นเช่นเดิม สำหรับผลกระทบเนื่องจากพารามิเตอร์ต่างๆ ต่อค่าแรงดึงวิกฤตที่ปลายด้านบนของท่อได้แก่ ความยาวช่วงของท่อ ระยะเยื้องระหว่างจุดรองรับทั้งสองตามแนวราบ แรงลากจากกระแส น้ำ และความเร็วของไหลภายในท่อได้แสดงดังต่อไปนี้



(ก)



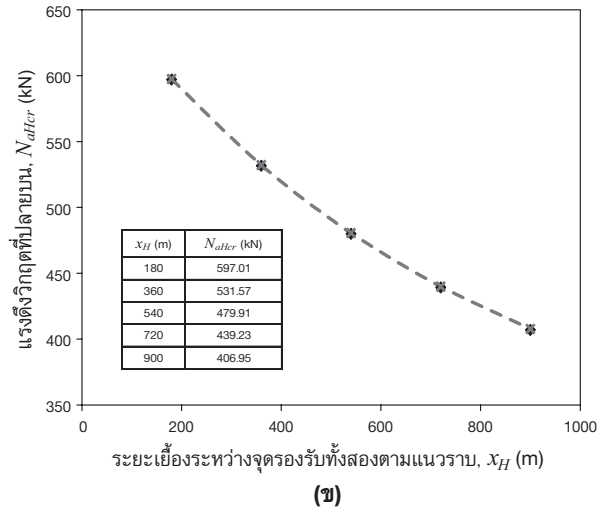
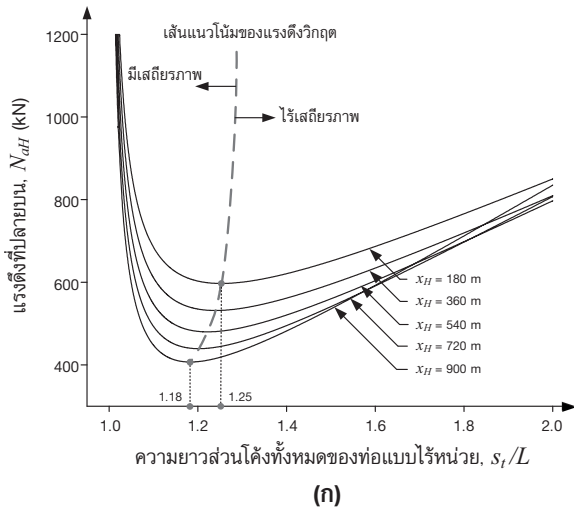
(ข)

รูปที่ 4 ผลกระทบของความยาวช่วงระหว่างจุดรองรับทั้งสองต่อแรงดึงวิกฤตที่ปลายบน

- (ก) ความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึงที่ปลายบนกับความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อแบบไร้หน่วย
(ข) ความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึงวิกฤตที่ปลายบนกับความยาวช่วงระหว่างจุดรองรับทั้งสอง

รูปที่ 4 แสดงผลกระทบเนื่องจากการเพิ่มขึ้นของความยาวช่วงของท่อต่อแรงดึงวิกฤต เมื่อกำหนดให้ระยะที่วัดในแนวตั้งระหว่างจุดรองรับที่ปลายทั้งสองของท่อ (y_H) มีค่าตั้งแต่ 300-1500 m และระยะเยื้องระหว่างจุดรองรับทั้งสองตามแนวราบ (x_H) มีค่าเท่ากับ 50% ของ y_H รูปที่ 4(ก) แสดงให้เห็นว่าความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อแบบ

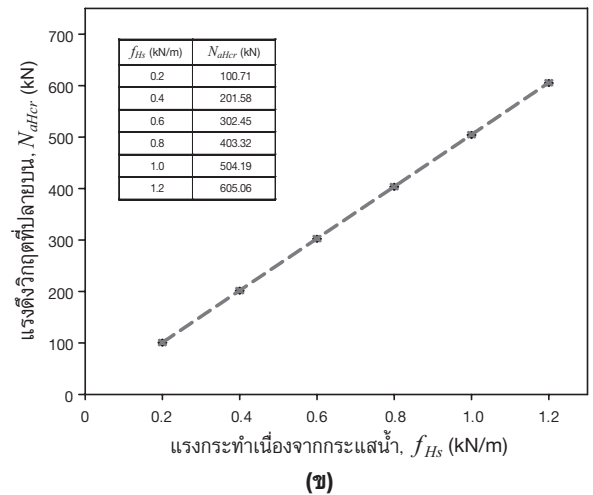
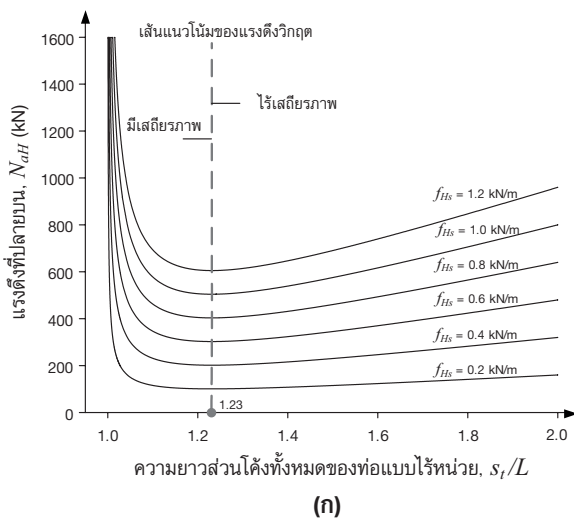
ไร้หน่วย ณ สถานะวิกฤตจะมีค่าคงที่เท่ากับ 1.23 รูปที่ 4(ข) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึงวิกฤตกับความยาวช่วงของท่อ (L) ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการเพิ่มขึ้นของความยาวช่วงของท่อทำให้แรงดึงวิกฤตเพิ่มขึ้นและมีความชันของกราฟเท่ากับ 0.5 kN/m



รูปที่ 5 ผลกระทบของระยะเยื้องระหว่างจุดรองรับทั้งสองตามแนวราบต่อแรงดึงวิกฤตที่ปลายบน
 (ก) ความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึงที่ปลายบนกับความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อแบบไร้หน่วย
 (ข) ความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึงวิกฤตที่ปลายบนกับระยะเยื้องระหว่างจุดรองรับทั้งสองตามแนวราบ

รูปที่ 5 แสดงผลกระทบเนื่องจากการเพิ่มขึ้นของระยะเยื้องระหว่างจุดรองรับทั้งสองตามแนวราบต่อค่าแรงดึงวิกฤต โดยกำหนดให้ระยะที่วัดในแนวตั้งระหว่างจุดรองรับที่ปลายทั้งสองของท่อ (y_H) มีค่าเท่ากับ 900 m และระยะเยื้องระหว่างจุดรองรับทั้งสองตามแนวราบ (x_H) มีค่าอยู่ในช่วง 180-900 m รูปที่ 5(ก) แสดงให้เห็นว่าเมื่อระยะเยื้องระหว่างจุดรองรับทั้งสองตามแนวราบเพิ่มขึ้นส่งผลให้ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อแบบไร้หน่วย ณ

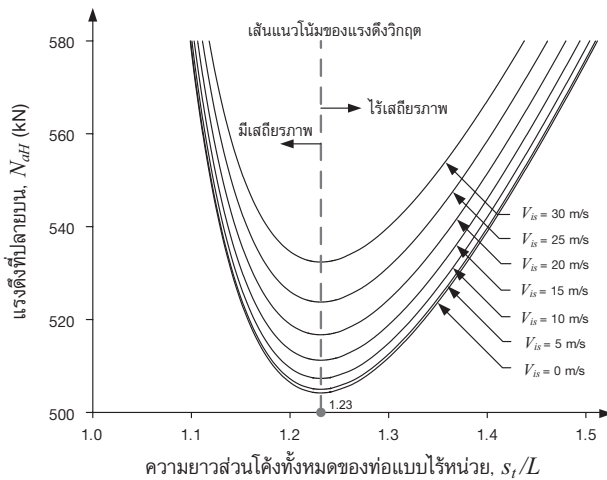
สภาวะวิกฤตลดลงจาก 1.25 ถึง 1.18 ซึ่งค่าความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อที่ได้นี้ สามารถนำไปใช้เป็นตัวชี้วัดจำกัดสำหรับการออกแบบท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเลแบบสะเทินลอยตัวได้ รูปที่ 5(ข) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะเยื้องระหว่างจุดรองรับทั้งสองตามแนวราบกับแรงดึงวิกฤต จะเห็นได้ว่าการเพิ่มขึ้นของระยะเยื้องระหว่างจุดรองรับทั้งสองตามแนวราบส่งผลให้ค่าแรงดึงวิกฤตลดลง



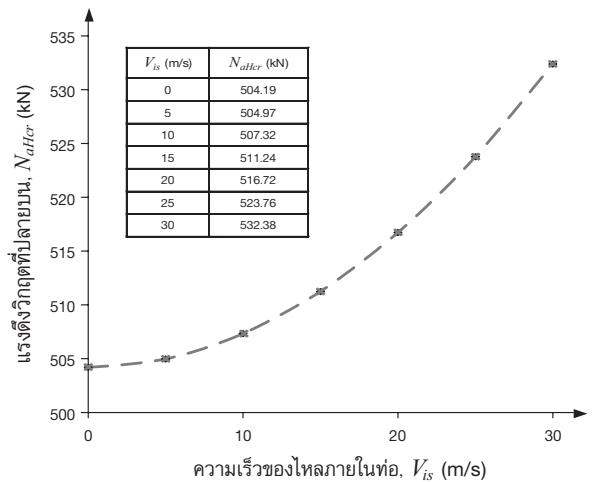
รูปที่ 6 ผลกระทบของแรงกระทำเนื่องจากกระแสน้ำต่อแรงดึงวิกฤตที่ปลายบน
 (ก) ความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึงที่ปลายบนกับความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อแบบไร้หน่วย
 (ข) ความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึงวิกฤตที่ปลายบนกับแรงกระทำเนื่องจากกระแสน้ำ

ผลกระทบจากการเพิ่มขึ้นของแรงเนื่องจากกระแสน้ำต่อแรงดึงวิกฤตแสดงในรูปที่ 6 เมื่อกำหนดให้แรงเนื่องจากกระแสน้ำแบบกระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวส่วนโค้งของท่อ (f_{Hs}) มีค่าตั้งแต่ 0.2-1.2 kN/m รูปที่ 6(ก) แสดงให้เห็นว่าความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อแบบ

ไร้มิติมีค่าคงที่เท่ากับ 1.23 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการเพิ่มขึ้นของแรงเนื่องจากกระแสน้ำไม่ส่งผลต่อลักษณะการวางตัวของท่อ ณ สภาวะวิกฤต แต่อย่างไรก็ดี ค่าแรงดึงวิกฤตจะเพิ่มขึ้นเมื่อแรงเนื่องจากกระแสน้ำเพิ่มมากขึ้นดังแสดงในรูปที่ 6(ข)



(ก)



(ข)

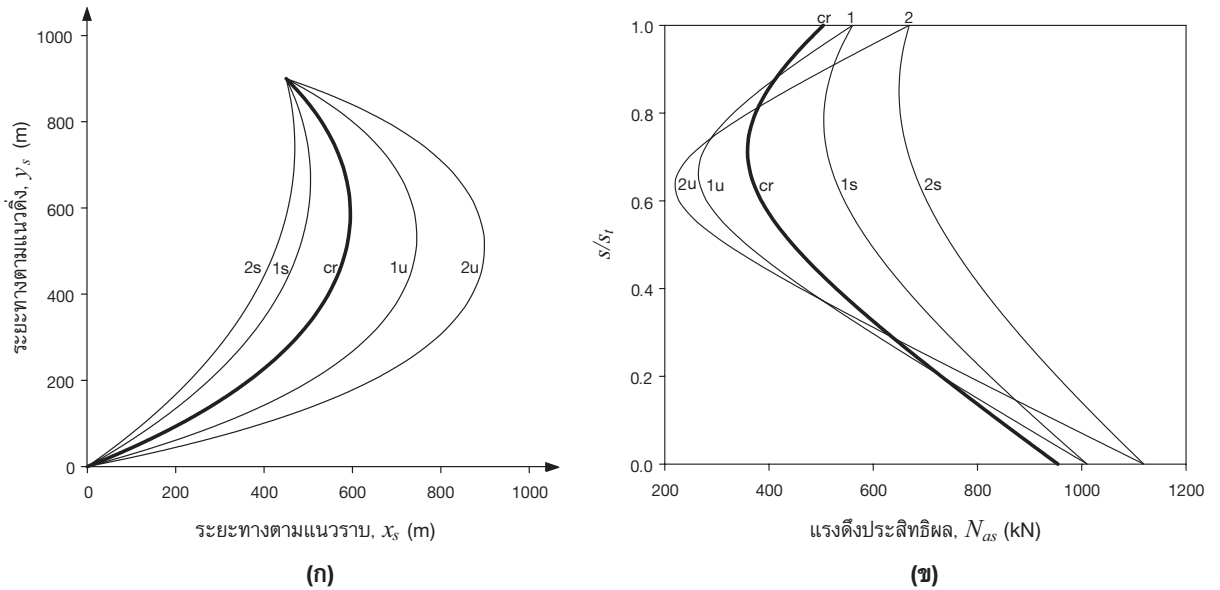
รูปที่ 7 ผลกระทบของความเร็วของไหลภายในท่อต่อแรงดึงวิกฤตที่ปลายบน

- (ก) ความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึงที่ปลายบนกับความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อแบบไร้หน่วย
(ข) ความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึงวิกฤตที่ปลายบนกับความเร็วของไหลภายในท่อ

รูปที่ 7 แสดงผลกระทบเนื่องจากการเพิ่มความเร็วกการไหลของของไหลภายในท่อต่อแรงดึงวิกฤตเมื่อกำหนดให้ความเร็วของไหลภายในท่อ (V_{is}) มีค่าตั้งแต่ 0-30 m/s รูปที่ 7(ก) แสดงให้เห็นว่าความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อแบบไร้มิติ ณ สภาวะวิกฤตมีค่าคงที่เท่ากับ 1.23 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการเพิ่มขึ้นของความเร็วการไหลของของไหลภายในท่อไม่ส่งผลต่อลักษณะการวางตัวของท่อ ณ สภาวะวิกฤต แต่อย่างไรก็ดี ค่าแรงดึงวิกฤตจะเพิ่มขึ้นเมื่อความเร็วการไหลเพิ่มมากขึ้นดังแสดงในรูปที่ 7(ข)

จากการศึกษาผลกระทบของความยาวช่วงของท่อแรงเนื่องจากกระแสน้ำและความเร็วกการไหลของของไหล

ภายในท่อต่อแรงดึงวิกฤตดังแสดงในรูปที่ 4, 6 และ 7 ตามลำดับ จะพบว่าความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของท่อที่สภาวะสมดุลวิกฤตแบบไร้มิติมีค่าเท่ากันคือ 1.23 ซึ่งไม่เปลี่ยนแปลงตามผลกระทบจากพารามิเตอร์ดังกล่าว จึงแสดงให้เห็นว่า ความยาวช่วงของท่อ แรงเนื่องจากกระแสน้ำและความเร็วกการไหลของของไหลภายในท่อไม่ส่งผลต่อลักษณะรูปร่างการวางตัวของท่อที่สภาวะสมดุลวิกฤต กล่าวคือ ท่อจะมีลักษณะรูปร่างการวางตัวที่สภาวะสมดุลวิกฤตแบบเดียวกันถึงแม้ว่าค่าของพารามิเตอร์ทั้งสามจะเปลี่ยนไป แต่ทั้งนี้ผลของพารามิเตอร์ทั้งสามจะทำให้แรงดึงวิกฤตและแรงภายในเพิ่มมากขึ้นเพื่อให้สอดคล้องกับสภาวะสมดุลของท่อ



รูปที่ 8 (ก) การวางตัวของท่อน้ำเลี้ยงของไหลใต้ทะเลแบบสะเทินลอยตัวที่สภาวะสมดุลแบบต่างๆ
 (ข) แรงดึงประสิทธิผลตลอดความยาวส่วนโค้งของท่อ (ตัวอักษร “s”, “u”, “cr” คือสภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพ สมดุลแบบไร้เสถียรภาพและสมดุลวิกฤต ตามลำดับ, ตัวเลข 1-2 คือ $N_{aH} = 560.29$ และ 669.10 kN ตามลำดับ)

รูปที่ 8(ก) แสดงตัวอย่างการวางตัวของท่อน้ำเลี้ยงของไหลใต้ทะเลแบบสะเทินลอยตัว ณ สภาวะสมดุลแบบต่างๆ เส้นโค้ง “cr” คือลักษณะการวางตัวของท่อ ณ สภาวะสมดุลวิกฤตภายใต้แรงดึงวิกฤตที่ปลายบนเท่ากับ 504.19 kN สำหรับเส้นโค้งอื่นๆ คือลักษณะการวางตัวของท่อ ณ สภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพและไม่มีเสถียรภาพภายใต้แรงดึงที่ปลายบนค่าเดียวกัน ซึ่งมีค่ามากกว่าแรงดึงวิกฤต จากรูปที่ 8(ก) ถ้าแรงดึงที่ปลายบนของท่อเท่ากับ 560.29 kN ท่อจะมีลักษณะการวางตัว ณ สภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพและไม่มีเสถียรภาพดังแสดงด้วยเส้นโค้ง “1s” และ “1u” ตามลำดับ ในทำนองเดียวกัน ถ้าแรงดึงที่ปลายบนของท่อเท่ากับ 669.10 kN ลักษณะการวางตัวของท่อ ณ สภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพและไม่มีเสถียรภาพสามารถแสดงได้ด้วยเส้นโค้ง “2s” และ “2u” ตามลำดับ

จากลักษณะการวางตัวของท่อในรูปที่ 8(ก) ลักษณะการกระจายของแรงดึงประสิทธิผล (effective tension) ตลอดความยาวส่วนโค้งของท่อน้ำเลี้ยงของไหลใต้ทะเลแบบสะเทินลอยตัวสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 8(ข) จากรูปจะเห็นว่า ถ้ากำหนดให้แรงดึงที่ปลายบนใน

สภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพเท่ากับแรงดึงที่สภาวะสมดุลแบบไม่มีเสถียรภาพ จะส่งผลทำให้ค่าแรงดึงที่ปลายล่างของสมดุลทั้งสองรูปแบบมีค่าเท่ากันด้วย และค่าแรงดึงประสิทธิผลต่ำสุดจะอยู่ในตำแหน่งที่ s / s_t มีค่าตั้งแต่ 0.6 ถึง 0.8 ซึ่งก็คือตำแหน่งที่ท่อเกิดการเคลื่อนที่มากที่สุด แต่ทั้งนี้ค่าแรงดึงประสิทธิผลที่สภาวะสมดุลแบบไม่มีเสถียรภาพจะน้อยกว่าแรงดึงประสิทธิผลที่สภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพ

5. สรุปผลการศึกษา

งานวิจัยนี้นำเสนอวิธีการหาค่าแรงดึงวิกฤตของท่อน้ำเลี้ยงของไหลใต้ทะเลแบบสะเทินลอยตัว ผลการศึกษาพบว่าแรงดึงวิกฤตที่ปลายบนของท่อคือค่าแรงดึงต่ำสุดที่ทำให้ท่อสามารถอยู่ในสภาวะสมดุลได้ ดังนั้นหากค่าแรงดึงที่ปลายด้านบนมีค่าต่ำกว่าค่าแรงดึงวิกฤตจะทำให้ไม่สามารถหาสภาวะสมดุลของท่อได้ ส่วนกรณีที่แรงดึงที่ปลายบนของท่อมีค่ามากกว่าแรงดึงวิกฤต จะพบว่าสามารถหาสภาวะสมดุลของท่อได้สองรูปแบบได้แก่ สภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพและสภาวะสมดุลแบบไม่มีเสถียรภาพ สภาวะสมดุลของท่อที่มีการเคลื่อนที่น้อยกว่า

จะเป็นสภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพ ส่วนสภาวะสมดุลของท่อที่มีการเคลื่อนที่มากกว่าจะเป็นสภาวะสมดุลแบบไม่มีเสถียรภาพ จากการศึกษาถึงพารามิเตอร์ต่างๆ ที่มีผลต่อค่าแรงดึงวิกฤตที่ปลายบนของท่อ พบว่าการเพิ่มขึ้นของความยาวช่วงระหว่างจุดรองรับทั้งสองส่งผลให้แรงดึงวิกฤตที่ปลายบนของท่อมีค่าเพิ่มขึ้น ในทำนองเดียวกันการเพิ่มขึ้นของแรงกระทำเนื่องจากกระแสน้ำและความเร็วของไหลภายในท่อก็ส่งผลให้แรงดึงวิกฤตที่ปลายบนของท่อมีค่าเพิ่มขึ้นเช่นกัน ส่วนการเพิ่มขึ้นของระยะเยื้องระหว่างจุดรองรับทั้งสองตามแนวราบส่งผลให้ค่าแรงดึงวิกฤตที่ปลายบนของท่อมีค่าลดลง

6. กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยใคร่ขอขอบคุณสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย สำหรับโครงการปริญญาเอกกาญจนาภิเษก (สัญญาเลขที่ PHD/0112/2553) ที่ได้สนับสนุนทุนสำหรับงานวิจัยในครั้งนี้ งานวิจัยสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

7. เอกสารอ้างอิง

1. Felippa C.A. and Chung J.S., 1981, "Nonlinear Static Analysis of Deep Ocean Mining Pipe - Part 1: Modeling and Formulation", *Journal of Energy Resources Technology*. Vol. 103, pp. 11-15.
2. Huang T. and Chucheepsakul S., 1985, "Large Displacement Analysis of a Marine Riser" *Journal of Energy Resources Technology*, Vol. 107, pp. 54-59.
3. McNamara J.F., O'Brien P.J. and Gilrory S.G., 1986, "Nonlinear Analysis of Flexible Risers using Hybrid Finite Elements", *In: Proceedings of the 5th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, pp. 371-377.
4. Chucheepsakul S., 1987, "The Effect of Internal Flow on Marine Risers", *KMUTT Research and Development Journal*, Vol. 1, pp. 2-21.
5. Bernitsas M.M. and Kokarakis J.E., 1988, "Importance of Nonlinearities in Static Riser Analysis", *Applied Ocean Research*, Vol. 10, Issue 1, pp. 2-9.
6. Moe G., and Arntsen ., 2001, "An Analytic Model for Static Analysis of Catenary Risers", *In: Proceedings of the 11th International Offshore and Polar Engineering Conference*, Vol. 2, pp. 248-253.
7. Chai Y.T., Varyani K.S. and Bartrop N.D.P., 2002, "Three-Dimensional Lump-Mass Formulation of a Catenary Riser with Bending, Torsion and Irregular Seabed Interaction Effect", *Ocean Engineering*, Vol. 29, Issue 12, pp. 1503-1525.
8. Chai Y.T. and Varyani K.S., 2006, "An Absolute Coordinate Formulation for Three Dimensional Flexible Pipe Analysis", *Ocean Engineering*, Vol. 33, pp. 23-58.
9. Chatjigeorgiou I.K., 2008, "A Finite Differences Formulation for the Linear and Nonlinear Dynamics of 2D Catenary Risers", *Ocean Engineering*, Vol. 35, Issue 7, pp. 616-636.
10. Hosseini Kordkheili S.A., Bahai H. and Mirtaheri M., 2011, "An Updated Lagrangian Finite Element Formulation for Large Displacement Dynamic Analysis of Three-Dimensional Flexible Riser Structures", *Ocean Engineering*, Vol. 38 Issue 5-6, pp. 793-803.
11. Athisakul C., Monprapussorn T. and Chu-cheepsakul S., 2011, "A Variational Formulation for Three-Dimensional Analysis of Extensible Marine Riser Transporting Fluid", *Ocean Engineering*, Vol. 38, Issue 4, pp. 609-620.
12. Huang T. and Dareing D.W., 1967, "Buckling and Frequencies of Long Vertical Pipes", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 99, Issue 1, pp. 167-181.
13. Huang T. and Dareing D.W., 1968, "Buckling and Lateral Vibration of Drill Pipe" *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 90, pp. 613-619.
14. Bernitsas M.M., 1980, "Riser Top Tension and Riser Buckling Loads", *American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Division*,

AMD, Vol. 37, pp. 101-109.

15. Bernitsas M.M. and Kokkinis T., 1983, "Buckling of Risers in Tension Due to Internal Pressure: Nonmovable Boundaries", *Journal of Energy Resources Technology*, Vol. 105, Issue 3, pp. 277-281.

16. Bernitsas M.M. and Kokkinis T., 1984, "Global Static Instability of Risers", *Journal of Ship Research*, Vol. 28, Issue 4, pp. 261-271.

17. Kokkinis T. and Bernitsas M.M., 1985, "Post-Buckling Analysis of Heavy Columns with Application to Marine Risers", *Journal of Ship Research*, Vol. 29, Issue 3, pp. 162-169.

18. Chucheepsakul S. and Monprapussorn T., 2001, "Nonlinear buckling of marine elastica pipes transporting fluid", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 1, issue 3, pp. 333-365.

19. Chucheepsakul S. and Wang C.M., 1997, "Mechanics of neutrally buoyant cables", *Mechanics Research Communications*, Vol. 24, Issue 6, pp. 603-07.

20. Chucheepsakul S., Huang, T. and Monprapussorn T., 2003, "Large strain formulations of extensible flexible marine pipes transporting fluid", *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 17, Issue 2, pp. 333-365.