การหาค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดของหอกลั่นอย่างง่ายด้วยสมการอันเดอร์วูด: ผลของการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์

ปริตตา ประยูรยงค์*
มหาวิทยาลัยมหิดล 25/25 ถ.พุทธมณฑลสาย 4 ต.ศาลายา อ.พุทธมณฑล จ.นครปฐม 73170

บทคัดย่อ

อัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดเป็นค่าที่มีความสำคัญในการออกแบบหอกลั่น เนื่องจากเป็นค่าที่สามารถนำไปใช้ในการประเมินความต้องการทางพลังงานของหอกลั่น และเป็นค่าที่ทำให้ทราบสภาวะที่เหมาะสมในการดำเนินการหอกลั่น สมการอันเดอร์วูดเป็นวิธีลัดที่นิยมใช้ในการคำนวณอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดของหอกลั่นอย่างง่ายสำหรับสารผสมอุดมคติ เพราะเป็นสมการที่อาศัยการคำนวณที่ไม่ซับซ้อน การใช้สมการนี้จะต้องทราบสัดส่วนโดยโมลของทุกองค์ประกอบในผลิตภัณฑ์ ซึ่งโดยปกติจะไม่ใช่ค่าที่ทราบในการออกแบบเบื้องต้น โดยทั่วไปผู้ออกแบบอาจกำหนดค่านี้ขึ้นเองหรือประมาณด้วยสมการเฟนสกี ซึ่งอาจจะทำให้ค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดที่หาได้จากสมการอันเดอร์วูดมีความคลาดเคลื่อน โดยเฉพาะในกรณีที่มีการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์ บทความนี้กล่าวถึงหลักการหาอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดของสมการอันเดอร์วูดและแสดงผลการศึกษาความแม่นยำของสมการอันเดอร์วูดในกรณีที่มีการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจ รวมทั้งกล่าวถึงวิธีการประเมินการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์

คำสำคัญ : อัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุด / สมการอันเดอร์วูด

* *Corresponding author. Email: paritta.pra@mahidol.ac.th*
อาจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเคมี คณะวิศวกรรมศาสตร์

Determination of Minimum Reflux ratio of Simple Distillation Columns using Underwood's Equation: Influence of non-key Distributions in Products

Paritta Prayoonyong*

Mahidol University, 25/25 Puttamonthon Sai 4 Road, Salaya, Puttamonthon, Nakorn Pathom 73170

Abstract

Minimum reflux ratio is an important parameter in distillation column design. It can be used for evaluating a column in terms of energy demands and determining the optimum operating conditions. Underwood's equation is a shortcut method that is commonly used for determining the minimum reflux ratio of simple columns separating ideal mixtures. Underwood's equation is widely used because it requires simple calculations. To apply the equation, the mole fractions of all components in the products must be specified; unfortunately, at the preliminary stage of column design, the distributions of other components besides the key components are unknown. Those values may be specified arbitrarily or estimated by using Fenske's equation. However, specifying arbitrarily or estimating the distributions of other components using the Fenske's equation may lead to an inaccuracy of the minimum reflux ratio estimation by Underwood's equation, particularly for cases with high distribution of non-key components in products. In this article, the principle of Underwood's method is reviewed. The effect of the distribution of non-key components in products on the accuracy of Underwood's equation is demonstrated. In addition, this article presents a method for evaluating the distribution of non-key components in products.

Keywords : Minimum reflux ratio / Underwood's equation

* *Corresponding author. Email: paritta.pra@mahidol.ac.th*

Lecturer, Department of Chemical Engineering, Faculty of Engineering.

1. บทนำ

หอกลั่นเป็นเครื่องมือแยกสารที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในอุตสาหกรรมเคมี แต่หอกลั่นเป็นเครื่องมือที่มีความต้องการพลังงานในการดำเนินการสูง การออกแบบหอกลั่นจึงมีความสำคัญเพื่อให้ได้หอกลั่นที่มีต้นทุนและการสิ้นเปลืองพลังงานน้อยที่สุด ในการออกแบบระบบการกลั่นสำหรับการแยกสารผสมหนึ่งๆ อาจมีทางเลือกของกระบวนการกลั่นได้หลายทาง ผู้ออกแบบจะต้องเลือกทางเลือกที่มีความเป็นไปได้ทั้งทางปฏิบัติและทางเศรษฐศาสตร์ การประเมินทางเศรษฐศาสตร์โดยการคำนวณต้นทุนและค่าใช้จ่ายในการดำเนินการของหอกลั่นอย่างละเอียดเป็นขั้นตอนที่ต้องอาศัยข้อมูลและเวลาเป็นอย่างมาก การเปรียบเทียบแต่ละทางเลือกโดยอาศัยการประเมินทางเศรษฐศาสตร์จึงเป็นวิธีการที่ใช้เวลามากเพื่อให้สามารถตัดทางเลือกที่ไม่เหมาะสมออกและทำให้การออกแบบในขั้นต้นเป็นไปอย่างรวดเร็ว ผู้ออกแบบอาจพิจารณาจากอัตราการไหลของไอภายในหอกลั่น [1] เนื่องจากอัตราการไหลของไอเป็นตัวแปรที่บ่งบอกถึงต้นทุนและความต้องการพลังงานของหอกลั่นได้ หากอัตราการไหลของไอสูงหอกลั่นจะมีขนาดใหญ่และใช้พลังงานของหม้อต้มซ้ำ (reboiler) และเครื่องควบแน่นมาก ดังนั้นในการคัดกรองทางเลือกของกระบวนการกลั่นจึงทำได้โดยพิจารณาเลือกทางเลือกที่มีอัตราการไหลของไอรวมของทุกหอกลั่นน้อยที่สุด

อัตราการไหลของไอต่ำสุดในหอกลั่นสามารถคำนวณได้จากอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุด (minimum reflux ratio, R_{min}) การดำเนินการหอกลั่นที่ภาวะป้อนกลับต่ำสุดเป็นภาวะที่หอกลั่นต้องใช้ชั้นสมดุล (equilibrium stage) เป็นจำนวนอนันต์ในการแยกสารที่ต้องการ หากใช้อัตราส่วนป้อนกลับน้อยกว่าค่าต่ำสุดจะทำให้การแยกที่ต้องการเป็นไปไม่ได้ถึงแม้ว่าจะเพิ่มจำนวนชั้นมากขึ้นเท่าใดก็ตาม ที่ภาวะป้อนกลับต่ำสุดจะมีอย่างน้อยบริเวณหนึ่งของหอกลั่นที่มีชั้นสมดุลจำนวนมากแต่แทบจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของสารระหว่างแต่ละชั้นสมดุล บริเวณนี้เรียกว่าจุดพินช์ (pinch point หรือ pinch zone) โดยปกติแล้วจุดพินช์อยู่บริเวณที่สายป้อนเข้าสู่หอกลั่น เช่น ในการแยกสารผสมอุดมคติสององค์ประกอบ แต่จำนวนจุดพินช์อาจเพิ่มขึ้นเมื่อมีจำนวนองค์ประกอบในสารผสมมากกว่าสองชนิด โดยตำแหน่งของพินช์ที่ไม่ได้อยู่ที่ชั้นของสายป้อนนั้นขึ้นอยู่กับความสมบูรณ์ในการแยกสารที่ต้องการออกจากองค์ประกอบอื่นๆ เช่น ในการแยกสารผสมสามองค์ประกอบ หากทุกองค์ประกอบในสายป้อนกระจายตัวอยู่ในผลิตภัณฑ์ทั้งสองของหอกลั่นจะมีพินช์เพียงจุดเดียวอยู่บริเวณตำแหน่งของสายป้อน แต่ถ้าหอกลั่นแยกสารที่เบาที่สุดออกไปที่ผลิตภัณฑ์ยอดหอด้วยความบริสุทธิ์สูงจะมีพินช์เกิดขึ้นสองจุด จุดหนึ่งอยู่ที่ชั้นของสายป้อน ส่วนอีกจุดหนึ่งอยู่ระหว่างชั้นของสายป้อนและผลิตภัณฑ์ยอดหอ

การดำเนินการหอกลั่นที่อัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดไม่มีทางเป็นไปได้ในทางปฏิบัติ แต่อัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดเป็นค่าที่มีความสำคัญต่อการออกแบบหอกลั่น เนื่องจากทำให้ผู้ออกแบบทราบค่าขอบเขตขั้นต่ำของอัตราส่วนป้อนกลับ และนำไปหาจำนวนชั้นและอัตราส่วนป้อนกลับของหอกลั่นที่เหมาะสมได้ ซึ่งโดยทั่วไปจะกำหนดให้อัตราส่วนป้อนกลับในการดำเนินการอยู่ระหว่าง 1.1 ถึง 1.5 เท่าของอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุด

การหาอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดควรจะอาศัยการคำนวณที่ไม่ซับซ้อนและได้คำตอบที่แม่นยำเพื่อให้การออกแบบหอกลั่นรวมถึงกระบวนการกลั่นเป็นไปอย่างรวดเร็ว ด้วยเหตุนี้จึงได้มีผู้ที่พัฒนาระเบียบวิธีในการคำนวณหาอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดขึ้นมา ซึ่งวิธีที่เป็นที่นิยมอย่างกว้างขวางมาจนถึงปัจจุบันและนิยมใช้ในโปรแกรมจำลองกระบวนการด้วย ได้แก่ สมการของอันเดอร์วูด (Underwood's equation) [2-5] ซึ่งเป็นสมการสำหรับหาค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดของหอกลั่นอย่างง่ายที่มีหนึ่งสายป้อนและสองผลิตภัณฑ์ (simple column) ที่ใช้ในการแยกสารผสมอุดมคติหลายองค์ประกอบ วิธีของอันเดอร์วูดอาศัยการคำนวณไม่ยุ่งยากและหาคำตอบได้รวดเร็ว แต่มีข้อจำกัดอันเนื่องมาจากสมมติฐานสำคัญสองข้อ ได้แก่ ค่าการระเหยสัมพัทธ์ของสารคงที่ และอัตราการไหลของไอและของเหลวภายในหอกลั่นคงที่ตลอดทั้งหอ (constant molar overflow) สมการอันเดอร์วูดจึงให้คำตอบที่แม่นยำพอสมควรสำหรับระบบที่เป็นอุดมคติ [6]

ในการหาค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดด้วยสมการอันเดอร์วูดสำหรับการแยกหนึ่งๆ นอกจากจะต้องทราบ

สถานะและสัดส่วนองค์ประกอบของสายป้อนแล้ว จะต้องทราบสัดส่วนโดยโมลของทุกองค์ประกอบในผลิตภัณฑ์ยอดหอ แต่โดยทั่วไปในการออกแบบหอกลั่นในขั้นต้นจะมีการกำหนดความต้องการ (specification) เพียงคร่าวๆ โดยเป็นความต้องการที่เกี่ยวข้องกับองค์ประกอบสองชนิดที่ต้องการแยกออกจากกัน หรือเรียกว่าองค์ประกอบกุญแจ (key component) เช่น กำหนดความบริสุทธิ์หรือการดึงกลับ (recovery) ขององค์ประกอบกุญแจเบาและหนัก (light and heavy key components) แต่มักจะไม่กำหนดสัดส่วนโดยโมลขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจ (nonkey) ในผลิตภัณฑ์ จากการศึกษาเกี่ยวกับการกำหนดสัดส่วนโดยโมลหรือการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจเพื่อหาอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดด้วยสมการอันเดอร์วูด พบว่า หนังสือเกี่ยวกับการออกแบบกระบวนการเคมีบางเล่มแนะนำให้กำหนดสัดส่วนโดยโมลขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจต่างๆ ขึ้นมาเอง [1] โดยพิจารณาจากความสามารถในการระเหยขององค์ประกอบนั้นว่ามากหรือน้อยกว่าองค์ประกอบกุญแจ เช่น กำหนดให้สารที่เบากว่าองค์ประกอบกุญแจเบาไปอยู่ในผลิตภัณฑ์ยอดหอทั้งหมด ส่วนสารที่หนักกว่าองค์ประกอบกุญแจหนักก็ให้อยู่ในผลิตภัณฑ์ก้นหอทั้งหมด [7] การกำหนดสัดส่วนองค์ประกอบเช่นนี้ไม่ได้คำนึงถึงความเป็นไปได้ของการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์ ในขณะที่หนังสือส่วนใหญ่แนะนำให้ประมาณสัดส่วนองค์ประกอบของผลิตภัณฑ์ยอดหอด้วยสมการของเฟนสกี (Fenske's equation) [7-13] เนื่องจากในการออกแบบหอกลั่นจะมีการหาจำนวนชั้นสมดุลน้อยสุดด้วยสมการนี้อยู่แล้ว ซึ่งวิธีนี้ประมาณการกระจายตัวขององค์ประกอบต่างๆ ในผลิตภัณฑ์โดยพิจารณาจากความสามารถในการระเหยของสารด้วย แต่ค่าที่ได้นั้นเป็นสัดส่วนองค์ประกอบของผลิตภัณฑ์ยอดหอที่ดำเนินการด้วยภาวะป้อนกลับหมด (total reflux) อย่างไรก็ตาม หนังสือเกี่ยวกับการออกแบบกระบวนการเคมีทั่วไปจะไม่ได้กล่าวถึงผลของการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์ที่มีต่อความแม่นยำของสมการอันเดอร์วูด ยกเว้นหนังสือที่เกี่ยวกับระบบกลั่นในเชิงลึก เช่น หนังสือของ Kister [6] และ Seader และ Henley [12]

ด้วยการคำนวณที่ไม่ซับซ้อนมากนักของสมการอันเดอร์วูด สมการนี้จึงมักจะถูกใช้โดยไม่ได้มีการคำนึงข้อจำกัดของสมการ ในบทความนี้กล่าวถึงหลักการหาอัตราการส่วนป้อนกลับต่ำสุดด้วยสมการอันเดอร์วูดและจะใช้แผนภาพรูปสามเหลี่ยมแสดงตัวอย่างการแยกสารผสมสามองค์ประกอบเพื่อให้ผู้อ่านได้เข้าใจถึงระเบียบวิธีของอันเดอร์วูดและประยุกต์ใช้สมการได้อย่างถูกต้องมากขึ้น บทความนี้แสดงให้เห็นถึงผลกระทบของการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์ของหอกลั่นที่มีต่อความแม่นยำของสมการอันเดอร์วูด และกล่าวถึงการประเมินความเป็นไปได้ในการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์ด้วย

2. หลักการคำนวณหาอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดของสมการอันเดอร์วูด

การหาค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดด้วยวิธีของอันเดอร์วูดอาศัยการคำนวณที่ไม่ยุ่งยาก แต่สมการที่ลัดสั้นของอันเดอร์วูดนั้นได้มาจากการพัฒนาสมการที่ค่อนข้างซับซ้อน ซึ่งสรุปโดยย่อได้ดังนี้

การหาค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดของสมการอันเดอร์วูดมีหลักการพื้นฐานอยู่ที่การหาจุดพินช์ของส่วนเรคติฟายอิง (rectifying section) และส่วนสตริพพิง (stripping section) ของหอกลั่นที่ดำเนินการด้วยภาวะป้อนกลับต่ำสุด สมการอันเดอร์วูดพัฒนาขึ้นมาจากสมดุลมวลสารรอบส่วนเรคติฟายอิงและส่วนสตริพพิงที่มีพินช์เกิดขึ้น และสมการสมดุลวัฏภาค (equilibrium relation) โดยมีสมมติฐานว่าค่าการระเหยสัมพัทธ์ของสารคงที่ (ความสัมพันธ์ของสมดุลระหว่างเฟสไอ-ของเหลวเป็น $y_j = \alpha_j x_j \Big/ \sum_{i=1}^{C} \alpha_i x_i$ เมื่อ j เป็นองค์ประกอบใดๆ ในสารผสม, α_j เป็นค่าการระเหยสัมพัทธ์ขององค์ประกอบ j เทียบกับองค์ประกอบที่หนักที่สุดในสารผสม และ C เป็นจำนวนองค์ประกอบ) และ อัตราการไหลของไอและของเหลวภายในหอกลั่นคงที่ตลอดทั้งหอ [2-5]

สำหรับส่วนเรคติฟายอิง สมการสมดุลมวลสารขององค์ประกอบ j ตั้งแต่ผลิตภัณฑ์ยอดหอถึงชั้นที่ n สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (1)

$$\frac{\alpha_j x_{n,j}}{\sum_{i=1}^{C}\alpha_i x_{n,i}} = \frac{R}{R+1}x_{n+1,j} + \frac{x_{D,j}}{R+1} \quad \textbf{(1)}$$

Underwood [2,3] ได้กำหนดพารามิเตอร์ ϕ โดยมีนิยามดังสมการที่ (1)

$$\sum_{i=1}^{C}\frac{\alpha_i x_{D,i}}{\alpha_i - \phi} = R+1 \quad \textbf{(2)}$$

พารามิเตอร์ ϕ ตามนิยามในสมการที่ (2) ถูกแทนลงในสมการที่ (1) โดยเริ่มต้นด้วยการคูณสมการที่ (1) ด้วย $\alpha_j/(\alpha_j - \phi)$ เมื่อ j = 1, 2, ..., C แล้วนำสมการที่เขียนได้สำหรับแต่ละองค์ประกอบมารวมกันจะได้

$$\frac{\sum_{i=1}^{C}\frac{\alpha_i^2 x_{n,i}}{\alpha_i - \phi}}{\sum_{i=1}^{C}\alpha_i x_{n,i}} = \frac{R}{R+1}\sum_{i=1}^{C}\frac{\alpha_i x_{n+1,i}}{\alpha_i - \phi} + \frac{1}{R+1}\sum_{i=1}^{C}\frac{\alpha_i x_{D,i}}{\alpha_i - \phi} \quad \textbf{(3)}$$

จากนั้นแทนสมการที่ (2) ลงในสมการที่ (3) และจัดรูปสมการจะได้

$$\frac{\phi\sum_{i=1}^{C}\frac{\alpha_i x_{n,i}}{\alpha_i - \phi}}{\sum_{i=1}^{C}\alpha_i x_{n,i}} = \frac{R}{R+1}\sum_{i=1}^{C}\frac{\alpha_i x_{n+1,i}}{\alpha_i - \phi} \quad \textbf{(4)}$$

เนื่องจากมีพินช์เกิดขึ้นที่ภาวะป้อนกลับต่ำสุด ชั้นสมดุลที่อยู่ติดกันในบริเวณพินช์จะมีสัดส่วนองค์ประกอบที่เท่ากันทั้งในเฟสไอและของเหลว ดังนั้น $x_{nj} = x_{n+1,j} = \hat{x}_j$ เมื่อ $\hat{x}_j$ หมายถึงสัดส่วนโดยโมลขององค์ประกอบ j ที่จุดพินช์ในส่วนเรคติฟายอิงที่ภาวะป้อนกลับต่ำสุด สมการที่ (4) จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\phi = \frac{R_{\min}}{R_{\min}+1}\sum_{i=1}^{C}\alpha_i \hat{x}_i \quad \textbf{(5)}$$

เมื่อเขียนสมการสมดุลมวลสารขององค์ประกอบ j รอบส่วนเรคติฟายอิง (สมการที่ 1) ตั้งแต่ผลิตภัณฑ์ยอดหอถึงบริเวณจุดพินช์ โดยให้ $x_{nj} = x_{n+1,j} = \hat{x}_j$ และแทนค่า ϕ จากสมการที่ (5) ลงไปจะได้ความสัมพันธ์ของสัดส่วนองค์ประกอบของจุดพินช์กับผลิตภัณฑ์ยอดหอและ ϕ ที่ภาวะป้อนกลับต่ำสุด ดังสมการที่ (6)

$$\hat{x}_j = \frac{\phi x_{D,j}}{R_{\min}(\alpha_j - \phi)} \quad \textbf{(6)}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับส่วนสตริพพิง (stripping section) ของหอกลั่น Underwood [2,3] ได้กำหนดพารามิเตอร์ ψ โดยมีนิยามตามสมการที่ (7)

$$\sum_{i=1}^{C}\frac{\alpha_i x_{B,i}}{\alpha_i - \psi} = -S \quad \textbf{(7)}$$

เมื่อ S เป็นอัตราส่วนต้มซ้ำ (reboil ratio)

ในทำนองเดียวกันกับส่วนเรคติฟายอิง สามารถเขียนสมการสมดุลมวลของแต่ละองค์ประกอบรอบส่วนสตริพพิงตั้งแต่ผลิตภัณฑ์ก้นหอถึงบริเวณที่เกิดพินช์ได้ โดยจะได้ความสัมพันธ์ของสัดส่วนองค์ประกอบของจุดพินช์กับผลิตภัณฑ์ก้นหอและ ψ ที่ภาวะป้อนกลับต่ำสุด ดังสมการที่ (8)

$$\tilde{x}_j = -\frac{\psi x_{B,j}}{(S_{\min}+1)(\alpha_j - \psi)} \quad \textbf{(8)}$$

เมื่อ $\tilde{\mathbf{x}}$ เป็นสัดส่วนองค์ประกอบของจุดพินช์ในส่วนสตริพพิง

จำนวนจุดพินช์ในแต่ละส่วนของหอกลั่นนั้นขึ้นอยู่กับจำนวนองค์ประกอบเช่นเดียวกับจำนวนพารามิเตอร์ ϕ และ ψ เมื่อกำหนดสัดส่วนองค์ประกอบของผลิตภัณฑ์ยอดหอและก้นหอ ($\mathbf{x}_D$ และ $\mathbf{x}_B$) ค่าอัตราส่วนป้อนกลับ (R) และอัตราส่วนต้มซ้ำ (S) จะสามารถหาค่าพารามิเตอร์ ϕ และ ψ ได้จากสมการที่ (2) และ (7) และทำให้หาจุดพินช์ของแต่ละส่วนได้จากสมการที่ (6) และ (8) ทั้งนี้ ค่าของ ϕ และ ψ แต่ละค่าจะอยู่ระหว่างค่าการระเหยสัมพัทธ์ของแต่ละองค์ประกอบ ดังนี้

$$\alpha_1 > \phi_1 > \alpha_2 > \phi_2 > \alpha_3 > \ldots > \alpha_C > \phi_C > 0 > \infty > \psi_1 > \alpha_1 > \psi_2 > \alpha_2 > \ldots > \psi_C > \alpha_C$$

จุดพินช์บางจุดที่คำนวณได้จากสมการที่ (6) และ (8) อาจจะมีสัดส่วนองค์ประกอบที่เป็นไปไม่ได้และไม่มีความหมายในทางทฤษฎี อย่างไรก็ตาม จุดพินช์ทั้งหมดมีความสำคัญในการหาค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดด้วยสมการอันเดอร์วูดดังจะแสดงต่อไป

Underwood [3,4] ได้พิสูจน์ว่าเมื่อหอกลั่นดำเนินการที่ภาวะป้อนกลับต่ำสุด ค่า ϕ ค่าหนึ่งจะมีค่าเท่ากับ ψ ค่าหนึ่ง ซึ่งแทนด้วย θ โดยค่า θ นี้จะมีค่าอยู่ระหว่างความสามารถในการระเหยขององค์ประกอบกุญแจเบาและกุญแจหนัก ดังนั้นเงื่อนไขที่ภาวะป้อนกลับต่ำสุดคือ

$$\phi_N = \psi_{N+1} = \theta \qquad \textbf{(9)}$$

เมื่อ N และ N+1 หมายถึง องค์ประกอบกุญแจเบาและกุญแจหนัก ตามลำดับ สมการที่ (2) และ (7) จึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ θ ได้ดังนี้ [3,4]

สำหรับส่วนเรคติฟายอิง

$$\sum_{i=1}^{C} \frac{\alpha_i x_{D,i}}{\alpha_i - \theta} = R_{\min} + 1 \qquad \textbf{(10)}$$

สำหรับส่วนสตริพพิง

$$\sum_{i=1}^{C} \frac{\alpha_i x_{B,i}}{\alpha_i - \theta} = -S_{\min} \qquad \textbf{(11)}$$

สมการที่ (10) และ (11) สามารถรวมกันได้โดยอาศัยสมดุลมวลสารรอบหอกลั่น (สมการที่ 12) และความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนป้อนกลับและอัตราส่วนต้มซ้ำ (สมการที่ 13) ได้เป็นสมการที่ (14)

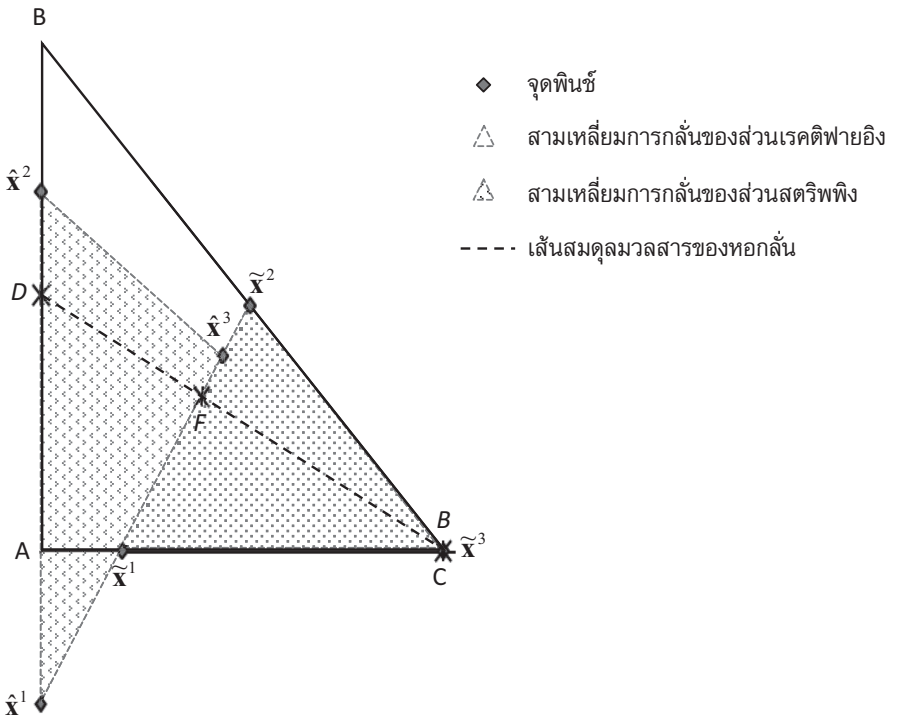
$$x_{F,j} F = x_{D,j} D + x_{B,j} B \qquad \textbf{(12)}$$

$$S = (R+q)\left(\frac{x_{B,j} - x_{F,j}}{x_{F,j} - x_{D,j}}\right) + q - 1 \qquad \textbf{(13)}$$

$$\sum_{i=1}^{C} \frac{\alpha_i x_{F,i}}{\alpha_i - \theta} = 1 - q \qquad \textbf{(14)}$$

การหาค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดสำหรับสายป้อนที่มีสัดส่วนองค์ประกอบและสถานะหนึ่งๆ ทำได้โดยการหาค่า θ จากสมการที่ (14) ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่างค่าการระเหยสัมพัทธ์ขององค์ประกอบกุญแจเบาและหนัก แล้วจึงนำค่า θ ที่ได้ไปแทนลงในสมการที่ (10) พร้อมทั้งกำหนดความต้องการของการแยกโดยกำหนดสัดส่วนองค์ประกอบของผลิตภัณฑ์ยอดหอ ก็จะได้ค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุด

หลักการหาค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดของวิธีอันเดอร์วูดสำหรับหอกลั่นที่ใช้แยกสารผสมไม่เกินสามองค์ประกอบสามารถแสดงได้ด้วยแผนภาพสามเหลี่ยม [14,15] แผนภาพสามเหลี่ยมเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์ในการทำความเข้าใจและออกแบบหอกลั่นและกระบวนการกลั่นสำหรับสารผสมสามองค์ประกอบ รูปที่ 1 แสดงแผนภาพสามเหลี่ยมสำหรับสารผสมอุดมคติ A, B และ C แต่ละมุมของสามเหลี่ยมหมายถึงสารบริสุทธิ์ แต่ละจุดบนด้านของสามเหลี่ยมแสดงสัดส่วนองค์ประกอบ (โดยโมล) ของสารผสมสององค์ประกอบที่อยู่ที่ปลายของด้านนั้น จุดหนึ่งๆ ภายในสามเหลี่ยมแสดงสัดส่วนองค์ประกอบของสารผสมสามองค์ประกอบ สมมติให้หอกลั่นหอหนึ่งใช้ในการแยกสาร C ซึ่งเป็นสารที่หนักที่สุดออกที่ด้านล่างของหอ เรียกการแยกแบบนี้ว่าการแยกแบบอ้อม (indirect split) กำหนดสัดส่วนองค์ประกอบของสายป้อน ผลิตภัณฑ์ก้นหอและยอดหอดังแสดงในรูปที่ 1 ด้วยจุด F, B และ D ตามลำดับ จุดทั้งสามนี้อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (เส้นประในรูปที่ 1) เนื่องมาจากสมดุลมวลสารรอบหอกลั่น การหาค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดด้วยวิธีของอันเดอร์วูดเป็นการหาจุดพินช์ทั้งหมดของส่วนเรคติฟายอิงและสตริพพิง ซึ่งสำหรับสารผสมสามองค์ประกอบนั้น แต่ละส่วนของหอจะมีจุดพินช์อย่างละสามจุด เมื่อแสดงจุดพินช์ของแต่ละส่วนในรูปสามเหลี่ยม จุดพินช์ของแต่ละส่วนนั้นจะสามารถประกอบกันขึ้นเป็นสามเหลี่ยมเรียกว่าสามเหลี่ยมการกลั่น (distillation triangle) [15] ค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดที่หาได้จากสมการอันเดอร์วูดเป็นค่าที่ทำให้สามเหลี่ยมการกลั่นของส่วนเรคติฟายอิงและส่วนสตริพพิงสัมผัสกันพอดีโดยที่จุดพินช์สองจุดของส่วนเรคติฟายอิง $\hat{\mathbf{x}}^1$ และ $\hat{\mathbf{x}}^3$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกับจุดพินช์สองจุดของส่วนสตริพพิง $\tilde{\mathbf{x}}^1$ และ $\tilde{\mathbf{x}}^2$ (ดังรูปที่ 1) เมื่อ $\hat{\mathbf{x}}^k$ และ $\tilde{\mathbf{x}}^k$ เป็นจุดพินช์ของส่วนเรคติฟายอิงและสตริพพิงที่สัมพันธ์กับพารามิเตอร์ ϕ_k และ ψ_k ตามลำดับ



รูปที่ 1 แผนภาพสามเหลี่ยมแสดงจุดพินช์ของส่วนเรคติฟายอิงและสตริพพิงที่ภาวะป้อนกลับต่ำสุดสำหรับการแยกสารผสมอุดมคติสามองค์ประกอบด้วยการแยกแบบอ้อม

3. ผลของการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์

ในส่วนนี้จะแสดงตัวอย่างการประยุกต์ใช้สมการอันเดอร์วูดในการหาค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดของหอกลั่นที่ใช้แยกสารผสมอุดมคติสามองค์ประกอบ ได้แก่ บิวเทน (*C4*) เพนเทน (*C5*) และเฮกเซน (*C6*) ที่มีสัดส่วนโดยโมลของแต่ละองค์ประกอบเป็น 0.35, 0.35 และ 0.3 ตามลำดับ กำหนดให้สารผสมดังกล่าวเป็นของเหลวอิ่มตัวและมีอัตราการไหล 100 กิโลโมลต่อชั่วโมง ค่าการระเหยสัมพัทธ์ของ *C4* และ *C5* เทียบกับ *C6* เป็น 3.09, 1.75 และ 1.00 ตามลำดับ ในตัวอย่างนี้จะแสดงผลของการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์ที่มีต่อความแม่นยำของค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุด โดยศึกษาการแยก 3 กรณีดังต่อไปนี้

1. การแยกแบบตรง (direct split) เป็นการแยกที่องค์ประกอบที่เบาที่สุดออกเป็นผลิตภัณฑ์ยอดหอ ดังนั้น *C4* จึงเป็นองค์ประกอบกุญแจเบา (*LK*) และ *C5* เป็นองค์ประกอบกุญแจหนัก (*HK*) ส่วน *C6* เป็นองค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจที่หนักกว่ากุญแจหนัก (heavier than heavy key)

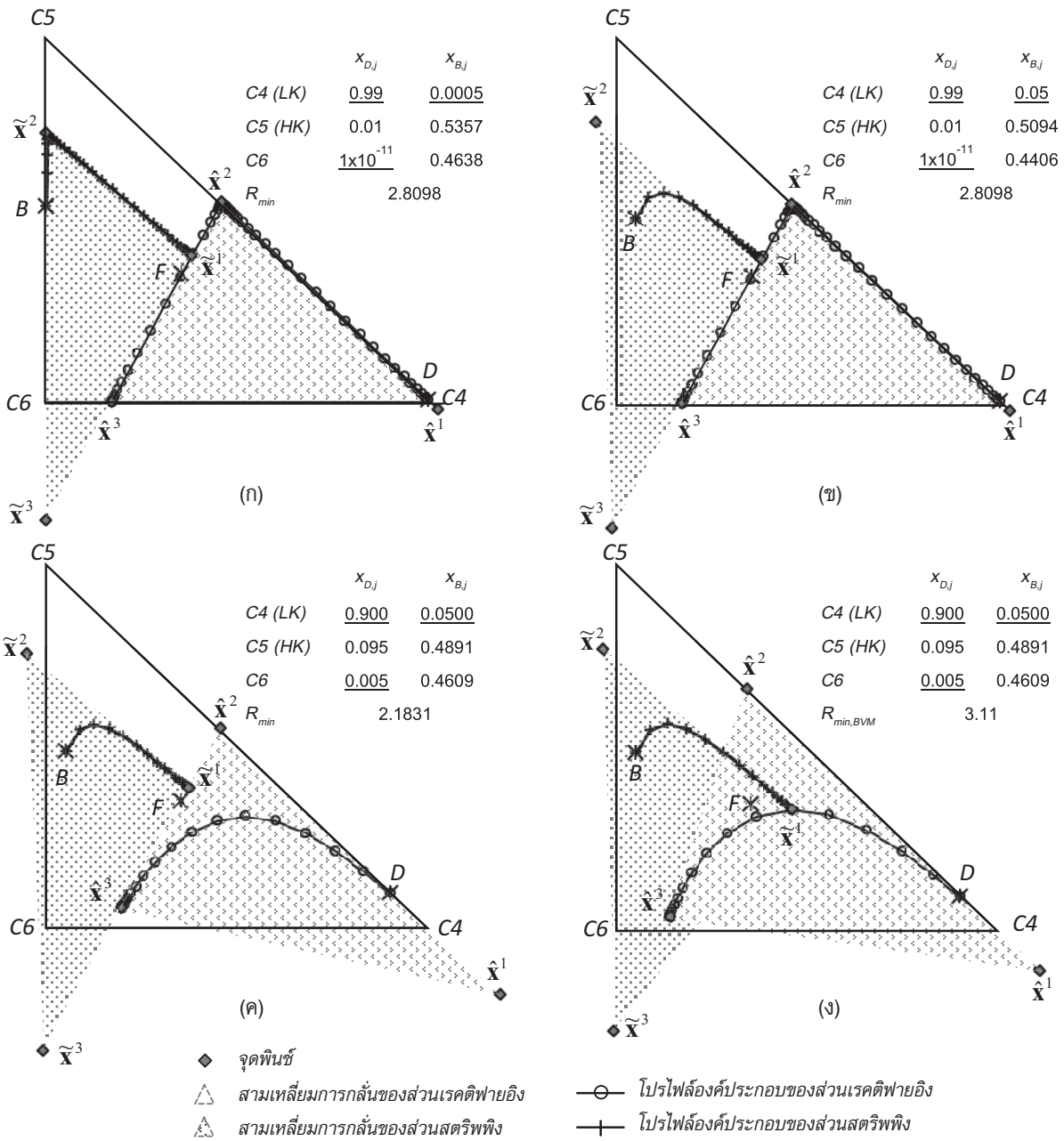
2. การแยกแบบอ้อม (indirect split) เป็นการแยกองค์ประกอบหนักสุดของระบบเป็นผลิตภัณฑ์ก้นหอ นั่นคือ *C6* เป็นองค์ประกอบกุญแจหนัก ส่วน *C5* เป็นกุญแจเบา และ *C4* เป็นองค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจที่เบากว่ากุญแจเบา (lighter than light key)

3. การแยกแบบทรานสิชัน (transition split) ในการแยกแบบนี้องค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจที่มีความสามารถในการระเหยอยู่ระหว่างองค์ประกอบกุญแจเบาและหนักจะกระจายตัวอยู่ในทั้งผลิตภัณฑ์ยอดหอและก้นหอ นั่นคือ *C4* เป็นองค์ประกอบกุญแจเบา และ *C6* เป็นกุญแจหนัก ส่วน *C5* เป็นองค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจที่มีความสามารถในการระเหยอยู่ระหว่างกุญแจเบาและหนัก (intermediate non-key)

จากสัดส่วนองค์ประกอบและสถานะของสายป้อนทำให้สามารถหาค่า θ ได้จากสมการที่ (14) แต่ก่อนจะนำ

ค่า θ ที่ได้นี้ไปหาค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดด้วยสมการที่ (10) จะต้องทราบสัดส่วนโดยโมลของทุกองค์ประกอบในผลิตภัณฑ์ยอดหอ โดยการกำหนดความต้องการของการแยกด้วยการกำหนดความบริสุทธิ์หรือเปอร์เซนต์การดึงกลับขององค์ประกอบกุญแจเบาและกุญแจหนักในผลิตภัณฑ์ยอดหอหรือก้นหอ สำหรับสัดส่วนโดยโมลขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์อาจหาจากสมการของเฟนสกีหรือกำหนดขึ้นมาจนทำให้สามารถทำสมดุลมวลสารรอบหอได้ ในตัวอย่างนี้ได้กำหนดสัดส่วนโดยโมลขององค์ประกอบกุญแจเบาและกุญแจหนักในผลิตภัณฑ์ยอดหอและก้นหอตามชนิดของการแยกที่ศึกษา และกำหนดสัดส่วนโดยโมลขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์ใดผลิตภัณฑ์หนึ่งก็จะทำสมดุลมวลสารรอบหอกลั่นได้ ทั้งนี้เพื่อให้เห็นถึงผลกระทบจากการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์ตัวอย่างนี้ได้ทำการหาค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดเมื่อมีการกำหนดสัดส่วนโดยโมลขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจแตกต่างกัน รวมทั้งศึกษาผลที่เกิดขึ้นเมื่อมีการดึงกลับขององค์ประกอบกุญแจในผลิตภัณฑ์ต่ำ

ผลการศึกษาสำหรับการแยกแต่ละกรณีแสดงดังรูปที่ 2-4 (สัดส่วนโดยโมลขององค์ประกอบในผลิตภัณฑ์ยอดหอและก้นหอที่กำหนดและคำนวณที่ได้จากสมดุลมวลสารรอบหอกลั่นสำหรับแต่ละกรณีแสดงอยู่ในรูปดังกล่าวด้วย) ซึ่งเป็นแผนภาพสามเหลี่ยมที่แสดงจุดพินช์ของส่วนเรคติฟายอิงและสตริพพิงที่ค่า R_{min} ที่หาจากสมการอันเดอร์วูด นอกจากนี้ในแผนภาพยังได้แสดงโปรไฟล์องค์ประกอบ (composition profile) ของแต่ละส่วนของหอกลั่นด้วยซึ่งสร้างจากสมดุลมวลสารรอบแต่ละส่วนของหอกลั่นควบคู่กับสมการสมดุลระหว่างเฟสที่ค่า R_{min} ที่ได้จากสมการอันเดอร์วูด โปรไฟล์องค์ประกอบแสดงสัดส่วนองค์ประกอบของของเหลวในแต่ละชั้นสมดุล การสัมผัสหรือตัดกันระหว่างโปรไฟล์ของส่วนเรคติฟายอิงและสตริพพิงแสดงให้เห็นถึงความเป็นไปได้ของการแยกผลิตภัณฑ์ที่กำหนดขึ้นที่อัตราส่วนป้อนกลับนั้น ซึ่งวิธีการหาค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดโดยการสร้างโปรไฟล์องค์ประกอบของแต่ละส่วนของหอกลั่นที่ค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่างๆ จนได้ค่าที่น้อยที่สุดที่ทำให้โปรไฟล์ของแต่ละส่วนของหอกลั่นสัมผัสกันเป็นวิธีของ Levy และคณะ [14] เรียกว่าวิธีค่าขอบเขต (boundary value method, BVM)

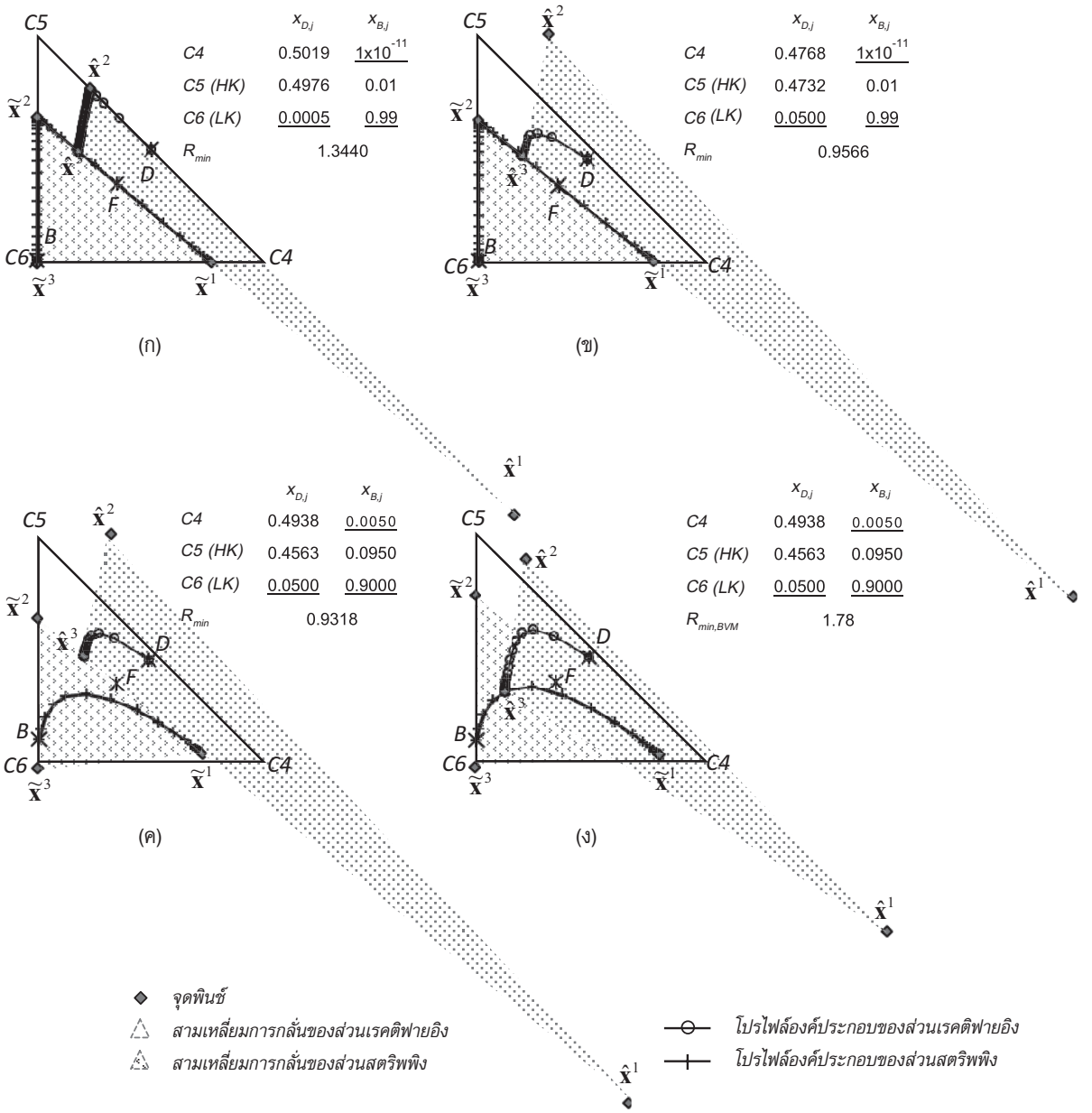


รูปที่ 2 จุดพินช์และโปรไฟล์องค์ประกอบสำหรับการแยกสารผสม *C5*, *C6* และ *C7* แบบตรง (ก) ความบริสุทธิ์ของ *C4* ในยอดหอสูง, (ข) ความบริสุทธิ์ของ *C4* ในยอดหอสูงแต่มีการดึงกลับ *C4* ในผลิตภัณฑ์ยอดหอต่ำ และ (ค) ความบริสุทธิ์ของ *C4* ไม่สูงมาก ที่ R_{min} จากสมการอันเดอร์วูด, และ (ง) ความบริสุทธิ์ของ *C4* ไม่สูงมาก ที่ R_{min} จากวิธีค่าขอบเขต (BVM) (สัดส่วนโดยโมลที่ขีดเส้นใต้เป็นค่าที่กำหนด)

สำหรับการแยกแบบตรง เมื่อเปรียบเทียบรูปที่ 2ก และ 2ข ซึ่งเป็นการแยกที่ได้ความบริสุทธิ์ของ *C4* ในยอดหอสูง (sharp split) เหมือนกัน และต่างก็ไม่มี *C6* ในยอดหอ (กำหนดสัดส่วนโดยโมลของ *C6* ในยอดหอเป็น $1x10^{-11}$) แต่ต่างกันตรงที่ในรูปที่ 2ข มีการดึงกลับของ *C4* ในผลิตภัณฑ์ยอดหอต่ำกว่า ทั้งสองกรณีนี้สามเหลี่ยมการกลั่นที่ภาวะป้อนกลับต่ำสุดของส่วนสตริพพิงและเรคติฟายอิงสัมผัสกันพอดีโดยที่จุด $\tilde{\mathbf{x}}^1$ และ $\tilde{\mathbf{x}}^3$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกับจุด $\hat{\mathbf{x}}^2$ และ $\hat{\mathbf{x}}^3$ ตามหลักการของอันเดอร์วูด อีกทั้งโปรไฟล์องค์ประกอบของส่วนสตริพพิงยังสิ้นสุดบนโปรไฟล์องค์ประกอบของส่วนเรคติฟายอิง ค่า R_{min} ที่ได้จากอันเดอร์วูดทั้งสองกรณีสอดคล้องกับวิธีค่าขอบเขต ถึงแม้ว่าลักษณะโปรไฟล์ของส่วนสตริพพิงจะแตกต่างกัน ในรูปที่ 2ข มีการดึงกลับ *C4* ในยอดหอต่ำจึงมีการกระจายตัวของ *C4* ในผลิตภัณฑ์ก้นหอทำให้โปรไฟล์ไม่ลู่เข้าสู่ saddle pinch ($\tilde{\mathbf{x}}^2$) ในขณะที่โปรไฟล์ของส่วนสตริพพิงในรูปที่ 2ก มีบริเวณที่ใช้ต้องชั้นสมดุลจำนวนมากบริเวณ $\tilde{\mathbf{x}}^2$ ซึ่งเป็นโซนที่สัดส่วนองค์ประกอบของเฟสของเหลวเปลี่ยนแปลงน้อยมากเพื่อใช้ในการกำจัด *C4* ออกจากก้นหอ อย่างไรก็ตาม ถึงแม้ว่าการแยกในรูปที่ 2ก และ 2ข จะมี R_{min} ที่เท่ากันแต่การที่มีองค์ประกอบกุญแจเบากระจายตัวในผลิตภัณฑ์ก้นหอมีผลทำให้อัตราส่วนต้มซ้ำเปลี่ยนไป

ส่วนในรูปที่ 2ค เป็นการแยกแบบตรงที่กำหนดความบริสุทธิ์ขององค์ประกอบกุญแจเบาไม่สูงมาก (not sharp) และมีการกระจายตัวของ *C6* ซึ่งไม่ใช่องค์ประกอบกุญแจในยอดหอเล็กน้อย (กำหนดให้มีสัดส่วนโดยโมลของ *C6* ในผลิตภัณฑ์ยอดหอเป็น 0.005) ถึงแม้ว่าสามเหลี่ยมการกลั่นของส่วนสตริพพิงและเรคติฟายอิงที่ $R_{min} = 2.18$ ซึ่งได้จากสมการอันเดอร์วูดจะสัมผัสกัน และจุดพินช์ $\tilde{\mathbf{x}}^1$ และ $\tilde{\mathbf{x}}^3$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกับจุด $\hat{\mathbf{x}}^2$ และ $\hat{\mathbf{x}}^3$ แต่โปรไฟล์องค์ประกอบของส่วนสตริพพิงและเรคติฟายอิงไม่ได้สัมผัสกัน เมื่อหาค่า R_{min} ตามวิธีค่าขอบเขตด้วยการหาอัตราส่วนป้อนกลับที่น้อยที่สุดที่ทำให้โปรไฟล์องค์ประกอบของส่วนสตริพพิงและเรคติฟายอิงสัมผัสกัน พบว่า ค่า R_{min} ต้องมีค่าเท่ากับ 3.11 จึงจะทำให้โปรไฟล์ของหอกลั่นสองส่วนสัมผัสกันดังรูปที่ 2ง ซึ่งเห็นได้อย่างชัดเจนว่าค่า R_{min} ที่ได้จากสมการอันเดอร์วูดคลาดเคลื่อนไป

การที่สมการอันเดอร์วูดไม่สามารถทำนายค่า R_{min} ได้แม่นยำเมื่อมีการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์ยอดหอของหอกลั่นที่มีการแยกแบบตรงเนื่องมาจากการที่องค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจกระจายตัวอยู่ในยอดหอทำให้ลักษณะของโปรไฟล์ของส่วนเรคติฟายอิงแตกต่างไปจากกรณีที่ผลิตภัณฑ์ยอดหอมีความบริสุทธิ์ขององค์ประกอบกุญแจเบาสูง ในรูปที่ 2ก และ 2ข โปรไฟล์ของส่วนเรคติฟายอิงเริ่มจากผลิตภัณฑ์ยอดหอ (*D*) และสัดส่วนองค์ประกอบของเฟสของเหลวบนชั้นสมดุลต่างๆ ที่อยู่ต่ำกว่าเครื่องควบแน่นลงมาถึงจุดพินช์ $\hat{\mathbf{x}}^2$ และ $\hat{\mathbf{x}}^3$ ต่างก็อยู่บนด้านสองด้านของสามเหลี่ยมการกลั่นพอดี โดยบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงสัดส่วนองค์ประกอบของเฟสของเหลวน้อยมากอยู่บน saddle pinch ของส่วนเรคติฟายอิง ($\hat{\mathbf{x}}^2$) ซึ่งบริเวณนี้เป็นบริเวณที่ *C6* ถูกกำจัดออกจากยอดหอ เมื่อมีการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์ยอดหอจะทำให้โปรไฟล์ของส่วนเรคติฟายอิงไม่ลู่เข้าหาจุดพินช์ $\hat{\mathbf{x}}^2$ ดังรูปที่ 2ค ลักษณะของโปรไฟล์ดังกล่าวเรียกว่า sloppy [16] หากยิ่งมีองค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์ยอดหอมากเท่าใดจะยิ่งทำให้โปรไฟล์ sloppy มากขึ้นหรือยิ่งออกห่างจาก saddle pinch มากขึ้น ค่า R_{min} ที่หาได้จากสมการอันเดอร์วูดจะยิ่งไม่แม่นยำมากขึ้น



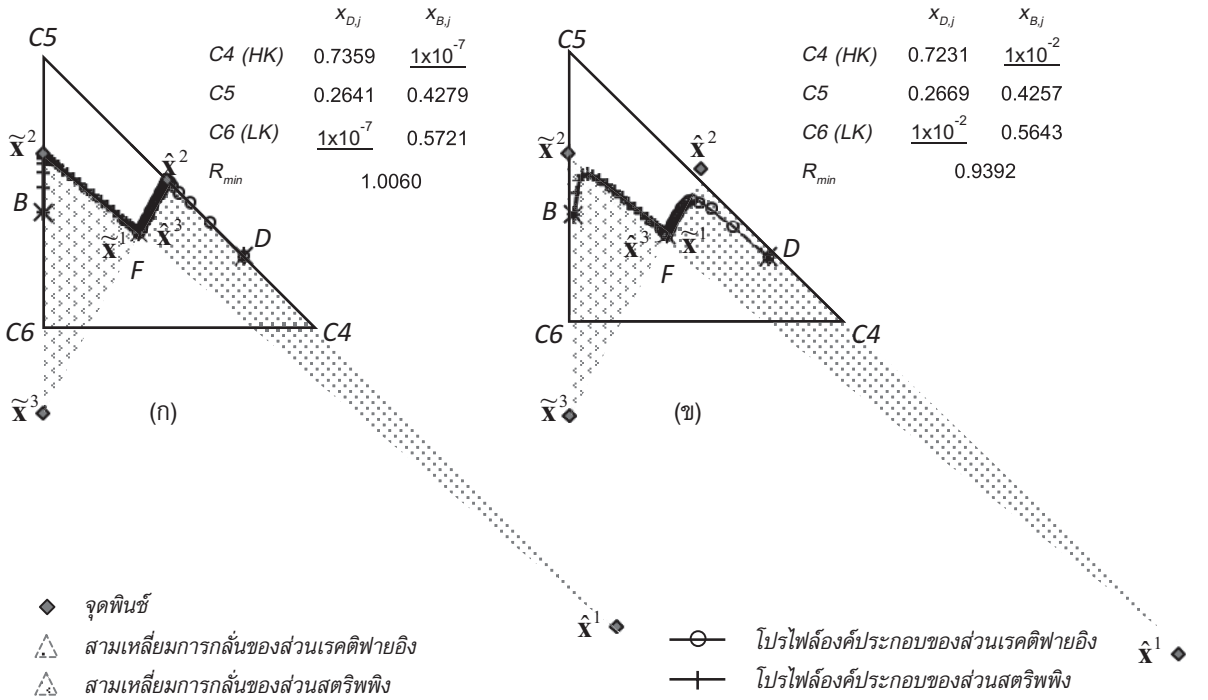
รูปที่ 3 จุดพินช์และโปรไฟล์องค์ประกอบสำหรับการแยกสารผสม *C5*, *C6* และ *C7* แบบอ้อม (ก) ความบริสุทธิ์ของ *C6* ในก้นหอสูง, (ข) ความบริสุทธิ์ของ *C6* ในก้นหอสูงแต่มีการดึงกลับ *C6* ในผลิตภัณฑ์ก้นหอต่ำ และ (ค) ความบริสุทธิ์ของ *C6* ไม่สูงมาก ที่ R_{min} จากสมการอันเดอร์วูด, และ (ง) ความบริสุทธิ์ของ *C6* ไม่สูงมาก ที่ R_{min} จากวิธีค่าขอบเขต (BVM) (สัดส่วนโดยโมลที่ขีดเส้นใต้เป็นค่าที่กำหนด)

ในการแยกแบบอ้อม ถ้ากำหนดให้ผลิตภัณฑ์ก้นหอมีความบริสุทธิ์ขององค์ประกอบกุญแจหนัก *C6* สูง (รูปที่ 3ก และ 3ข) สมการอันเดอร์วูดจะให้ค่า R_{min} ที่ทำให้สามเหลี่ยมการกลั่นของส่วนเรคติฟายอิงและสตริพพิงสัมผัสกันโดยที่ $\tilde{\mathbf{x}}^1$ และ $\tilde{\mathbf{x}}^2$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกับ $\hat{\mathbf{x}}^1$ และ $\hat{\mathbf{x}}^3$ เมื่อสร้างโปรไฟล์องค์ประกอบด้วยค่า R_{min} ที่หาได้จากสมการอันเดอร์วูด โปรไฟล์องค์ประกอบของส่วนเรคติฟายอิงจะสิ้นสุดบนโปรไฟล์ของส่วนสตริพพิง แต่ถ้ากำหนดความบริสุทธิ์ขององค์ประกอบกุญแจหนัก *C6* ไม่สูงมากและมีการกระจายตัวของ *C4* ซึ่งเป็นองค์ประกอบที่เบากว่ากุญแจเบาในก้นหอเล็กน้อยดังรูปที่ 3ค ค่า R_{min} ที่ได้จากสมการ อันเดอร์วูดจะมีความคลาดเคลื่อนเมื่อเทียบกับวิธีค่าขอบเขตดังรูปที่ 3ง เนื่องมาจากโปรไฟล์ของส่วนสตริพพิงไม่ลู่เข้าหา saddle pinch ของส่วนสตริพพิง $\tilde{\mathbf{x}}^2$

สำหรับการแยกแบบทรานสิชันซึ่งองค์ประกอบกุญแจมีค่าการระเหยสัมพัทธ์ที่มีลำดับไม่ติดกัน การคำนวณหาค่า R_{min} ต่างจากการแยกแบบตรงและแบบอ้อม คือนอกจากสมการอันเดอร์วูดจะใช้หาค่า R_{min} แล้วยังใช้หาสัดส่วนโดยโมลขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์ด้วย การคำนวณเริ่มด้วยการแก้สมการที่ (14) หาค่า θ ซึ่งในการแยกสารผสมสามองค์ประกอบแบบทรานสิชันจะมีค่า θ จำนวนสองค่าโดยที่ $\alpha_1 < \theta_1 < \alpha_2 < \theta_2 < \alpha_3$ จากนั้นเขียนสมการที่ 10 สำหรับแต่ละค่าของ θ ดังสมการที่ (15) และ (16) เมื่อกำหนดสัดส่วนโดยโมลหรือการดึงกลับขององค์ประกอบกุญแจเบาและหนักในผลิตภัณฑ์ยอดหรือก้นหอแล้วแก้สมการที่ (15) และ (16) จะได้สัดส่วนโดยโมลขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในยอดหอและค่า R_{min}

$$\frac{\alpha_1 x_{D,1}}{\alpha_1-\theta_1}+\frac{\alpha_2 x_{D,2}}{\alpha_2-\theta_1}+\frac{\alpha_3 x_{D,3}}{\alpha_3-\theta_1}=R_{\min}+1 \qquad \textbf{(15)}$$

$$\frac{\alpha_1 x_{D,1}}{\alpha_1-\theta_2}+\frac{\alpha_2 x_{D,2}}{\alpha_2-\theta_2}+\frac{\alpha_3 x_{D,3}}{\alpha_3-\theta_2}=R_{\min}+1 \qquad \textbf{(16)}$$



รูปที่ 4 จุดพินช์และโปรไฟล์องค์ประกอบสำหรับการแยกสารผสม *C5*, *C6* และ *C7* แบบทรานสิชัน (ก) การดึงกลับของ *C4* และ *C6* ในผลิตภัณฑ์สูง และ (ข) การดึงกลับของ *C4* และ *C6* ในผลิตภัณฑ์สูงต่ำ ที่ R_{min} จากสมการอันเดอร์วูด (สัดส่วนโดยโมลที่ขีดเส้นใต้เป็นค่าที่กำหนด)

รูปที่ 4 แสดงสามเหลี่ยมการกลั่นและโปรไฟล์องค์ประกอบของการแยกแบบทรานสิชันที่มี *C4* เป็นองค์ประกอบกุญแจเบาและ *C6* เป็นกุญแจหนักที่ภาวะป้อนกลับต่ำสุด รูปที่ 4ก เป็นการแยกที่มีการดึงกลับของ *C4* และ *C6* ในผลิตภัณฑ์สูง (กำหนด $x_{D,C6} = x_{B,C4} = 1x10^{-7}$) และรูปที่ 4ข เป็นการแยกที่มีการดึงกลับของ *C4* และ *C6* ต่ำ (กำหนด $x_{D,C6} = x_{B,C4} = 1x10^{-2}$) ทั้งสองกรณีสมการอันเดอร์วูดให้ค่า R_{min} ที่ทำให้มุมหนึ่งของสามเหลี่ยมการกลั่นของแต่ละส่วนบรรจบกันพอดีและ $\hat{\mathbf{x}}^1$, $\hat{\mathbf{x}}^3$, $\tilde{\mathbf{x}}^1$ และ $\tilde{\mathbf{x}}^2$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ยิ่งไปกว่านั้นค่า R_{min} ที่ได้จากสมการอันเดอร์วูดทำให้โปรไฟล์ของทั้งสองส่วนของหอกลั่นสิ้นสุดที่จุดเดียวกันที่พินช์ $\tilde{\mathbf{x}}^1$ และ $\hat{\mathbf{x}}^3$ นั่นคือค่า R_{min} จากสมการอันเดอร์วูดสอดคล้องกับวิธีค่าขอบเขต

การแยกแบบทรานสิชันต่างจากการแยกแบบตรงและอ้อมตรงที่ถึงแม้ว่าโปรไฟล์องค์ประกอบจะไม่ลู่เข้าหาจุด saddle pinch หรือมีลักษณะ sloppy แต่ยังสามารถใช้สมการอันเดอร์วูดในการหาค่า R_{min} ได้ ดังแสดงโดยรูปที่ 4ข เพราะโปรไฟล์ของแต่ละส่วนของหอกลั่นบรรจบกันที่ปลาย (stable node) ของแต่ละส่วน ซึ่งเป็นจุดที่มุมของสามเหลี่ยมการกลั่นของสองส่วนสัมผัสกัน

จากการศึกษานี้ชี้ให้เห็นว่าสมการอันเดอร์วูดไม่สามารถทำนายค่า R_{min} ของการแยกแบบตรงและแบบอ้อมที่มีการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์ที่ต้องการองค์ประกอบกุญแจชนิดหนึ่งเป็นหลัก เนื่องจากการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์ที่ต้องการทำให้โปรไฟล์องค์ประกอบไม่ลู่เข้าสู่ saddle pinch ซึ่งเป็นจุดสำคัญที่ใช้ในการคำนวณ R_{min} ของอันเดอร์วูด อย่างไรก็ตาม สามารถใช้สมการอันเดอร์วูดกับการแยกแบบทรานสิชันแม้ว่าโปรไฟล์จะมีลักษณะ sloppy ดังนั้นเพื่อหลีกเลี่ยงความไม่แม่นยำของค่า R_{min} ที่ได้จากสมการอันเดอร์วูดจะต้องกำหนดสัดส่วนองค์ประกอบของผลิตภัณฑ์ของหอกลั่นอย่างระมัดระวัง โดย Levy และคณะ [14] แนะนำว่าสำหรับการแยกแบบตรงและแบบอ้อมนั้น ควรกำหนดสัดส่วนโดยโมลขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจให้มีค่าเข้าใกล้ศูนย์หากไม่มีข้อจำกัดด้านความปลอดภัยหรือการดำเนินการ ซึ่งโดยปกติแล้วการแยกที่มีการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์ที่ต้องการไม่ค่อยมีความสำคัญในการออกแบบมากนักในขณะที่การแยกให้ได้ผลิตภัณฑ์ที่มีความบริสุทธิ์สูงเป็นที่ต้องการมากกว่า

4. การหาสัดส่วนโดยโมลขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจด้วยวิธีของ Shiras และคณะ [17]

หากในการออกแบบหอกลั่นมีการกำหนดความบริสุทธิ์ของผลิตภัณฑ์ต่ำหรือการดึงกลับน้อยจนทำให้มีองค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์หรือเกิด sloppy การกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์ที่ต้องการอาจมีผลกระทบต่อความแม่นยำของค่า R_{min} ที่ได้จากสมการอันเดอร์วูด การกำหนดสัดส่วนโดยโมลขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์ขึ้นเองจะไม่สะท้อนให้เห็นถึงการกระจายตัวที่แท้จริงขององค์ประกอบนั้น ดังนั้นจึงควรนำค่าการระเหยสัมพัทธ์มาพิจารณาด้วยดังเช่นวิธีของเฟนสกี แต่สัดส่วนองค์ประกอบของผลิตภัณฑ์ที่ได้จากสมการเฟนสกีนั้นเป็นค่าที่ภาวะป้อนกลับหมดซึ่งต่างจากที่ภาวะป้อนกลับต่ำสุด [6] ซึ่งในการหาค่า R_{min} ด้วยสมการอันเดอร์วูดสำหรับกรณีที่การแยกเกิด sloppy ขึ้น ไม่ควรใช้สัดส่วนองค์ประกอบของผลิตภัณฑ์ที่ได้จากสมการเฟนสกี ดังจะแสดงให้เห็นในตัวอย่างต่อไป

การกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์สามารถคำนวณได้โดยใช้สมการของ Shiras และคณะ [17] ซึ่งเป็นสมการที่สามารถหาสัดส่วนองค์ประกอบของผลิตภัณฑ์ยอดหอที่ภาวะป้อนกลับต่ำสุด ดังสมการที่ (17) เมื่อค่า $\alpha_{j,HK}$ เป็นค่าการระเหยสัมพัทธ์ขององค์ประกอบ *j* ที่เทียบกับองค์ประกอบกุญแจหนัก

$$D_{R,j} = \frac{Dx_{D,j}}{Fx_{F,j}} = \frac{\alpha_{j,HK}-1}{\alpha_{LK,HK}-1}\frac{Dx_{D,LK}}{Fx_{F,LK}} + \frac{\alpha_{LK,HK}-\alpha_{j,HK}}{\alpha_{LK,HK}-1}\frac{Dx_{D,HK}}{Fx_{F,HK}} \quad \textbf{(17)}$$

ถ้า $D_{R,j} > 1$ องค์ประกอบนั้นปรากฏอยู่ในผลิตภัณฑ์ยอดหอทั้งหมด

$0 < D_{R,j} < 1$ องค์ประกอบนั้นกระจายอยู่ทั้งในผลิตภัณฑ์ยอดหอและก้นหอ

$D_{R,j} < 0$ องค์ประกอบนั้นปรากฏอยู่ในผลิตภัณฑ์ก้นหอทั้งหมด

เมื่อกำหนดสัดส่วนโดยโมลหรือการดึงกลับขององค์ประกอบกุญแจหนักและเบาในผลิตภัณฑ์แล้ว สามารถใช้สมการที่ (17) ประเมินว่าองค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจต่างๆ จะกระจายอยู่ทั้งในผลิตภัณฑ์ยอดหอและก้นหอหรือไม่ หากค่า D_R ขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจมีค่ามากกว่า 1 ก็ให้กำหนดให้องค์ประกอบนั้นถูกดึงไปที่ผลิตภัณฑ์ยอดหอทั้งหมด ถ้า D_R มีค่าน้อยกว่า 0 ให้กำหนดให้องค์ประกอบนั้นถูกดึงไปที่ผลิตภัณฑ์ก้นหอทั้งหมด แต่หาก D_R มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 แสดงว่าองค์ประกอบนั้นจะกระจายตัวอยู่ในผลิตภัณฑ์ยอดหอและก้นหอ โดยที่ค่า D_R คือค่าการดึงกลับขององค์ประกอบนั้นในผลิตภัณฑ์ยอดหอ ทำให้สามารถคำนวณหาสัดส่วนองค์ประกอบของผลิตภัณฑ์ยอดหอได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 ในการแยกของเหลวอิ่มตัวของสารผสมสามองค์ประกอบ *A*, *B* และ *C* ที่มีอัตราการไหล 100 กิโลโมลต่อชั่วโมง และสัดส่วนองค์ประกอบดังตารางที่ 1 โดยหอกลั่นที่ความดันค่าหนึ่ง เมื่อต้องการดึงสาร *A* ไปที่ยอดหอ 88 % ของจำนวนโมลทั้งหมดที่เข้าหอกลั่น และให้ 85 % ของจำนวนโมลของสาร *B* ที่เข้าสู่หอกลั่นถูกแยกไปที่ก้นหอ แสดงการหาค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดโดยใช้สัดส่วนองค์ประกอบของผลิตภัณฑ์ยอดหอที่หาได้จาก

ก. สมการเฟนสกี

ข. สมการของ Shiras และคณะ [17]

ตารางที่ 1 สัดส่วนองค์ประกอบของสารผสมและค่าการระเหยสัมพัทธ์ขององค์ประกอบในตัวอย่างที่ 1

องค์ประกอบ	สัดส่วนองค์ประกอบในสายป้อน	ค่าการระเหยสัมพัทธ์
A (LK)	0.30	1.7725
B (HK)	0.30	1.1255
C	0.40	1.0000

วิธีทำ

ก. คำนวณหาจำนวนชั้นสมดุลน้อยสุด (N_{min}) ด้วยสมการของเฟนสกี (สมการที่ 18)

$$N_{\min} = \frac{\log\left[\frac{d_{LK}}{d_{HK}} \cdot \frac{b_{HK}}{b_{LK}}\right]}{\log \alpha_{LK,HK}} \qquad \textbf{(18)}$$

$$= \frac{\log\left[\frac{0.88(0.30)(100)}{0.15(0.30)(100)} \cdot \frac{0.85(0.30)(100)}{0.12(0.30)(100)}\right]}{\log(1.7725/1.1255)}$$

$$= 8.2$$

หาอัตราการไหลของสาร *C* ในผลิตภัณฑ์ยอดหอด้วยสมการหาอัตราการไหลขององค์ประกอบ *j* ในผลิตภัณฑ์ยอดหอของเฟนสกี (สมการที่ 19)

$$d_j = \frac{\alpha_{j,HK}^{N_{\min}} f_j \left(\frac{d_{HK}}{b_{HK}}\right)}{1 + \alpha_{j,HK}^{N_{\min}} \left(\frac{d_{HK}}{b_{HK}}\right)}$$

$$d_C = \frac{\alpha_{C,HK}^{N_{\min}} f_C \left(\frac{d_{HK}}{b_{HK}}\right)}{1 + \alpha_{C,HK}^{N_{\min}} \left(\frac{d_{HK}}{b_{HK}}\right)} \qquad \textbf{(19)}$$

$$= \frac{(1/1.1255)^{8.2}(0.4)(100)\left(\frac{0.15(0.3)(100)}{0.85(0.3)(100)}\right)}{1 + (1/1.1255)^{8.2}\left(\frac{0.15(0.3)(100)}{0.85(0.3)(100)}\right)}$$

$$= 2.51$$

ได้การกระจายตัวของแต่ละองค์ประกอบในผลิตภัณฑ์ทั้งสอง ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 การกระจายตัวขององค์ประกอบในผลิตภัณฑ์ของหอกลั่นในตัวอย่างที่ 1 ที่หาด้วยสมการเฟนสกี

องค์ประกอบ	d_j (kmol/h)	b_j (kmol/h)	$x_{D,j}$	$x_{B,j}$
A (LK)	= 0.88(0.3)(100) = 26.40	=0.3(100)-26.40 = 3.60	0.7902	0.0541
B (HK)	= 0.3(100)-25.50 = 4.50	= 0.85(0.3)(100) = 25.50	0.1347	0.3829
C	2.51	= 0.4(100)-2.51 = 37.49	0.0751	0.5630
รวม	33.41	66.59		

คำนวณหาค่า R_{min} ด้วยสมการอันเดอร์วูด โดยใช้สมการที่ (14) หาค่า θ ที่อยู่ระหว่าง $\alpha_{LK} < \theta < \alpha_{HK}$

$$\frac{1.7725(0.3)}{1.7725-\theta}+\frac{1.1255(0.3)}{1.1255-\theta}+\frac{1(0.4)}{1-\theta}=0$$

พบว่า ค่า θ = 1.4770 ทำให้สมการเป็นจริง แทนค่า θ = 1.4770 ลงในสมการที่ (10)

$$\frac{1.7725(0.7902)}{1.7725-1.4770}+\frac{1.1255(0.1347)}{1.1255-1.4770}+\frac{1(0.0751)}{1-1.4770}=R_{\min}+1$$

จะได้ R_{min} = 3.15

ข. ใช้สมการที่ (17) เพื่อประเมินว่ามีการกระจายตัวของสาร *C* ในผลิตภัณฑ์ยอดหอหรือไม่

$$D_{R,C}=\frac{(1/1.1255)-1}{(1.7725/1.1255)-1}\frac{0.88(0.3)(100)}{0.3(100)}+\frac{(1.7725/1.1255)-(1/1.1255)}{(1.7725/1.1255)-1}\frac{0.15(0.3)(100)}{(0.3)(100)}=0.0084$$

ค่า D_R ของ *C* อยู่ในช่วง 0 ถึง 1 แสดงว่า *C* กระจายอยู่ในทั้งผลิตภัณฑ์ยอดหอและก้นหอ โดยที่มี *C* ในผลิตภัณฑ์ยอดหอ = $D_R F x_{F,C}$ = 0.0084(0.4)(100) = 0.3370 kmol/h และได้การกระจายตัวของแต่ละองค์ประกอบในผลิตภัณฑ์ทั้งสอง ดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 การกระจายตัวขององค์ประกอบในผลิตภัณฑ์ของหอกลั่นในตัวอย่างที่ 1 ที่หาด้วยสมการของ Shiras และคณะ [17]

องค์ประกอบ	d_j (kmol/h)	b_j (kmol/h)	$x_{D,j}$	$x_{B,j}$
A (LK)	= 0.88(0.3)(100) = 26.40	= 0.3(100)-26.40 = 3.60	0.8451	0.0524
B (HK)	= 0.3(100)-25.50 = 4.50	= 0.85(0.3)(100) = 25.50	0.1441	0.3708
C	0.337	39.663	0.0108	0.5768
รวม	31.237	68.763		

แทนค่า θ = 1.4770 ในสมการที่ (10)

$$\frac{1.7725(0.8451)}{1.7725-1.4770}+\frac{1.1255(0.1441)}{1.1255-1.4770}+\frac{1(0.0108)}{1-1.4770}=R_{\min}+1$$

จะได้ R_{min} = 3.58

ตัวอย่าง 2 สารผสมของเหลวอิ่มตัวที่มีสัดส่วนองค์ประกอบดังตารางที่ 4 ถูกแยกด้วยหอกลั่นที่ดำเนินการที่ 8.3 บาร์ กำหนดให้ 70% โดยโมลของ *n-C4* ในสายป้อนถูกดึงไปเป็นผลิตภัณฑ์ยอดหอ และ 75% โดยโมลของ *i-C5* ในสายป้อนถูกดึงไปที่ก้นหอ แสดงการหาค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดโดยใช้สัดส่วนองค์ประกอบของผลิตภัณฑ์ยอดหอที่หาได้จาก

ก. สมการเฟนสกี

ข. สมการของ Shiras และคณะ [17]

ตารางที่ 4 สัดส่วนองค์ประกอบของสารผสมและค่าการระเหยสัมพัทธ์ขององค์ประกอบในตัวอย่างที่ 2

องค์ประกอบ	อัตราการไหลในสายป้อน	ค่าการระเหยสัมพัทธ์
Propane *(C3)*	5	5.0
i-Butane *(i-C4)*	15	2.6
n-Butane *(n-C4, LK)*	25	2.0
i-Pentane *(i-C5, HK)*	20	1.0
n-Pentane *(n-C5)*	35	0.85

วิธีทำ

ก. คำนวณหา N_{min} ด้วยสมการของเฟนสกี (สมการที่ 18)

ข.

$$N_{\min} = \frac{\log\left[\frac{0.7(25)}{0.25(20)} \cdot \frac{20-0.25(20)}{25-0.7(25)}\right]}{\log(2/1)} = 2.8$$

หาอัตราการไหลขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจต่างๆ ในผลิตภัณฑ์ยอดหอด้วยสมการที่ (19) จะได้การกระจายตัวของแต่ละองค์ประกอบในผลิตภัณฑ์ทั้งสอง ดังตารางที่ 5

ตารางที่ 5 การกระจายตัวขององค์ประกอบในผลิตภัณฑ์ของหอกลั่นในตัวอย่างที่ 2 ที่หาด้วยสมการเฟนสกี

องค์ประกอบ	d_j (kmol/h)	b_j (kmol/h)	$x_{D,j}$	$x_{B,j}$
Propane *(C3)*	4.84	0.16	0.1055	0.0029
i-Butane *(i-C4)*	12.45	2.55	0.2712	0.0472
n-Butane *(n-C4, LK)*	17.5	7.5	0.3813	0.1386
i-Pentane *(i-C5, HK)*	5.00	15.0	0.1090	0.2772
n-Pentane *(n-C5)*	6.10	28.90	0.1330	0.5340
รวม	45.89	54.11		

คำนวณหาค่า R_{min} ด้วยสมการอันเดอร์วูดโดยใช้สมการที่ (14) หาค่า θ ที่อยู่ระหว่าง $\alpha_{LK} < \theta < \alpha_{HK}$

$$\frac{5.00(5/100)}{5.00-\theta} + \frac{2.60(15/100)}{2.60-\theta} + \frac{2.00(25/100)}{2.00-\theta} + \frac{1.00(20/100)}{1.00-\theta} + \frac{0.85(35/100)}{0.85-\theta} = 0$$

พบว่า ค่า θ = 1.3539 ทำให้สมการเป็นจริง

แทนค่า θ ลงในสมการที่ (10)

$$\frac{5.00(0.1055)}{5.00-1.3539} + \frac{2.60(0.2712)}{2.60-1.3539} + \frac{2.00(0.3813)}{2.00-1.3539} + \frac{1.00(0.1090)}{1.00-1.3539} + \frac{0.85(0.1330)}{0.85-1.3539} = R_{\min} + 1$$

จะได้ R_{min} = 0.58

ข. ใช้สมการที่ (17) เพื่อประเมินการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจต่างๆ ในผลิตภัณฑ์ยอดหอ

$$D_{R,C3} = \frac{5-1}{2-1}\frac{0.70(25)}{25} + \frac{2-5}{2-1}\frac{0.25(20)}{20}$$
$$= 2.05$$
$$D_{R,iC4} = \frac{2.6-1}{2-1}\frac{0.70(25)}{25} + \frac{2-2.6}{2-1}\frac{0.25(20)}{20}$$
$$= 0.97$$
$$D_{R,nC5} = \frac{0.85-1}{2-1}\frac{0.70(25)}{25} + \frac{2-0.85}{2-1}\frac{0.25(20)}{20}$$
$$= 0.1825$$

จากค่า D_R ข้างต้น แสดงว่า *C3* อยู่ในผลิตภัณฑ์ยอดหอทั้งหมด ส่วน *i-C4* และ *n-C5* กระจายอยู่ในผลิตภัณฑ์ทั้งสอง การกระจายตัวของแต่ละองค์ประกอบในผลิตภัณฑ์เป็นดังตารางที่ 6

ตารางที่ 6 การกระจายตัวขององค์ประกอบในผลิตภัณฑ์ของหอกลั่นในตัวอย่างที่ 2 ที่หาด้วยสมการของ Shiras และคณะ [17]

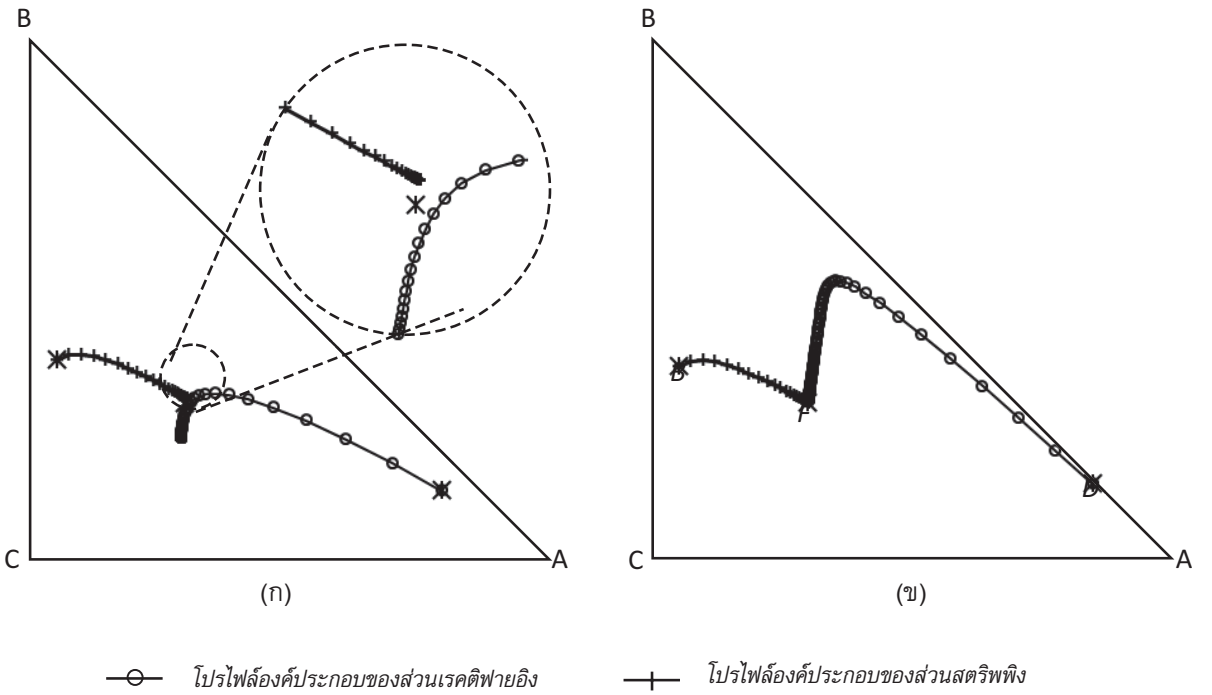
องค์ประกอบ	d_j (kmol/h)	b_j (kmol/h)	$x_{D,j}$	$x_{B,j}$
Propane *(C3)*	5.00	0	0.1032	0.0000
i-Butane *(i-C4)*	0.97(15) = 14.55	15-14.55 = 0.45	0.3004	0.0087
n-Butane *(n-C4, LK)*	0.70(25) = 17.50	25-17.50 = 7.50	0.3613	0.1455
i-Pentane *(i-C5, HK)*	20-15 = 5	0.75(20) = 15	0.1032	0.2909
n-Pentane *(n-C5)*	0.1825(35) = 6.3875	35-6.3875 = 28.6125	0.1319	0.5549
รวม	48.4375	51.5625		

แทนค่า θ = 1.3539 ในสมการที่ (10)

$$\frac{5.\ (0.1032)}{5.00-1.3539} + \frac{2.60(0.3004)}{2.60-1.3539} + \frac{2.00(0.3613)}{2.00-1.3539}$$
$$+\frac{1.00(0.1032)}{1.00-1.3539} + \frac{0.85(0.1319)}{0.85-1.3539} = R_{\min}+1$$

จะได้ R_{min} = 0.37

จากตัวอย่างที่ 1 และ 2 จะเห็นว่าสัดส่วนองค์ประกอบของผลิตภัณฑ์ยอดหอที่ได้จากสมการเฟนสกีและสมการของ Shiras และคณะ [17] แตกต่างกัน ส่งผลให้ค่า R_{min} ที่คำนวณได้จากสมการอันเดอร์วูดต่างกัน รูปที่ 5 แสดงโปรไฟล์องค์ประกอบสำหรับการแยกในตัวอย่างที่ 1 โปรไฟล์องค์ประกอบสร้างขึ้นด้วยค่า R_{min} ที่ได้จากสมการอันเดอร์วูดโดยใช้สัดส่วนองค์ประกอบของผลิตภัณฑ์ยอดหอที่หาได้จากการใช้สมการเฟนสกี (รูปที่ 5ก) และสมการของ Shiras และคณะ [17] (รูปที่ 5ข) ในกรณีที่ใช้สัดส่วนองค์ประกอบยอดหอจากสมการเฟนสกีหาค่า R_{min} โปรไฟล์ของหอกลั่นจะไม่ต่อเนื่อง แต่เมื่อใช้สัดส่วนองค์ประกอบยอดหอจากสมการ Shiras และคณะ [17] หาค่า R_{min} จะได้โปรไฟล์ของแต่ละส่วนที่มีปลายบรรจบกันพอดี ซึ่งค่า R_{min} ที่ได้จากการใช้สมการเฟนสกีหาสัดส่วนองค์ประกอบยอดหอมีความคลาดเคลื่อนประมาณ 12% เมื่อเทียบกับค่าที่ได้จากการใช้สมการของ Shiras และคณะ [17] ส่วนตัวอย่างที่ 2 ค่า R_{min} ที่ได้จากการใช้สมการเฟนสกีมีความคลาดเคลื่อนประมาณ 56% ทั้งนี้เป็นเพราะสัดส่วนองค์ประกอบของผลิตภัณฑ์ยอดหอที่หาได้จากสมการเฟนสกีเป็นค่าที่ภาวะป้อนกลับหมดไม่ใช่ที่ภาวะป้อนกลับต่ำสุด ความคลาดเคลื่อนในกรณีเช่นนี้จะเกิดขึ้นได้มากกับสารผสมที่มีความสามารถในการระเหยใกล้เคียงกันมาก เพราะองค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจที่มีค่าการระเหยสัมพัทธ์ใกล้เคียงกับองค์ประกอบกุญแจมีโอกาสกระจายตัวอยู่ในผลิตภัณฑ์ร่วมกับองค์ประกอบกุญแจได้มาก



รูปที่ 5 โปรไฟล์องค์ประกอบของการแยกในตัวอย่างที่ 1 ที่ค่า Rmin ที่ได้จากการใช้ (ก) สมการเฟนสกี และ (ข) สมการ Shiras และคณะ [17] ในการหาสัดส่วนองค์ประกอบผลิตภัณฑ์ยอดหอ

5. สรุป

การคำนวณหาค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดของสมการอันเดอร์วูดมีพื้นฐานอยู่ที่การหาจุดพินช์ของแต่ละส่วนของหอกลั่นที่ทำให้สามเหลี่ยมการกลั่นของแต่ละส่วนสัมผัสกัน ความคลาดเคลื่อนของสมการอันเดอร์วูดเกิดขึ้นได้กับการแยกแบบตรงและแบบอ้อมที่มีการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์จนทำให้โปรไฟล์องค์ประกอบห่างออกจากจุดพินช์หรือมีลักษณะ sloppy การกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์หาได้ด้วยสมการ Shiras และคณะซึ่งให้สัดส่วนองค์ประกอบของผลิตภัณฑ์ยอดหอที่ภาวะป้อนกลับต่ำสุด จึงทำให้ค่าอัตราส่วนป้อนกลับต่ำสุดที่ได้มีความถูกต้องมากกว่าการใช้สมการเฟนสกีประมาณค่าสัดส่วนองค์ประกอบของผลิตภัณฑ์ยอดหอ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่มีการกำหนดความบริสุทธิ์และการดึงกลับขององค์ประกอบกุญแจในผลิตภัณฑ์ต่ำและความสามารถในการระเหยของสารมีความใกล้เคียงกันมาก แม้ว่าการใช้สมการของ Shiras และคณะอาจเป็นเพิ่มขั้นตอนในการคำนวณแต่สมการนี้อาศัยการคำนวณที่ไม่ยุ่งยาก ผู้ออกแบบหอกลั่นอาจพิจารณาใช้สมการนี้เมื่อไม่แน่ใจว่ามีการกระจายตัวขององค์ประกอบที่ไม่ใช่กุญแจในผลิตภัณฑ์หรือไม่ เช่น เมื่อมีการกำหนดความบริสุทธิ์ของผลิตภัณฑ์ต่ำหรือการดึงกลับน้อย หรือเมื่อค่าการระเหยสัมพัทธ์ของสารใกล้เคียงกัน

6. รายการสัญลักษณ์

- *B* อัตราการไหลเชิงโมลของผลิตภัณฑ์ก้นหอ
- *b* อัตราการไหลเชิงโมลขององค์ประกอบหนึ่งในผลิตภัณฑ์ก้นหอ
- *C* จำนวนองค์ประกอบในสารผสม
- *D* อัตราการไหลเชิงโมลของผลิตภัณฑ์ยอดหอ
- *d* อัตราการไหลเชิงโมลขององค์ประกอบหนึ่งในผลิตภัณฑ์ยอดหอ
- *F* อัตราการไหลเชิงโมลของสายป้อน
- *f* อัตราการไหลเชิงโมลขององค์ประกอบหนึ่งในสายป้อน

N จำนวนชั้นสมดุล
q สถานะของสายป้อน
R อัตราส่วนป้อนกลับ
S อัตราส่วนต้มซ้ำ
x สัดส่วนโดยโมลขององค์ประกอบหนึ่งในเฟสของเหลว
$\mathbf{x}$ สัดส่วนองค์ประกอบในเฟสของเหลว
$\hat{\mathbf{x}}$ สัดส่วนองค์ประกอบของจุดพินช์ในส่วนเรคติฟายอิง
$\widetilde{\mathbf{x}}$ สัดส่วนองค์ประกอบของจุดพินช์ในส่วนสตริพพิง
y สัดส่วนโดยโมลในเฟสไอ
$\mathbf{y}$ สัดส่วนองค์ประกอบในเฟสไอ
α ค่าการระเหยสัมพัทธ์
ϕ พารามิเตอร์ของอันเดอร์วูดสำหรับส่วนเรคติฟายอิง
ψ พารามิเตอร์ของอันเดอร์วูดสำหรับส่วนสตริพพิง
θ พารามิเตอร์ของอันเดอร์วูด

Subscripts

B ผลิตภัณฑ์ก้นหอ
D ผลิตภัณฑ์ยอดหอ
F สายป้อน
j เลขดัชนีขององค์ประกอบ
n เลขที่ชั้นสมดุลในหอกลั่น

7. เอกสารอ้างอิง

1. Biegler, L.T., Grossmann, I.E. and Westerberg, A.W., 1997, *Systematic methods of chemical process design*, Prentice-Hall, New Jersey.

2. Underwood, A. J. V., 1945, "Fractional distillation of ternary mixtures. Part I.", Journal of the Institute of Petroleum, Vol. 31, pp. 111-118.

3. Underwood, A. J. V., 1946, "Fractional distillation of ternary mixtures. Part II.", Journal of the Institute of Petroleum, Vol. 32, pp. 598-613.

4. Underwood, A. J. V., 1946, "Fractional distillation of multi-component mixtures-Calculation of minimum reflux ratio", Journal of the Institute of Petroleum, Vol. 32, pp. 614-626.

5. Underwood, A. J. V., 1948, "Fractional distillation of multicomponent mixtures", Chemical Engineering Progress, Vol. 44, No. 8, pp. 603-614.

6. Kister, H.Z., 1992, *Distillation design*, McGraw-Hill, New York.

7. Smith, R., 2005, *Chemical Process Design and Integration*, Wiley, UK.

8. Sinnott, R., 2009, *Chemical engineering design*, Coulson & Richardson's chemical engineering, Towler G. editor, 5th ed, Elsevier, Burlington, MA.

9. Khoury, F.M., 2005, *Multistage separation processes*, 3rd ed, CRC Press, Boca Raton.

10. Smith, B.D., 1963, *Design of equilibrium stage processes*, McGraw-Hill, New York.

11. Hengstebeck, R.J., 1976, *Distillation: principles and design procedures*, Reinhold chemical engineering series, Robert E.Krieger, Florida.

12. Seader, J.D. and Henley, E.J., 1998, *Separation process principles*, John Wiley, New York.

13. Geankoplis, C.J., 2003, *Transport processes and separation process principles*, 4th ed, Prentice-Hall, New Jersey.

14. Levy, S.G., Van Dongen, D.B. and Doherty, M.F., 1985, "Design and synthesis of homogeneous azeotropic distillations. 2. Minimum reflux calculations for nonideal and azeotropic columns", Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals, Vol. 24, No. 4, pp. 463-474.

15. Koehler, J., Poellmann, P. and Blass, E., 1995, "A review on minimum energy calculations for ideal and nonideal distillations", Industrial & Engineering Chemistry Research, Vol. 34, No. 4, pp. 1003-1020.

16. Fidkowski, Z.T., Malone, M.F. and Doherty, M.F., 1993, "Feasibility of separations for distillation of nonideal ternary mixtures", AIChE Journal, Vol. 39, No. 8, pp. 1303-1321.

17. Shiras, R.N., D.N. Hanson, and C.H. Gibson, 1950, "Calculation of Minimum Reflux in Distillation Columns", Industrial & Engineering Chemistry, Vol. 42, No. 5, pp. 871-876.