สมบัติที่สำคัญของการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์

ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม[1*] และ อานนท์ พลอยมุกดา[2]
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ถ.ฉลองกรุง เขตลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520

บทคัดย่อ

การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่ทำหน้าที่สะท้อนเวกเตอร์ใดๆ เทียบกับระนาบที่กำหนด บทความวิชาการนี้นำเสนอแนวคิดเบื้องหลังการนิยามการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์ รวมทั้งพิจารณาสมบัติที่สำคัญในมุมมองของทฤษฎีตัวดำเนินการ สมบัติทางพีชคณิตของการแปลงนี้ ได้แก่ การเป็นตัวดำเนินการยูนิแทรี ตัวดำเนินการเฮอร์มิเชียน และตัวดำเนินการอาวัตนาการ สมบัติทางเรขาคณิตที่สำคัญของการแปลงนี้ ได้แก่ สมบัติการคงสภาพนอร์ม ภาวะตั้งฉาก และมุมระหว่างเวกเตอร์ ยิ่งกว่านั้นบทความนี้แสดงให้เห็นว่าทุกเมทริกซ์ยูนิแทรีสามารถเขียนในรูปผลคูณของตัวสะท้อนมูลฐานซึ่งมีรูปแบบที่ใกล้เคียงกับการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์

คำสำคัญ : การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์ / ตัวดำเนินการยูนิแทรี / ตัวสะท้อนมูลฐาน

* *Corresponding Author : pattrawut.c@gmail.com*

1 *อาจารย์ประจำ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์*

2 *นักศึกษาหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์*

Significant Properties of Householder Transformation

Pattrawut Chansangiam[1*] and Arnon Ploymukda[2]

King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Chalongkrung Road, Ladkrabang, Bankok 10520

Abstract

A Householder transformation is a linear operator, which reflects any vector with respect to a given plane. This review article presents an idea behind the definition of this transformation and discusses the significant properties of the transformation from an operator-theory point of view. Algebraic properties of this transformation are its being unitary, Hermitian and involuntary. Its geometric properties include norm-orthogonality-angle preservings. Moreover, we show that every unitary matrix can be written as a product of elementary reflectors, which are in the form related to the Householder one.

Keywords : Householder Transformation / Unitary Operator / Elementary Reflector

* *Corresponding Author : pattrawut.c@gmail.com*

[1] *Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science.*

[2] *Student Master of Science, Department of Mathematics, Faculty of Science.*

1. บทนำ

การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์ (Householder transformation) หรือการสะท้อนเฮาส์โฮลเดอร์ (Householder reflection) ที่สอดคล้องกับเวกเตอร์ $v \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ นิยามโดย

$$H_v = I - 2\frac{vv^*}{\|v\|^2} \qquad (1)$$

เมื่อ * แทนการสลับเปลี่ยนสังยุค (conjugate transpose) ของเวกเตอร์หรือเมทริกซ์ การแปลงเชิงเส้นดังกล่าวจะสะท้อนเวกเตอร์ที่ขนานกับ v เทียบกับระนาบ (ปริภูมิย่อย) ที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ทั้งหมดที่ตั้งฉากกับ v การแปลงเชิงเส้นนี้ถูกนำเสนอโดย A.S. Householder ในงานวิจัย [11]

การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์มีบทบาทสำคัญในทฤษฎีเมทริกซ์ พีชคณิตเชิงเส้นเชิงเลข (Numerical linear algebra) ฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์และการประมวลผลสัญญาณ (Signal processing) ในเอกสาร [7] จัดให้การแปลงดังกล่าวเป็น 1 ใน 10 ขั้นตอนวิธีที่ดีที่สุดแห่งศตวรรษ การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์สามารถนำมาใช้ในกระบวนการแยกเมทริกซ์ที่สำคัญได้แก่

- การแยก QR (QR decomposition)
- การทำให้เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยม (triangularization)
- การลดรูปเป็นเมทริกซ์เฮสเซนเบิร์ก (Hessenberg reduction)
- การทำให้เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียง (tridiagonalization)
- การแยกชอเลสกีย์ (Cholesky decomposition)

ซึ่งสามารถศึกษาได้จากงานวิจัย [5], [12], [14] รวมทั้งเอกสาร [9], [10] และ [18]

การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์สามารถนำไปใช้การออกแบบตัวกรอง (filter) สำหรับการประมวลผลสัญญาณ (ดูงานวิจัย [13], [17]) และใช้ในการแยกโคเซตบัญญัติ (canonical coset decomposition) ซึ่งมีบทบาทในฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์ ([6])

บทความวิชาการนี้นำเสนอสมบัติต่างๆ ที่สำคัญของการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์ในมุมมองของทฤษฎีตัวดำเนินการ โดยเริ่มต้นพิจารณาที่มาของบทนิยามของการแปลงดังกล่าวในสมการ (1) จากนั้นพิจารณาสมบัติทางพีชคณิตที่สำคัญการแปลงนี้ ได้แก่ การเป็นตัวดำเนินการยูนิแทรี ตัวดำเนินการเฮอร์มิเชียนและตัวดำเนินการอาวัตนาการที่มีค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) เป็น ± 1 สมบัติดังกล่าวนำมาสู่สมบัติทางเรขาคณิต ซึ่งได้แก่ สมบัติการคงสภาพนอร์ม (ความยาว) ภาวะตั้งฉาก (orthogonality) และมุมระหว่างเวกเตอร์ ยิ่งกว่านั้น เราได้ว่าทุกเมทริกซ์ยูนิแทรีสามารถเขียนในรูปผลคูณของตัวสะท้อนมูลฐานซึ่งมีรูปแบบใกล้เคียงกับการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์

ในหัวข้อถัดไปเราจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องในทฤษฎีเมทริกซ์และตัวดำเนินการ หัวข้อที่สามจะกล่าวถึงที่มาของการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์ รวมทั้งกล่าวถึงการแปลงที่มีความคล้ายคลึงกับการแปลงนี้ หัวข้อที่สี่นำเสนอสมบัติทางพีชคณิตและเรขาคณิตที่สำคัญของการแปลงนี้ หัวข้อที่ห้ากล่าวถึงตัวสะท้อนมูลฐาน หัวข้อสุดท้ายจะเป็นบทสรุป

2. ความรู้พื้นฐาน

ให้ $M_n(\mathbb{C})$ แทน เซตของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกอยู่ใน $\mathbb{C}$ เซตของค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมดของ $A \in M_n(\mathbb{C})$ เขียนแทนด้วย $\sigma(A)$

ภาวะซ้ำเชิงพีชคณิต (algebraic multiplicity) ของค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda \in \sigma(A)$ คือภาวะซ้ำของ λ ในฐานะที่เป็นรากของพหุนามลักษณะเฉพาะของ A ส่วน**ภาวะซ้ำเชิงเรขาคณิต** (geometric multiplicity) ของ $\lambda \in \sigma(A)$ คือมิติของปริภูมิลักษณะเฉพาะ (eigenspace) ของ A ที่สอดคล้องกับ λ

เมทริกซ์ A จะทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ (diagonalizable) ก็ต่อเมื่อแต่ละค่าลักษณะเฉพาะของ A มีภาวะซ้ำเชิงพีชคณิตเท่ากับภาวะซ้ำเชิงเรขาคณิต ในกรณีนี้เราเรียกภาวะซ้ำทั้งสองอย่างย่อว่า**ภาวะซ้ำ**

เมทริกซ์ (ตัวดำเนินการ) $A \in M_n(\mathbb{C})$ จะเรียกว่า

- **เมทริกซ์ปรกติ** (normal matrix) ก็ต่อเมื่อ $A^*A = AA^*$
- **เมทริกซ์เฮอร์มิเชียน** (Hermitian matrix) ก็ต่อเมื่อ $A^* = A$
- **เมทริกซ์ยูนิแทรี** (unitary matrix) ก็ต่อเมื่อ $A^*A = I$
- **เมทริกซ์อาวัตนาการ** (involutary matrix) ก็ต่อเมื่อ $A^2 = I$

ทฤษฎีบทที่ 1 ทฤษฎีบทเชิงสเปกตรัมสำหรับเมทริกซ์ปรกติ (spectral theorem for normal matrices) ให้ $A \in M_n(\mathbb{C})$ โดย $\sigma(A) = \{\lambda_1,...,\lambda_n\}$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) A เป็นเมทริกซ์ปรกติ

(2) มีเมทริกซ์ยูนิแทรี $U \in M_n(\mathbb{C})$ ที่ทำให้ $U^*AU = \mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$

(3) มีฐานเชิงตั้งฉากปรกติใน $\mathbb{C}^n$ ที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A

ดังนั้นเมทริกซ์ปรกติ $A \in M_n(\mathbb{C})$ สามารถเขียนได้ในรูป

$$A = U\mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)U^*$$

โดยคอลัมน์ต่างๆ ของ U ได้จากเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยแต่ละค่าลักษณะเฉพาะ

ทฤษฎีบทที่ 2 ให้ $A \in M_n(\mathbb{C})$ เมทริกซ์ปรกติโดย $\sigma(A) = \{\lambda_1,...,\lambda_n\}$ จะได้ว่า

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^*$$

โดย $\{v_1, v_2,..., v_n\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะซึ่งสอดคล้องกับแต่ละค่าลักษณะเฉพาะ

นิยาม**ผลคูณภายใน** (inner product) ของเวกเตอร์ $x = [x_1\ x_2 ...\ x_n]^T$ และเวกเตอร์ $y = [y_1\ y_2 ...\ y_n]^T$ ใน $\mathbb{C}^n$ โดย

$$\langle x, y\rangle = y^* x = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

เรากล่าวว่า x **ตั้งฉาก**กับ y ก็ต่อเมื่อ $\langle x, y\rangle = 0$ เรานิยาม**นอร์ม**ของ x โดย $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

สำหรับ $x, y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ นิยามมุม (angle) ระหว่าง x กับ y เป็น

$$\cos^{-1}\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}\right) \in [0, \pi]$$

นิยามดังกล่าวนิยามดีแล้วเนื่องจากโดยอสมการโคชี-ชวาซ (Cauchy-Schwarz inequality) จะได้ว่า $|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$ สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{R}^n$

พิจารณา $A \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขต (bounded linear operator) จากปริภูมิ $\mathbb{C}^n$ ไปยัง $\mathbb{C}^n$ เรานิยามนอร์มของ A โดย

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n - \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

เมทริกซ์ยูนิแทรีใดๆ มีสมบัติการคงสภาพนอร์ม ผลคูณภายใน ภาวะตั้งฉากและมุม โดยมีนอร์มเป็น 1

3. แนวคิดของการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์

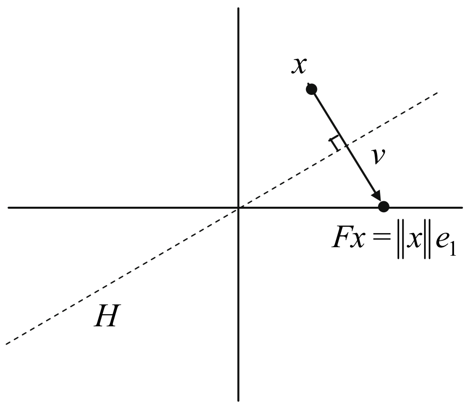
ต้องการสร้างตัวดำเนินการ F ที่ทำหน้าที่สะท้อนเวกเตอร์เทียบกับระนาบที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $v \neq 0$ ที่กำหนด ให้ $x \in \mathbb{R}^n$ ตัวดำเนินการ F จะต้องส่ง $x \to Fx$ โดยที่มีนอร์มเท่าเดิม นั่นคือ

$$x = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \vdots \\ \times \end{bmatrix} \xmapsto{F} Fx = \begin{bmatrix} \|x\| \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \|x\| e_1$$

เมื่อ $e_1 = [1\ 0\ ...\ 0]^T \in \mathbb{R}^n$ ซึ่งจะเห็นได้ว่า $\|x\| = \|Fx\|$ เราอาจเลือก

$$Fx = \begin{bmatrix} \pm\|x\| & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^T$$

พิจารณา $Fx = \begin{bmatrix} \|x\| & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^T$



รูปที่ 1 การสะท้อนเฮาส์โฮลเดอร์

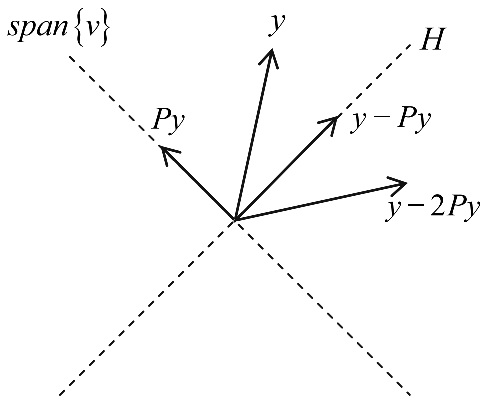
จากรูปที่ 1 ตัวสะท้อน F จะสะท้อน x ข้ามระนาบ H ซึ่งตั้งฉากกับ $v=\|x\|e_1-x$

สำหรับสูตรการสะท้อนสามารถหาได้ดังนี้ สำหรับแต่ละ $y\in\mathbb{R}^n$ จะได้ว่าภาพฉาย (projection) ของ y ไปบนเวกเตอร์ที่ขนานกับ v คือ

$$Py = \left(\frac{vv^T}{v^Tv}\right)y = v\left(\frac{v^Ty}{v^Tv}\right)$$

และภาพฉายของ y ไปบน H คือ

$$y-Py = y-v\left(\frac{v^Ty}{v^Tv}\right) = \left(I-\frac{vv^T}{v^Tv}\right)y$$



รูปที่ 2 ภาพฉายและการสะท้อนเฮาส์โฮลเดอร์

เนื่องจากตัวสะท้อน F จะต้องสะท้อน y ข้าม H จะได้ว่า

$$Fy = y-2Py = \left(I-2\frac{vv^T}{v^Tv}\right)y$$

ดังนั้นเมทริกซ์ F ที่ต้องการคือ

$$F = I-2\frac{vv^T}{v^Tv}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาบน $\mathbb{C}^n$ จะได้ว่าตัวสะท้อน F ที่ต้องการคือ

$$F = I-2\frac{vv^*}{v^*v}$$

บทนิยามที่ 3 ให้ $v\in\mathbb{C}^n-\{0\}$ นิยาม**การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์** H_v ที่สอดคล้องกับ v โดย

$$H_v = I-2\frac{vv^*}{\|v\|^2}$$

นิยามนี้สามารถขยายไปบนปริภูมิผลคูณภายใน (inner product space) ได้ดังนี้ V สำหรับแต่ละ $v\in V-\{0\}$ เรานิยาม

$$H_v(x) = x-2\frac{\langle x,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v,\ x\in V$$

สังเกตว่าการสะท้อนเฮาส์โฮลเดอร์ดังกล่าวกระทำกับเวกเตอร์ในแนวตั้ง (คอลัมน์) ในพีชคณิตเชิงเส้นเชิงเลข มีการแปลงที่คล้ายคลึงกับการแปลงข้างต้นดังนี้

การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์ไฮเพอร์โบลิก (hyperbolic Householder transformation) เป็นการสะท้อนที่กระทำกับเวกเตอร์ในแนวตั้งเช่นกัน โดยเป็นเมทริกซ์ที่อยู่ในรูปแบบ

$$P_v = \Phi-\frac{1}{\lambda}vv^T$$

เมื่อ $\lambda=(1/2)v^T\Phi v$ โดยที่ P_v เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากเทียม (pseudo-orthogonal matrix) เทียบกับเมทริกซ์ Φ ที่กำหนด นั่นคือ

$$P^T\Phi P=\Phi$$

การแปลงนี้ถูกศึกษาใน [15] และ [16] โดยมีการประยุกต์กับการแยกเมทริกซ์ ([8]) รูปแบบทั่วไปของการแปลงนี้ถูกศึกษาใน [4]

การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์แบบแถว (row Householder transformation) เป็นการสะท้อนที่กระทำกับเวกเตอร์ในแนวนอน (แถว) การแปลงนี้ถูกนำเสนอในงานวิจัย [3] ซึ่งเป็นการขยายแนวคิดของ [1] การแปลงดังกล่าวมีความหมายทางเรขาคณิตดังนี้ พิจารณาเวกเตอร์ 3 เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ การแปลงนี้จะทำหน้าที่สะท้อนระนาบซึ่งแผ่ทั่วโดยเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์เทียบกับระนาบ *YZ*

การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์ไฮเพอร์โบลิกแบบแถว (row hyperbolic Householder transformation) เป็นการสะท้อนที่กระทำกับเวกเตอร์ในแนวนอน (แถว) โดยใช้เมทริกซ์เชิงตั้งฉากเทียม การแปลงนี้ถูกนำเสนอใน [3]

4. สมบัติทางพีชคณิตและเรขาคณิตของการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์

หัวข้อนี้จะพิจารณาสมบัติทางพีชคณิตและเรขาคณิตของการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์ในมุมมองของทฤษฎีตัวดำเนินการ สมบัติดังกล่าวสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ใน [9] และ [18]

พิจารณาการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์ H_v สำหรับแต่ละ $v \in \mathbb{C}^n - \{0\}$

ทฤษฎีบทที่ 4 H_v เป็นตัวดำเนินการยูนิแทรีและตัวดำเนินการเฮอร์มิเชียน

บทพิสูจน์ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} H_v^* H_v &= \left(I - 2\frac{vv^*}{\|v\|^2} \right)^* \left(I - 2\frac{vv^*}{\|v\|^2} \right) \\ &= I - 2\frac{vv^*}{\|v\|^2} - 2\frac{vv^*}{\|v\|^2} + 4\frac{vv^*vv^*}{\|v\|^4} \\ &= I \end{aligned}$$

ดังนั้น H_v เป็นตัวดำเนินการยูนิแทรี นอกจากนี้เราได้ว่า

$$H_v^* = \left(I - 2\frac{vv^*}{\|v\|^2} \right)^* = I - 2\frac{vv^*}{\|v\|^2} = H_v$$

นั่นคือ H_v เป็นตัวดำเนินการเฮอร์มิเชียน

เนื่องจาก H_v เป็นตัวดำเนินการยูนิแทรี จะได้ว่า H_v มีสมบัติทางเรขาคณิตดังนี้

(1) H_v มีสมบัติการคงสภาพนอร์ม นั่นคือ $\|H_v(x)\| = \|x\|$ สำหรับทุก $v \in \mathbb{C}^n$ ดังนั้น $\|H_v\| = 1$

(2) H_v มีสมบัติการคงสภาพผลคูณภายในนั่นคือ $\langle H_v(x), H_v(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{C}^n$

(3) H_v มีสมบัติการคงสภาพมุม นั่นคือสำหรับทุก $x, y \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ จะได้ว่ามุมระหว่าง x กับ y เท่ากับมุมระหว่าง $H_v(x)$ กับ $H_v(y)$

(4) H_v ส่งเซตเชิงตั้งฉากไปเป็นเซตเชิงตั้งฉาก นั่นคือ ถ้า $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subseteq \mathbb{C}^n$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก แล้ว $\{H_v(x_1), H_v(x_2), ..., H_v(x_k)\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก

บทแทรกที่ 5 H_v เป็นตัวดำเนินการอาวัตนาการ

บทพิสูจน์ เนื่องจาก H_v เป็นตัวดำเนินการเฮอร์มิเชียนและตัวดำเนินการยูนิแทรีดังทฤษฎีบทที่ 4 จะได้ว่า

$$H_v^2 = H_v H_v = H_v^* H_v^* = I$$

นั่นคือ H_v เป็นตัวดำเนินการอาวัตนาการ

กล่าวในเชิงเรขาคณิต ตัวสะท้อนเฮาส์โฮลเดอร์ H_v จะสะท้อนเวกเตอร์เทียบกับระนาบหนึ่ง เมื่อเราทำการสะท้อนอีกครั้งเทียบกับระนาบเดิม เราจะได้เวกเตอร์เดิม

ทฤษฎีบทที่ 6 H_v เป็นตัวดำเนินการสะท้อนบนปริภูมิย่อยที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ทั้งหมดที่ขนานกับ v และเป็นตัวดำเนินการเอกลักษณ์บนปริภูมิย่อยที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ทั้งหมดที่ตั้งฉากกับ v นั่นคือ

$$H_{\mathrm{v}}(x) = \begin{cases} -x, & x \in \operatorname{span}\{v\} \\ x, & x \in (\operatorname{span}\{v\})^{\perp} \end{cases}$$

บทพิสูจน์ ให้ $x \in \operatorname{span}\{v\}$ นั่นคือ $x = \alpha v$ สำหรับบางสเกลาร์ α จะได้ว่า

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{v}}(x) &= x - 2\frac{vv^*}{\|v\|^2}x = x - 2\frac{v^*x}{\|v\|^2}v \\ &= \alpha v - 2\frac{v^*(\alpha v)}{\|v\|^2}v = -x \end{aligned}$$

พิจารณา $x \in \mathbb{C}^n$ ซึ่งตั้งฉากกับ v จะได้ว่า

$$H_v(x) = x - 2\frac{vv^*}{\|v\|^2}x = x - 2\frac{v^*x}{\|v\|^2}v = x$$

เมื่อพิจารณาทฤษฎีบทที่ 6 ร่วมกับการเขียน $\mathbb{C}^n$ ในรูปผลบวกตรง (direct sum) ระหว่างสองปริภูมิย่อยดังนี้

$$\mathbb{C}^{\mathrm{n}} = \operatorname{span}\{v\} \oplus (\operatorname{span}\{v\})^{\perp}$$

สำหรับแต่ละ $x \in \mathbb{C}^n$ เราสามารถเขียน

$$x = y + z$$

เมื่อ $y \in \text{span}\{v\}$ (นั่นคือ y ขนานกับ v) และ $z \in \text{span}\{v\}^{\perp}$ (นั่นคือ y ตั้งฉากกับ v) ได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น จะได้ว่า H_v ทำหน้าที่ส่ง

$$x \mapsto H_v(x) = H_v(y) + H_v(z) = y - z$$

ทฤษฎีบทที่ 7 H_v มีค่าลักษณะเฉพาะเป็น 1 และ -1 โดย $1 \in \sigma(H_v)$ มีภาวะซ้ำเป็น $n-1$ และ $-1 \in \sigma(H_v)$ มีภาวะซ้ำเป็น 1

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $H_v(v)$ และมิติของ $\text{span}\{v\}$ เท่ากับ 1 ดังนั้น $-1 \in \sigma(H_v)$ โดยมีภาวะซ้ำเป็น 1

ให้ $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ โดย x ตั้งฉากกับ v จะได้ว่า $H_v(x) = x$ นั่นคือ 1 เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ H_v ที่สอดคล้องกับเวกเตอร์ x จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}\dim((\text{span}\{v\})^{\perp}) &= \dim(\mathbb{C}^n) - \dim((\text{span}\{v\}) \\ &= n-1\end{aligned}$$

ดังนั้น $1 \in \sigma(H_v)$ มีภาวะซ้ำเป็น $n-1$

บทแทรกที่ 8 การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์เป็นเมทริกซ์ปรกติซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

$$U \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} U^*$$

สำหรับบางเมทริกซ์ยูนิแทรี

บทพิสูจน์ ได้จากทฤษฎีบทที่ 1 และทฤษฎีบทที่ 7

บทแทรกที่ 9 H_v สามารถเขียนได้ในรูป

$$H_v = -v_1 v_1^* + \sum_{i=2}^{n} v_i v_i^*$$

เมื่อ v_1 เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกับ $-1 \in \sigma(H_v)$ และ $v_2, \ldots, v_n$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกับ $1 \in \sigma(H_v)$

บทพิสูจน์ ได้จากทฤษฎีบทที่ 2 และทฤษฎีบทที่ 7

บทแทรกที่ 10 เราได้ว่า $\text{der}(H_v) = -1$ และ $\text{tr}(H_v) = n-1$

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบทที่ 7 จะได้

$$\begin{aligned}\det(H_v) &= \prod_{\lambda \in \sigma(H_v)} \lambda = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-1 \text{ พจน์}} \cdot (-1) = -1 \\ \text{tr}(H_v) &= \sum_{\lambda \in \sigma(H_v)} \lambda = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n-1 \text{ พจน์}} + (-1) \\ &= n-2\end{aligned}$$

ทฤษฎีบทที่ 11 สำหรับแต่ละ $x, y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ ซึ่งมีนอร์มเท่ากัน จะได้ว่ามีการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์ซึ่งส่ง x ไปเป็น y

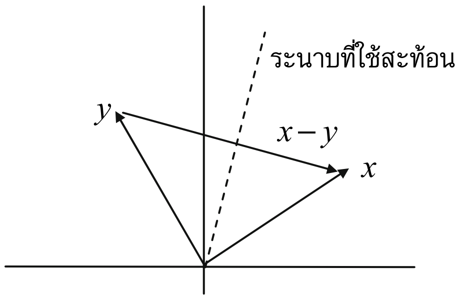
บทพิสูจน์ ให้ $x, y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ โดย $\|x\| = \|y\|$ จะได้

$$\begin{aligned}(x+y)^T(x-y) &= x^T x + y^T x - x^T y - y^T y \\ &= x^T x - y^T y = 0\end{aligned}$$

นั่นคือ $x + y$ ตั้งฉากกับ $x - y$ เมื่อพิจารณา $v = x - y$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}H_v(x) &= H_v\left(\frac{1}{2}(x + y + x - y)\right) \\ &= \frac{1}{2}\big(H_v(x+y) + H_v(x-y)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big((x+y) - (x-y)\big) \\ &= y\end{aligned}$$

กล่าวในเชิงเรขาคณิต การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์ที่ส่งเวกเตอร์ x ไปเป็นเวกเตอร์ y ซึ่งมีนอร์มเท่าเดิม จะสะท้อน x เทียบกับระนาบที่ตั้งฉากกับ $x - y$ ดังรูป



รูปที่ 3 การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์ที่ส่งเวกเตอร์ x ไปเป็นเวกเตอร์ y

5. ตัวสะท้อนมูลฐาน (Elementary reflector)

ในหัวข้อนี้ เราจะแสดงให้เห็นว่าทุกเมทริกซ์ยูนิแทรีสามารถเขียนในรูปผลคูณของตัวสะท้อนมูลฐานได้ (ดูเอกสาร [2] เพิ่มเติม)

บทนิยามที่ 12 ตัวสะท้อนมูลฐาน คือ เมทริกซ์ที่อยู่ในรูปแบบ

$$H_v = I - \alpha v v^*$$

สำหรับบาง $v \in \mathbb{C}^n$ และ $\alpha \in \mathbb{C}$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} H_v H_v^* &= (I-\alpha vv^*)(I-\alpha vv^*)^* \\ &= I - \left(2\operatorname{Re}(\alpha) + |\alpha|^2 \|v\|^2\right) = vv^* \end{aligned}$$

เมื่อ Re หมายถึงส่วนจริง (real part) เพราะฉะนั้นสำหรับ $v \neq 0$ จะได้ว่า H_v เป็น เมทริกซ์ยูนิแทรีก็ต่อเมื่อ

$$-2\operatorname{Re}(\alpha) + |\alpha|^2 \|v\|^2 = 0$$

ทฤษฎีบทที่ 13 ให้ $U \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรี จะได้ว่า U สามารถเขียนในรูปผลคูณของตัวสะท้อนมูลฐานได้ นั่นคือ

$$U = \prod_{i=1}^{n}\left(I - \alpha_i w_i w_i^*\right)$$

โดยแต่ละ w_i เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ U และ $\alpha_i \in \mathbb{C}$

บทพิสูจน์ เขียน $\sigma(U) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ โดยทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ว่า

$$U = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^*$$

โดย $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปรกติที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ v_i ซึ่งสอดคล้องกับ $\lambda_i \in \sigma(U)$

ต้องการเขียน U ในรูปผลคูณของตัวสะท้อนมูลฐานดังนี้

$$U = \prod_{i=1}^{n} H_i$$

เมื่อ $H_i = I - \alpha_i w_i w_i^*$ และ $w_i = t_i w_i$ สำหรับบางสเกลาร์ t_i

เพื่อให้ได้ว่าแต่ละ H_i เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรี ค่าคงตัว α_i และ t_i ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$-2\operatorname{Re}(\alpha_i) + |\alpha_i|^2 |t_i|^2 = 0$$

เนื่องจากแต่ละ v_i เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกับ λ_i จะได้ว่า

$$H_i v_i = \lambda_i v_i$$

ในอีกทางหนึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{I} - \alpha_i w_i w_i^*\right) v_i &= \left(I - \alpha_i (t_i v_i)(t_i v_i)^*\right) v_i \\ &= \left(1 - \alpha_i |t_i|^2\right) v_i \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\left(1 - \alpha_i |t_i|^2\right) v_i = \lambda_i v_i$$

จะได้ระบบสมการ

$$-2\operatorname{Re}(\alpha_i) + |\alpha_i|^2 |t_i|^2 = 0$$

$$1 - \alpha_i |t_i|^2 = \lambda_i$$

เราสามารถหาผลเฉลย α_i และ t_i ที่ทำให้ H_i เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรีและ $U = \prod_{i=1}^{k} H_i$ ตามต้องการ

6. บทสรุป

การแปลงเฮาส์โฮลเดอร์เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่ทำหน้าที่สะท้อนเวกเตอร์ใดๆ เทียบกับระนาบที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ที่กำหนด การแปลงนี้เป็นตัวดำเนินการยูนิแทรีและตัวดำเนินการเฮอร์มิเชียน จึงมีสมบัติทางเรขาคณิตที่น่าสนใจ ได้แก่ การคงสภาพนอร์ม การคงสภาพภาวะตั้งฉากและมุมระหว่างเวกเตอร์ ยิ่งกว่านั้นทุกเมทริกซ์-ยูนิแทรีสามารถเขียนในรูปผลคูณของตัวสะท้อนมูลฐานซึ่งมีรูปแบบที่ใกล้เคียงกับการแปลงเฮาส์โฮลเดอร์

7. เอกสารอ้างอิง

1. Bartels, R. and Kaufman, L., 1986, "Cholesky Factor Updating Techniques for Rank 2 Matrix Modifications," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 10, pp. 557-592.

2. Bernstein, D.S., 2005, Matrix Mathematics : Theory, Facts and Formulas with Application to Linear Systems Theory, Princeton University Press, New Jersey, pp. 216-217.

3. Bojanczyk, A.W., Nagy, J.G. and Plemmons, R.J., 1993, "Block RLS Using Row Householder Reflections," *Linear Algebra and Its Applications*, 188-189, pp. 31-61.

4. Bojanczyk, A.W. and Siao, S., 2000, "Unifying Unitary and Hyperbolic Transformations," *Linear Algebra and Its Applications*, 316, pp. 183-197.

5. Bojanczyk, A.W. and Steinhardt, A. O., 1991, "Stability Analysis of a Householder-based Algorithm for Downdating the Cholesky factorization," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 12, pp. 1255–1265.

6. Cabrera, R., Strohecker, T. and Rabitz, H., 2010, "The Canonical Coset Decomposition of Unitary Matrices through Householder Transformations," *Journal of Mathematical Physics*, 51, pp. 1-7.

7. Cipra, B., 2000. "The Best of the 20th Century: Editors Name Top 10 Algorithms," SIAM News, 33 (4), pp. 1-2.

8. Cybenko, G. and Berry, M., 1990, "Hyperbolic Householder algorithms for factoring structured matrices," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 11 (4), pp. 499-520.

9. Demmel, J.W., 1997, Applied Numerical Linear Algebra, SIAM, Philadephia, pp. 119-121.

10. Golub, G.H. and Van Loan, C.F., 1996, Matrix Computations, 3rd ed., The Johns Hopkins University Press, Baltimore, pp. 234-259.

11. Householder, A.S., 1958, "Unitary Triangularization of a Nonsymmetric Matrix," Journal of the ACM, 5 (4), pp. 339-342.

12. LaBudde, C.D., 1963, "The Reduction of an Arbitrary Real Square Matrix to Tridiagonal Form using Similarity Transformations," *Mathematics of Computation (American Mathematical Society)*, 17(84), pp. 433-437.

13. Liu, K.J.R., Hseih, S. F. and Yao, K., 1990, "RLS Filtering using Householder Transformations," *Proceedings of ZCASSP*, Albuquerque, N. Mex., pp. 1631-1634.

14. Morrison, D.D., 1960, "Remarks on the Unitary Triangularization of a Nonsymmetric Matrix," *Journal of the ACM*, 7(2), pp. 185-186.

15. Rader, C.M. and Steinhardt, A.O., 1986, "Hyperbolic Householder transformations," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 34(6), pp. 1589-1602.

16. Rader, C.M. and Steinhardt, A.O., 1988, "Hyperbolic Householder Reflections," SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 9, pp. 269-290.

17. Steinhardt, A., 1988, "Householder Transformations in Signal Processing," *IEEE ASSP Magazine*, July, pp. 4-12.

18. Trefethen, L.N. and Bau III, D., 1997, Numerical Linear Algebra, SIAM, Philadephia, pp. 70-73.