การคำนวณปัญหาเขื่อนแตกชนิด 2 มิติ โดยใช้ ADI Scheme พื้นฐานบนเทคนิค Split Flux

สนิท วงษา [1]
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาการไหลแบบไม่คงที่ที่มีผิวอิสระชนิด 2 มิติ และปัญหาเขื่อนแตก โดยใช้กระบวนการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนแบบ Alternating Direction Implicit (ADI) scheme ซึ่งมีพื้นฐานบนเทคนิค Split flux ร่วมกับการแยกการคำนวณแบบ Implicit กับ Explicit ของสมการโมเมนตัม เพื่อจำลองสถานะการณ์การเคลื่อนที่ของคลื่นน้ำกรณีเขื่อนแตกชนิด 2 มิติ และสามารถคำนวณการไหลที่เปลี่ยนแปลงจากการไหลแบบใต้วิกฤติเป็นการไหลแบบเหนือวิกฤติได้เป็นอย่างดี รายละเอียดและขอบเขตรอบนอกกับสภาพเริ่มต้นของแบบจำลองได้มีการอธิบายพร้อมทั้งแสดงผลการคำนวณและเปรียบเทียบกับแบบจำลองที่มีอยู่แล้ว เพื่อแสดงความสามารถในการนำเอาแบบจำลองที่พัฒนาขึ้นไปประยุกต์ใช้

---

[1] *อาจารย์ ภาควิชาครุศาสตร์โยธา*

Two-dimensional Dam-break Problem with ADI Scheme based on Split Flux

Sanit Wongsa [1]

King Mongkut's University of Technology Thonburi

Abstract

A two-dimensional unsteady free surface flows and numerical model for dam-break problem is developed in this paper. An Alternating Direction Implicit (ADI) finite difference scheme based on split flux techniques with combination of implicit and explicit scheme solves momentum equations independently and is applied to simulate dam-break flood wave propagation in two-dimensions. Flows with simultaneous presence of supercritical and subcritical regions can be analyzed by the proposed model. Details of the model and various boundary and initial conditions are described. Some numerical results and comparisons with other existing models are presented to demonstrate applicability of the proposed model.

[1] *Lecturer, Department of Civil Technology Education*

บทนำ

การศึกษาด้านชลศาสตร์ของน้ำท่วมอันเนื่องมาจากกรณีเขื่อนหรือฝายแตกพังทลาย เป็นปัญหาที่อยู่บนพื้นฐานของการไหลแบบเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว (Rapidly varied flow) มีความสำคัญต่อกิจกรรมของมนุษย์และสิ่งแวดล้อมเป็นอย่างมาก ในกรณีที่เขื่อนหรือฝายด้านเหนือน้ำพังทลายลงมาจะมีผลทำให้เกิดความเสียหายและผลกระทบอย่างใหญ่หลวงต่อชีวิตและทรัพย์สินในบริเวณด้านท้ายน้ำ การตัดไม้ทำลายป่าบริเวณต้นน้ำ กอปรกับมีแหล่งชุมชนขนาดใหญ่ตามที่ราบปากแม่น้ำนั้น การเกิดน้ำท่วมฉับพลันจะมีผลทำให้น้ำท่วมเคลื่อนตัวไปยังพื้นที่ราบด้านท้ายน้ำและสันคันกั้นน้ำ เพื่อเป็นการป้องกันความเสียหายข้างต้นในขั้นตอนการออกแบบและปฏิบัติการต่างๆ ต่ออาคารทางชลศาสตร์ จึงมีความจำเป็นต้องทำการวิเคราะห์การเคลื่อนตัวของน้ำหลากอันจะเกิดจากความเสียหายหรือพังทลายของโครงสร้างอาคารชลศาสตร์ที่จะทำการก่อสร้าง การวิเคราะห์และทำนายระดับน้ำและเวลาในการเคลื่อนที่ของคลื่นน้ำท่วมอย่างแม่นยำก็จะสามารถบรรเทาความเสียหายอันจะเกิดขึ้นได้ในระดับหนึ่ง

การศึกษาการไหลแบบไม่คงที่ในทางน้ำเปิดที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ การเคลื่อนตัวของคลื่นน้ำ (Bore) ที่เกิดจากการเปิดปิดประตูน้ำแบบฉับพลัน เขื่อนแตกแบบฉับพลัน เป็นต้น การศึกษาเหล่านี้เป็นหัวข้อวิจัยสำคัญในหลายทศวรรษที่ผ่านมา แต่ส่วนใหญ่จำกัดเฉพาะการไหลชนิด 1 มิติ เพราะในการวิเคราะห์สามารถทำโดยการแก้สมการอนุพันธ์ควบคุมการไหล แต่ถึงอย่างไรก็ตามการแก้สมการอนุพันธ์จะสามารถทำได้ในกรณีที่ลดรูปให้เป็นสมการอย่างง่ายเท่านั้น ซึ่งไม่เหมาะสมในการนำมาประยุกต์ใช้กับสภาพความเป็นจริง อย่างไรก็ตามการศึกษาของ Stoker [1] แสดงสมการวิเคราะห์ที่เหมาะสมในการนำเอามาประยุกต์กับการคำนวณโดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ แต่ก็มีข้อจำกัดเรื่องปัญหาของเวลาและประสิทธิภาพการคำนวณ รวมทั้งการนำเอาลักษณะทางกายภาพของภูมิประเทศเข้าร่วม เมื่อเปรียบเทียบกับการคำนวณเชิงตัวเลขแล้วจะมีความเหมาะสมน้อยกว่า

ในการศึกษาที่ผ่านมาพบว่าส่วนใหญ่เป็นการศึกษาปัญหาเขื่อนแตกชนิด 1 มิติ เพื่อแก้สมการของ Saint Venant (เช่น Mahmood และ Yevjevich [2], Cunge และคณะ [3], Abbott [4] และ Jha [5] เป็นต้น) สำหรับปัญหาเขื่อนแตกชนิด 2 มิติ นั้น ยังไม่มีการทำวิจัยอย่างกว้างขวาง ทั้งนี้เนื่องจากเซตของสมการอนุพันธ์ควบคุมการไหลชนิด 2 มิติมีลักษณะไร้เชิงเส้นไม่สามารถหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ได้ การพัฒนาโปรแกรมทำได้ยาก การคำนวณกรณีพื้นที่ทุ่งน้ำท่วมเป็นพื้นแห้ง (Dry bed) ทำไม่ได้ อีกทั้งสภาพการไหลที่มีการเปลี่ยนแปลงจากการไหลใต้วิกฤติเป็นการไหลเหนือวิกฤติ หรือในทางกลับกันในระนาบ 2 มิติ อันก่อให้เกิดความไร้เสถียรภาพ (Unstable) และลดความแม่นยำในการคำนวณลง

Hromadka II และ Yen [6] ได้สร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ชนิด 2 มิติและ 1 มิติ เพื่อศึกษาปัญหาเขื่อนแตก การพังทลายของทำนบกั้นน้ำ และการเคลื่อนตัวของน้ำหลาก โดยใช้ Diffusion routing techniques พบว่าสามารถทำนายการเคลื่อนตัวของน้ำหลากได้เป็นอย่างดี แต่ในการไหลที่มีการเปลี่ยนแปลงระหว่างการไหลใต้วิกฤติเป็นการไหลเหนือวิกฤติหรือในทางกลับกันนั้น แบบจำลองนี้ไม่มีความเหมาะสม

Fennema [7], Fenn

Gabutti และ Beam and W

คำนวณกับผลการทดลองใช้ค

จำลองทั้ง 3 สามารถคำนวณเ

scheme มีปัญหาการสั่น (Osc

สังเคราะห์ของ Jameson พบ

Fraccarollo และ To

การคำนวณกับผลการทดลอ

ระดับน้ำและการเคลื่อนที่ขอ

แสดงให้เห็นว่าสนามความเร็ว

สมมติฐานเบื้องต้นเพื่อแก้สมการอนุพันธ์ควบคุมการไหล (สมการที่ (1) และ (2)) ประกอบด้วย

(1) ของไหลที่มีความหนาแน่นคงที่ (ρ = const.)

(2) ความเร็วและความเร่งในแนวดิ่งมีค่าน้อยมาก

(3) ความลาดชันของพื้นที่มีค่าน้อยมาก

(4) แรงหนีศูนย์กลาง (Coriolis force) และแรงเฉือนของลมไม่นำมาพิจารณา

เมื่อทำการอินทริเกรทสมการอนุพันธ์โดยใช้สมมติฐานข้างต้น ก็จะได้สมการการไหลน้ำตื้น (Shallow water equations) ซึ่งสามารถแสดงในรูปแบบ Conservative ของเวคเตอร์ (Mahmood และ Yevjevich [2]) ได้ดังนี้ คือ

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y} + \boldsymbol{S} = 0 \quad (3)$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} uh \\ u^2 h + 0.5gh^2 \\ uvh \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2 h + 0.5gh^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh\left(S_{ox} - S_{fx}\right) \\ -gh\left(S_{oy} - S_{fy}\right) \end{bmatrix} \quad \text{(4a) - (4d)}$$

โดยที่ h เป็น ความสูงของระดับน้ำ

S_{ox}, S_{oy} เป็น ความลาดของพื้นที่ในแนวแกน (x, y)

S_{fx}, S_{fy} เป็น ความลาดของความเสียดทานในแนวแกน (x, y)

ซึ่งค่า S_{fx}, S_{fy} สามารถคำนวณโดยใช้สมการของแมนนิ่งดังนี้ คือ

$$S_{fx} = \frac{n^2 u\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \qquad S_{fy} = \frac{n^2 v\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (5)$$

โดยที่ n เป็น ค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานของแมนนิ่ง

สมการที่ (4) สามารถแปลงให้อยู่รูปของสมการแบบ non-conservative ได้โดยใช้หลักการ Jacobian ซึ่งจะได้ว่า

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} = \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = \boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} \quad (6)$$

โดยที่ A, B เป็น ค่า Jacobian ของ E, F ตามลำดับ และเขียนได้ดังนี้ คือ

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + gh & 0 & 2v \end{bmatrix} \quad \text{(7a) - (7b)}$$

นำไปแทนค่าในสมการที่ (3) จะได้ว่า

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} + \boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y} + \boldsymbol{S} = 0 \tag{8}$$

สำหรับการเลือกใช้รูปแบบสมการอนุพันธ์ควบคุมการไหลขึ้นอยู่กับประเภทและสภาพการไหล ความซับซ้อนของหน้าตัดพื้นที่การไหล ชนิดของรูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และจุดประสงค์ของการสร้างสถานการณ์จำลอง

เนื่องจากสมการพื้นฐานเป็นระบบสมการแบบไฮเปอร์โบลิค จึงสามารถแสดงค่าเวคเตอร์ A, B ให้อยู่ในรูปของ

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e_A D_A e_A^{-1}} = \frac{1}{2c}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -(u+c) & u-c \\ 2c & -u & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -v & 0 & 1 \\ u-c & -1 & 0 \\ u+c & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e_B D_B e_B^{-1}} = \frac{1}{2c}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2c & -u & u \\ 0 & -(v+c) & v-c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -u & 1 & 0 \\ v-c & 0 & -1 \\ v+c & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

โดยที่ D_A, D_B เป็น เมตริกซ์แนวทแยงของ A, B

e_A, e_B เป็น ไอเกนเวคเตอร์ของ A, B

e_A^{-1}, e_B^{-1} เป็น ส่วนกลับไอเกนเวคเตอร์ของ A, B

λ, ω เป็น ค่าไอเกนของ A, B ตามลำดับ

เทคนิค Split flux

การประยุกต์เทคนิค Split flux (Anderson และคณะ [11]) ทำได้โดยแยกค่าไอเกนเป็นค่าบวกและลบ ดังแสดงในสมการที่ (11) คือ

$$\lambda_i = 0.5\left(\lambda_i \pm |\lambda_i|\right), \qquad \omega_i = 0.5\left(\omega_i \pm |\omega_i|\right) \tag{11}$$

จากสมการที่ (9) และ (10) จะได้ว่า

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e_A}\left(\boldsymbol{D_A^+} + \boldsymbol{D_A^-}\right)\boldsymbol{e_A^{-1}} = \boldsymbol{e_A D_A^+ e_A^{-1}} + \boldsymbol{e_A D_A^- e_A^{-1}} = \boldsymbol{A^+} + \boldsymbol{A^-} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e_B}\left(\boldsymbol{D_B^+} + \boldsymbol{D_B^-}\right)\boldsymbol{e_B^{-1}} = \boldsymbol{e_B D_B^+ e_B^{-1}} + \boldsymbol{e_B D_B^- e_B^{-1}} = \boldsymbol{B^+} + \boldsymbol{B^-} \tag{13}$$

แทนค่าสมการที่ (12) และ (13) ลงในสมการที่ (8) จะได้สมการการไหลน้ำตื้นชนิด 2 มิติบนพื้นฐานเทคนิค Split flux ดังนี้ คือ

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{A^+}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} + \boldsymbol{A^-}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} + \boldsymbol{B^+}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y} + \boldsymbol{B^-}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y} + \boldsymbol{S} = 0 \tag{14}$$

สภาพเริ่มต้นและขอบเขตรอบนอก

การคำนวณสามารถหาค่าปริมาณต่าง ๆ ในพื้นที่การไหลได้โดยการคำนวณเชิงตัวเลขโดยตรง แต่ไม่สามารถประยุกต์ใช้กับส่วนที่เป็นขอบเขตรอบนอก เมื่อแก้สมการในส่วนที่เป็นขอบเขตรอบนอก จำเป็นต้องทราบค่าขอบเขตรอบนอกของพื้นที่การไหลก่อนและจะใช้เป็นข้อมูลป้อนเข้า ซึ่งข้อมูลเหล่านี้หาได้จากการเก็บข้อมูลในสนามหรือกำหนดขึ้น หรือวิธีการอื่นๆ ส่วนสภาพเริ่มต้นซึ่งเป็นค่าเริ่มแรกในการคำนวณจะถูกป้อนโดยตรง

การประยุกต์สภาพขอบเขตรอบนอกของการไหลชนิด 2 มิติ ข้อมูลการไหลถูกส่งผ่านเส้น Characteristic จำนวน 2 คู่ จากด้านเหนือน้ำสู่พื้นที่การคำนวณโดยส่งผ่านบนระนาบรูปทรงกรวย (Coniod) สู่ระนาบของเวลาใหม่ ทำให้การคำนวณมีความยุ่งยากกว่าชนิด 1 มิติ มาก ในการศึกษานี้ได้ประยุกต์สมการ Compatibility มาใช้ในการคำนวณค่าของสภาพขอบเขตรอบนอกสามารถสร้างสมการโดยการคูณส่วนกลับไอเกนเวคเตอร์เข้าไป ผลลัพธ์ที่ได้เป็นดังนี้

$$e_A^{-1}\frac{\partial U}{\partial t}+D_A e_A^{-1}\frac{\partial U}{\partial x}+e_A^{-1}e_B D_B e_B^{-1}\frac{\partial U}{\partial y}+e_A^{-1}S=0 \qquad (15)$$

$$e_B^{-1}\frac{\partial U}{\partial t}+e_B^{-1}e_A D_A e_A^{-1}\frac{\partial U}{\partial x}+D_B e_B^{-1}\frac{\partial U}{\partial y}+e_B^{-1}S=0 \qquad (16)$$

สมการ Alternating Direction Implicit (ADI) Scheme

เมื่อกระจายสมการอนุพันธ์ควบคุมการไหล (สมการที่ (14)) จะได้ว่า

สมการการไหลต่อเนื่อง;

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial\left(A_{11}^{+}h\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(A_{11}^{-}h\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(A_{12}^{+}uh\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(A_{12}^{-}uh\right)}{\partial x}$$
$$+\frac{\partial\left(B_{11}^{+}h\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(B_{11}^{-}h\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(B_{13}^{+}vh\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(B_{13}^{-}vh\right)}{\partial y}=0 \qquad (17)$$

สมการโมเมนตัมในแนวแกน x;

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t}+A_{21}^{+}\frac{\partial h}{\partial x}+A_{21}^{-}\frac{\partial h}{\partial x}+A_{22}^{+}\frac{\partial(uh)}{\partial x}+A_{22}^{-}\frac{\partial(uh)}{\partial x}+B_{21}^{+}\frac{\partial h}{\partial y}+B_{21}^{-}\frac{\partial h}{\partial y}$$
$$+B_{22}^{+}\frac{\partial(uh)}{\partial y}+B_{22}^{-}\frac{\partial(uh)}{\partial y}+B_{23}^{+}\frac{\partial(vh)}{\partial y}+B_{23}^{-}\frac{\partial(vh)}{\partial y}-gh\left(S_{ox}-S_{fx}\right)=0 \qquad (18)$$

สมการโมเมนตัมในแนวแกน y;

$$\frac{\partial(vh)}{\partial t} + A_{31}^{+}\frac{\partial h}{\partial x} + A_{31}^{-}\frac{\partial h}{\partial x} + A_{32}^{+}\frac{\partial(uh)}{\partial x} + A_{32}^{-}\frac{\partial(uh)}{\partial x} + A_{33}^{+}\frac{\partial(vh)}{\partial x} + A_{33}^{-}\frac{\partial(vh)}{\partial x}$$

$$+ B_{31}^{+}\frac{\partial h}{\partial y} + B_{31}^{-}\frac{\partial h}{\partial y} + B_{33}^{+}\frac{\partial(vh)}{\partial y} + B_{33}^{-}\frac{\partial(vh)}{\partial y} - gh\left(S_{oy} - S_{fy}\right) = 0 \qquad \textbf{(19)}$$

โดยที่ สัญลักษณ์ + กับ - แสดงฟลักซ์ที่ส่วนประกอบเป็นค่าบวกกับค่าลบ ตามลำดับ

Ponce และ Yabusaki [12] ได้เสนอวิธีการแก้สมการโดยใช้ Multi operation ใช้วิธีแบ่งครึ่งช่วงเวลา $\Delta t/2$ และมิติของระยะทาง เมื่อนำมาประยุกต์กับปัญหาเขื่อนแตก พบว่าวิธีการคำนวณนี้ไร้เสถียรภาพ Jha และคณะ [13] แนะนำว่าถ้าคำนวณโดยวิธี Forward กับ Backward difference ตามทิศทางบวกกับลบของฟลักซ์ในมิติของระยะทางซึ่งมีความแม่นยำลำดับที่ 1 การคำนวณจะมีเสถียรภาพ ซึ่งแบบหลังได้ถูกนำมาใช้ในการศึกษานี้

การคำนวณแบ่งออกได้เป็น 2 ขั้นตอน โดยในขั้นแรกจะแยกการคำนวณเป็นคู่สมการของสมการการไหลต่อเนื่องกับสมการโมเมนตัมในแนวแกน x แสดงเป็นบล็อกเมตริกซ์ตามแบบ ADI scheme และสมการโมเมนตัมในแนวแกน y เป็น Forward-backward explicit scheme และจะทำการสลับคู่ของสมการโมเมนตัมในขั้นที่สอง ซึ่งมีรายละเอียดของการคำนวณดังนี้ คือ

ขั้นที่ 1; จากสมการที่ (17) และ (18) แสดงในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้ คือ

$$\boldsymbol{KU}_{i-1,j}^{t+\Delta t/2} + \boldsymbol{LU}_{i,j}^{t+\Delta t/2} + \boldsymbol{MU}_{i+1,j}^{t+\Delta t/2} + \boldsymbol{P} = \boldsymbol{0} \qquad \textbf{(20)}$$

โดยที่ K, L และ M เป็น เมตริกซ์ขนาด (2×2)

p เป็น แถวเวคเตอร์

Δt เป็น ช่วงระยะเวลาในการคำนวณ

เมื่อกระจายเวคเตอร์ K, L และ M เขียนเป็น

$$K_{11} = -\alpha_x\left[A_{11}^{+}\right]_{i-1,j}, \quad K_{12} = -\alpha_x\left[A_{12}^{+}\right]_{i-1,j}$$

$$K_{21} = -\alpha_x\left[A_{21}^{+}\right]_{i-1,j}, \quad K_{22} = -\alpha_x\left[A_{22}^{+}\right]_{i-1,j} \qquad (21a)\text{-}(21d)$$

$$L_{11} = \left[1 + \alpha_x\left(A_{11}^{+} - A_{11}^{-}\right)\right]_{i,j} \quad L_{12} = \alpha_x\left[\left(A_{12}^{+} - A_{12}^{-}\right)\right]_{i,j}$$

$$L_{21} = \left[\alpha_x\left(A_{21}^{+} - A_{21}^{-}\right) - gS_{ox}\right], \qquad \textbf{(22a)-(22d)}$$

$$L_{22}=\left[1+\alpha_x\left(A_{22}^{+}-A_{22}^{-}\right)+\left(\frac{g\sqrt{\left(u_{i,j}^t\right)^2+\left(v_{i,j}^t\right)^2}}{\left(h_{i,j}^t\right)^{4/3}}\right)\cdot\left(\frac{n_{i,j}+n_{i+1,j}}{2}\right)^2\right]$$

$$M_{11}=\alpha_x\left[A_{11}^{-}\right]_{i+1,j}\ ,\ M_{12}=\alpha_x\left[A_{12}^{+}\right]_{i+1,j}$$

$$M_{21}=\alpha_x\left[A_{21}^{-}\right]_{i+1,j}\ ,\ M_{22}=\alpha_x\left[A_{22}^{+}\right]_{i+1,j} \quad \textbf{(23a)-(23d)}$$

และเวคเตอร์ P จะได้ว่า

$$P_1=\alpha_y\Big[-\left\{B_{11}^{+}h+B_{13}^{+}(vh)\right\}_{i-1,j}+\left\{\left(1+B_{11}^{+}-B_{11}^{-}\right)h+\left(B_{13}^{+}-B_{13}^{-}\right)(vh)\right\}_{i,j}$$
$$+\left\{B_{11}^{-}h+B_{13}^{-}(vh)\right\}_{i+1,j}\Big] \quad \textbf{(24a)}$$

$$P_2=\alpha_y\Big[-\left\{B_{21}^{+}h+B_{23}^{+}(vh)\right\}_{i-1,j}+\left\{\left(1+B_{21}^{+}-B_{21}^{-}\right)h+\left(B_{23}^{+}-B_{23}^{-}\right)(vh)\right\}_{i,j}$$
$$+\left\{B_{21}^{-}h+B_{23}^{-}(vh)\right\}_{i+1,j}\Big] \quad \textbf{(24b)}$$

โดยที่ $\alpha_x = \Delta t/(2\Delta x)$, $\alpha_y = \Delta t/(2\Delta y)$

Δx, Δy เป็น ช่วงระยะทางในแนวแกน (x, y) ตามลำดับ

ค่าของเมตริกซ์ K, L และ M สามารถคำนวณหาค่าระดับน้ำและความเร็วในแนวแกน x ที่ได้จากปริมาณที่ทราบค่าในลำดับเวลา t ใดๆ การแก้สมการบล็อกเมตริกซ์สามารถคำนวณได้โดยตรงตามวิธี TDMA (พัฒนาโดย Chakravarthy ใน Anderson และคณะ [11]) ส่วนความเร็วในแกน y จะใช้วิธีคำนวณตามแบบวิธี Explicit โดยใช้ค่าของระดับน้ำและความเร็วในแกน x ที่ได้จากขั้นตอน Implicit มาคำนวณโดยแยกตามทิศทางของฟลักซ์ตามแบบวิธี Explicit ดังนี้ คือ

$$\left[1+g\left(\frac{\sqrt{\left(u_{i,j}^t\right)^2+\left(v_{i,j}^t\right)^2}}{\left(h_{i,j}^{t+\Delta t/2}\right)^2}\right)\cdot\frac{\left(n_{i,j}+n_{i,j+1}\right)^2}{2}\right]\cdot(vh)_{i,j}^{t+\Delta t/2}=$$
$$-\Big[\alpha_x\Big\{\left(A_{31}^{+}\right)\nabla_x\left(h_{i,j}^{t+\Delta t/2}\right)+\left(A_{31}^{-}\right)\Delta_x\left(h_{i,j}^{t+\Delta t/2}\right)+\left(A_{32}^{+}\right)\nabla_x(uh)_{i,j}^{t+\Delta t/2}$$
$$+\left(A_{32}^{-}\right)\Delta_x(uh)_{i,j}^{t+\Delta t/2}+\left(A_{33}^{+}\right)\nabla_x\left(v^t h^{t+\Delta t/2}\right)_{i,j}+\left(A_{33}^{-}\right)\Delta_x\left(v^t h^{t+\Delta t/2}\right)_{i,j}\Big\}$$
$$+\alpha_y\Big\{\left(B_{31}^{+}\right)\nabla_y\left(h_{i,j}^{t+\Delta t/2}\right)+\left(B_{31}^{-}\right)\Delta_y\left(h_{i,j}^{t+\Delta t/2}\right)+\left(B_{33}^{+}\right)\nabla_y\left(v^t h^{t+\Delta t/2}\right)_{i,j}$$
$$+\left(B_{33}^{-}\right)\Delta_y\left(v^t h^{t+\Delta t/2}\right)_{i,j}-gh_{i,j}^{t+\Delta t/2}\left(Z_{i,j}-Z_{i,j-1}\right)-(vh)_{i,j}^t\Big] \quad \textbf{(25)}$$

โดยที่ $\Delta_x f_{i,j}^t = f_{i+1,j}^t - f_{i,j}^t$

$\nabla_x f_{i,j}^t = f_{i,j}^t - f_{i-1,j}^t$

Z เป็น ความสูงจากระดับอ้างอิง

สมการที่ (25) เขียนในรูปสมการอย่างง่ายได้ดังนี้

$$v_{i,j}^{t+\Delta t/2} = \frac{R}{h_{i.j}^{t+\Delta t/2} L} \qquad \textbf{(26)}$$

โดยที่ R, L เป็นค่าด้านขวาและซ้ายมือของสมการโมเมนตัมในแนวแกน y ตามลำดับ

การคำนวณขั้นที่ 1 สามารถคำนวณหาปริมาณที่ไม่ทราบค่าคือ ระดับน้ำ และความเร็วในแนวแกน (x, y) ของช่วงครึ่งเวลาแรกได้

ขั้นที่ 2; ในขั้นที่ 2 สามารถคำนวณหาค่าระดับน้ำและความเร็วในแกน y ของเวลาใหม่ได้จากปริมาณที่ทราบค่าในลำดับเวลา $\Delta t/2$ ใดๆ โดยใช้สมการที่ (17) และ (19) เขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์และแสดงตามแบบวิธี ADI scheme จะได้ว่า

$$\boldsymbol{KV_{i,j-1}^{t+\Delta t} + LV_{i,j}^{t+\Delta t} + MV_{i,j+1}^{t+\Delta t} + P = 0} \qquad \textbf{(27)}$$

ส่วนความเร็วในแกน x จะสลับมาคำนวณตามแบบวิธี Explicit ดังนี้ คือ

$$u_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{R}{h_{i.j}^{t+\Delta t} L} \qquad \textbf{(28)}$$

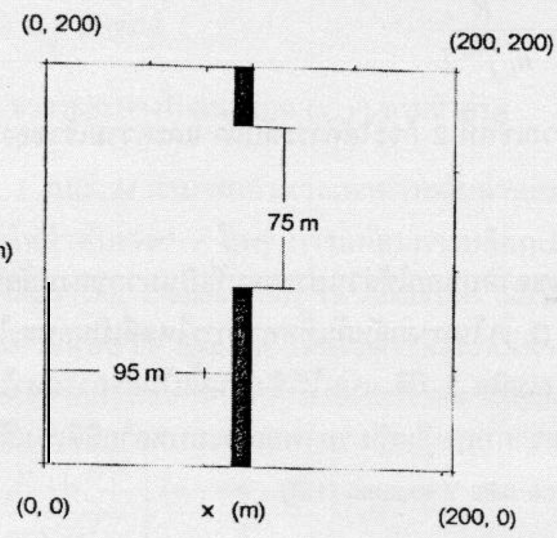
เมื่อผ่านการคำนวณขั้นที่ 2 ก็จะได้ค่าระดับน้ำ และความเร็วของน้ำในแกน (x, y) ของเวลา $t+\Delta t$ ใดๆ

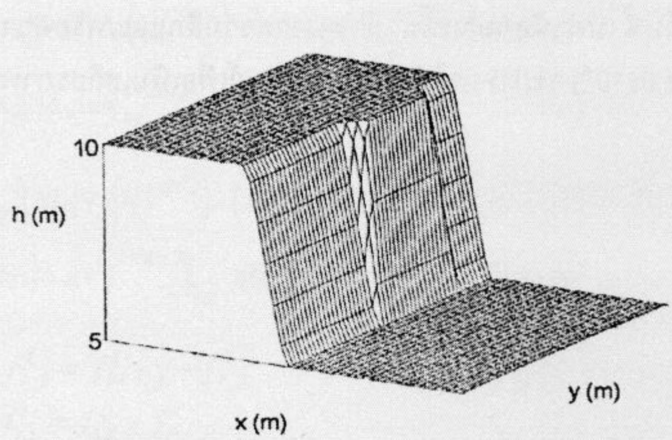
การคำนวณขอบเขตรอบนอกใช้ส่วนประกอบที่เป็นบวกของฟลักซ์ A, B คำนวณการไหลที่มีทิศทางบวกตามแนวแกน (x, y) ในทางกลับกันทิศทางการไหลที่เป็นลบจะใช้ฟลักซ์ A, B ที่มีค่าเป็นลบ เสถียรภาพของการคำนวณชนิด 2 มิติ แบบไร้เชิงเส้นนั้นไม่สามารถหาได้โดยตรงจากการวิเคราะห์ทางทฤษฎี อย่างไรก็ตามจากทฤษฎีเสถียรภาพของระบบหลายมิติเชิงเส้น พบว่าระบบการคำนวณแบบนี้มีเสถียรภาพ (Ponce และ Yabusaki [12])

ในการคำนวณกรณีที่พื้นที่การคำนวณเป็นพื้นแห้ง (Dry bed) หรืออัตราส่วนของระดับน้ำด้านท้ายน้ำกับอ่างเก็บน้ำมีค่าน้อยมากนั้น ถ้าพบว่าความลึกและ/หรือความเร็วของกระแสน้ำมีค่าน้อยมากๆ (เช่น 1.0×10^{-6}) จะกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์เพื่อเพิ่มเสถียรภาพการคำนวณ

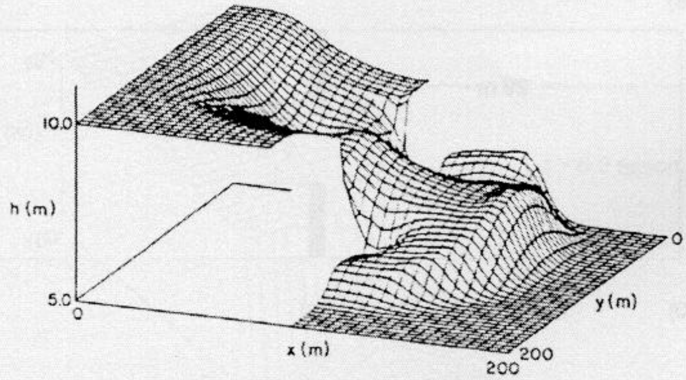
การประยุกต์และผลการคำนวณของแบบจำลอง

ตัวอย่างแรกเป็นการศึกษาปัญหาเขื่อนแตกโดย Fennema และ Chaudhry [8] ใช้แก้สมการแบบ MacCormack scheme ซึ่งนิยมใช้ในการคำนวณปัญหา Shock และ Discontinuity รูปที่ 1 แสดงสภาพเริ่มต้นและขอบเขตของการคำนวณมีพื้นที่การไหลมีขนาด 200 ม. (200 ม. ระดับน้ำเริ่มแรกในอ่างเก็บน้ำ (h_r) สูง 10 ม. ด้านท้ายน้ำ (h_t) สูง 5 ม. (h_t/h_r = 0.5) ตำแหน่งของเขื่อนอยู่ที่ระยะ 95 ม. จากด้านเหนือน้ำ ความหนา 2 ช่วงกริด ค่าพารามิเตอร์ในการคำนวณ C_r = 1.0, $\Delta x = \Delta y$ = 5 ม. โดยสภาพเริ่มแรกน้ำในอ่างเก็บน้ำและท้ายน้ำจะนิ่งสงบ แล้วเขื่อนจะพังทลายอย่างทันทีทันใดที่เวลา 0 วินาท รูปที่ 2 แสดงผลการคำนวณจะเห็นว่าระดับน้ำและตำแหน่งของคลื่นน้ำที่เวลา 7.0 + Δt วินาที มีค่าใกล้เคียงกันกับ Fennema และ Chaudhry [8] พบว่าลักษณะการเกิด Shock front ของคลื่นน้ำไม่เด่นชัดบริเวณหน้าตัดไม่ต่อเนื่องมีลักษณะค่อนข้างลาดไม่คล้ายกับ MacCormack scheme ถึงแม้ว่าจะใช้เทคนิค Split flux อย่างไรก็ตามผลการคำนวณนี้มีลักษณะคล้ายคลึงกับ Zhao และคณะ [14] ซึ่งแก้สมการโดยใช้ Finite volume method (FVM) บนพื้นฐาน Approximate Riemann ตามแบบของ Osher แต่อย่างไรก็ตามจะเห็นว่า ADI scheme สามารถบรรยายสภาพคลื่นน้ำที่กระจายตัวออกด้านข้างและกระทบกับตลิ่งด้านข้างทั้งสองข้างของทางน้ำเปิดด้านท้ายน้ำได้เป็นอย่างดี

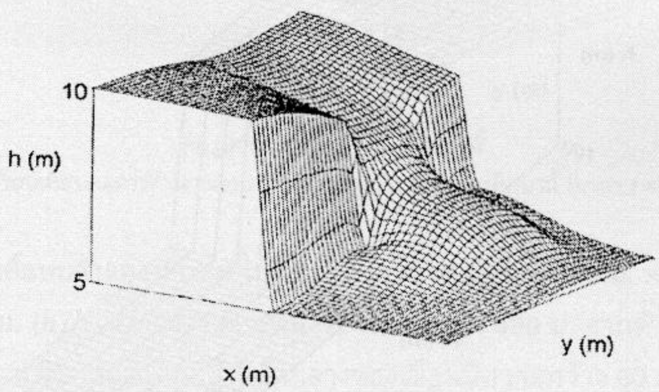




รูปที่ 1 สภาพเริ่มต้นและขอบเขตรอบนอกของการคำนวณของ Fennema และ Chaudhry [7] ที่อัตราส่วน h_t/h_r = 0.5



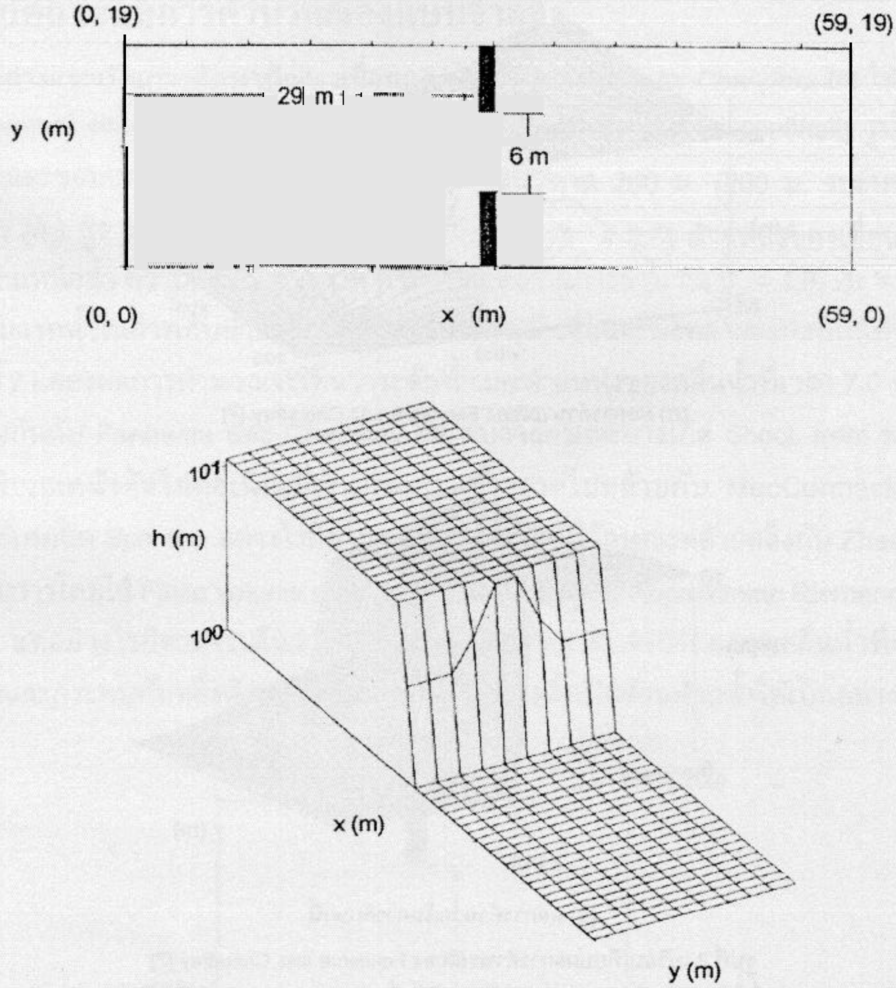
(ก) ผลการคำนวณของ Fennema และ Chaudhry [7]



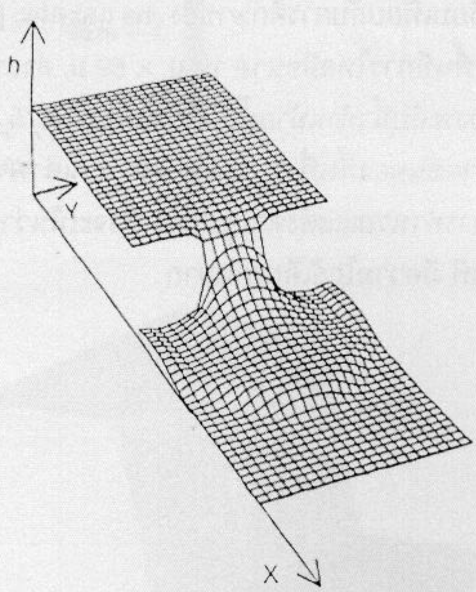
(ข) ผลการคำนวณในการศึกษานี้

รูปที่ 2 เปรียบเทียบผลการคำนวณของ Fennema และ Chaudhry [7] ซึ่งใช้ MacCormack scheme กับการวิจัยนี้ ที่เวลา t = 7.0 + Δt วินาที

ตัวอย่างที่ 2 นำมาเปรียบเทียบกับการศึกษาของ Jha และคณะ [12] รูปที่ 3 แสดงสภาพเริ่มต้นและขอบเขตของการคำนวณ พื้นที่การไหลมีขนาด 19 ม. × 59 ม. ตำแหน่งของเขื่อนอยู่ที่ระยะ 29 ม. จากด้านเหนือน้ำ อัตราส่วนของระดับน้ำด้านท้ายน้ำกับอ่างเก็บน้ำ h_t/h_r = 0.01 ค่าคงที่ต่างๆ ประกอบด้วย n = 0.0012 และความลาดชันของพื้นที่ $S_{ox} = S_{oy} = 0$ ส่วนค่าพารามิเตอร์ในการคำนวณ C_r = 1.0, $\Delta x = \Delta y = 1$ ม. ผลการคำนวณแสดงตามรูปที่ 4 ซึ่งจะเห็นว่าตำแหน่งของการเคลื่อนที่ของคลื่นน้ำที่เวลา 6.0 + Δt วินาที มีความใกล้เคียงกันมาก

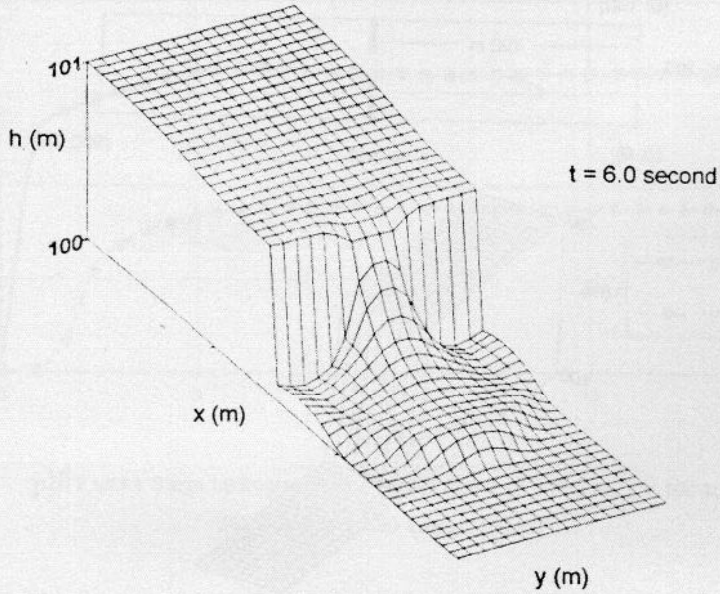


รูปที่ 3 สภาพเริ่มต้นและขอบเขตรอบนอกของการคำนวณของ Jha และคณะ [12] ที่อัตราส่วน h/h_r = 0.01



(ก) ผลการคำนวณของ Jha และคณะ [12]

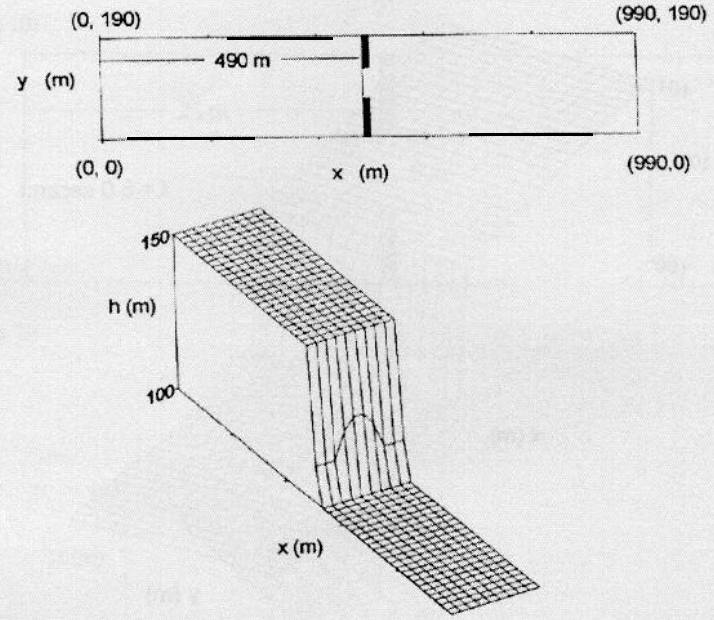
รูปที่ 4 เปรียบเทียบผลการคำนวณของ Jha และคณะ [12] กับการศึกษานี้ ที่เวลา t = 6.0 + Δt วินาที



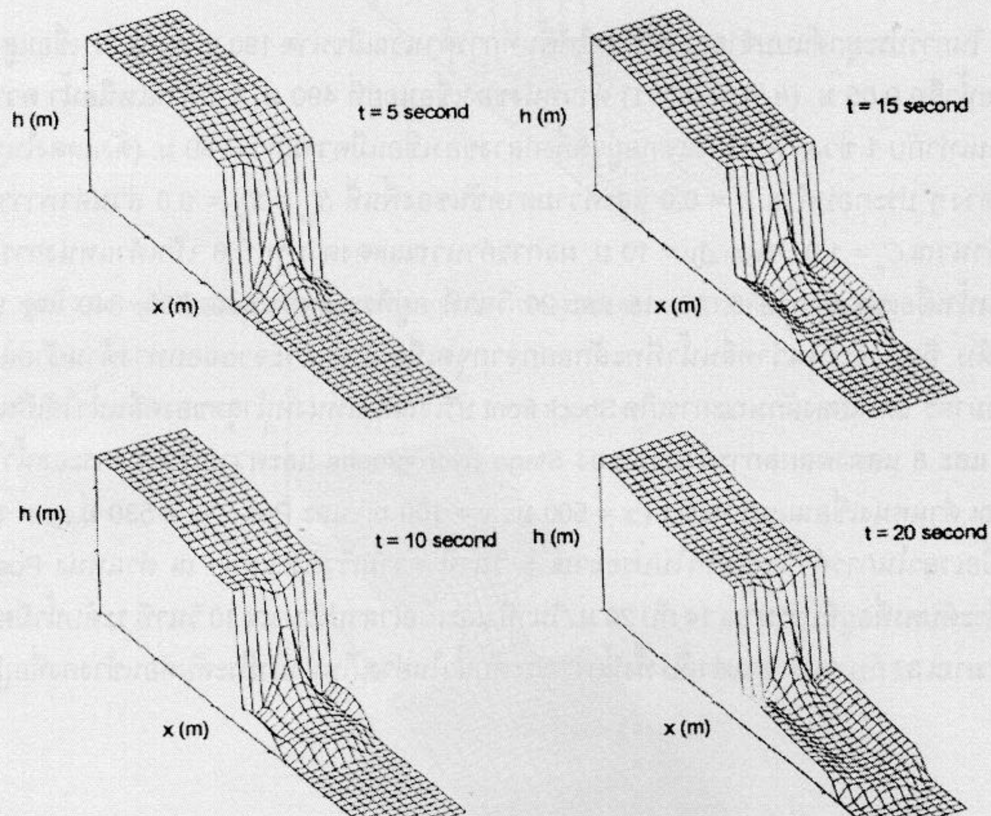
(ข) ผลการคำนวณโดยการศึกษานี้

รูปที่ 4 (ต่อ) เปรียบเทียบผลการคำนวณของ Jha และคณะ [12] กับการศึกษานี้ ที่เวลา t = 6.0 + Δt วินาที

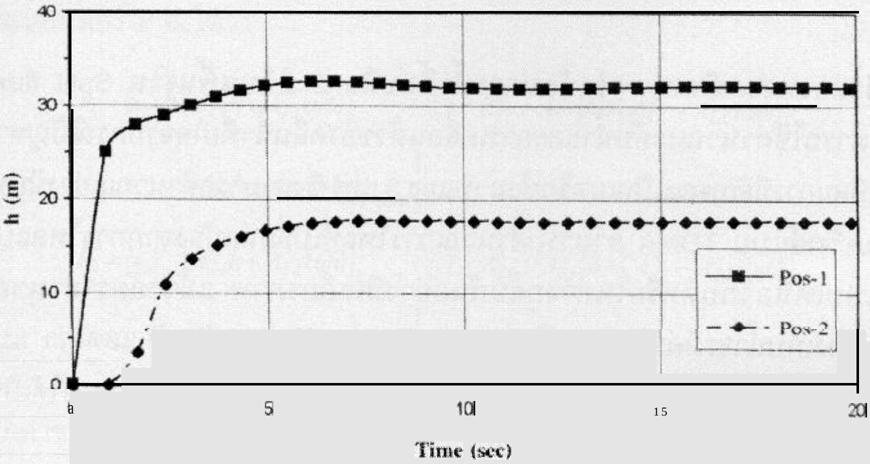
ในการประยุกต์แบบจำลอง กำหนดให้พื้นที่การคำนวณมีขนาด 190 ม. × 990 ม. เขื่อนสูง 50 ม. ด้านท้ายน้ำลึก 0.05 ม. (h_l/h_r = 0.001) ตำแหน่งของเขื่อนอยู่ที่ 490 ม. จากด้านเหนือน้ำ ความหนาของเขื่อนเท่ากับ 1 ช่วงกริด ช่องแตกอยู่จุดกึ่งกลางของเขื่อนมีความกว้าง 60 ม. (ดังแสดงในรูปที่ 5) ค่าคงที่ต่างๆ ประกอบด้วย n = 0.0 และความลาดชันของพื้นที่ S_{ox} = S_{oy} = 0.0 ส่วนค่าพารามิเตอร์ในการคำนวณ C_r = 1.0, Δx = Δy = 10 ม. ผลการคำนวณแสดงตามรูปที่ 6 เป็นตำแหน่งการเคลื่อนของคลื่นน้ำเมื่อเวลาผ่านไป 5, 10, 15 และ 20 วินาที อยู่ที่ระยะทาง 640, 750, 840 และ 930 ม. ตามลำดับ อีกทั้งจะเห็นว่าคลื่นน้ำที่ทะลักออกจากจุดเขื่อนแตกกระจายออกทางด้านซ้ายและขวาอย่างสมมาตร และแสดงลักษณะการเกิด Shock front บริเวณตำแหน่งหน้าสุดของคลื่นน้ำได้เป็นอย่างดี รูปที่ 7 และ 8 แสดงผลผลการคำนวณของ Stage hydrographs และความเร็วของกระแสน้ำในแนวแกน x ณ ตำแหน่งเขื่อนแตก Pos-1 (x = 500 ม., y = 100 ม.) และ Pos-2 (x = 530 ม., y = 100 ม.) พบว่าเมื่อเวลาในการคำนวณผ่านไปประมาณ 5 วินาที ความเร็วกระแสน้ำ ณ ตำแหน่ง Pos-1 กับ Pos-2 มีระดับคงที่อยู่ที่ประมาณ 14 กับ 20 ม./วินาที และเมื่อเวลาประมาณ 10 วินาที ระดับน้ำมีความสูงคงที่ประมาณ 32 กับ 18 ม. ตามลำดับ ทั้งนี้เพราะระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำยังมีระดับค่อนข้างคงที่อยู่นั่นเอง



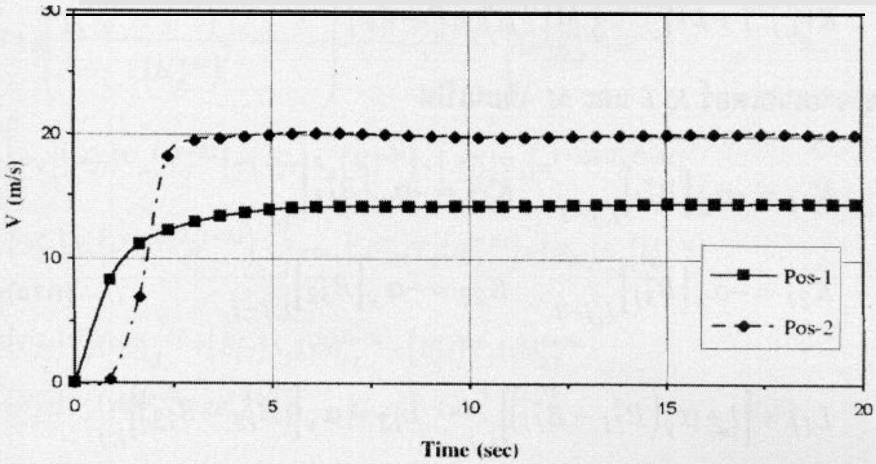
รูปที่ 5 สภาพเริ่มต้นและขอบเขตรอบนอกของการคำนวณ กรณีการประยุกต์แบบจำลอง ที่อัตราส่วน h/h_r = 0.001



รูปที่ 6 ผลการคำนวณระดับน้ำและการเคลื่อนตัวของคลื่นน้ำที่เวลาต่างๆ



รูปที่ 7 แสดง Stage hydrographs ณ ตำแหน่ง Pos-1 (x = 500 ม., y = 100 ม.) และ Pos-2 (x = 530 ม., y = 100 ม.)



รูปที่ 8 แสดงความเร็วกระแสน้ำ ณ ตำแหน่ง Pos-1 (x = 500 ม., y = 100 ม.) และ Pos-2 (x = 530 ม., y = 100 ม.)

จากการศึกษาในอดีตการคำนวณเชิงจำนวนไม่สามารถคำนวณได้เมื่ออัตราส่วนของระดับน้ำ h_l/h_r น้อยลง เช่น เท่ากับ 0.20 กับ 0.25 ตามลำดับ สำหรับ Gabutti กับ MacCormack scheme (Fennema และ Chaudhry [8]) และเท่ากับ 0.01 สำหรับ ADI scheme (Jha และคณะ [13]) การศึกษานี้แสดงผลคำนวณที่อัตราส่วน h_l/h_r = 0.001 และ mass balance ที่เวลาผ่านไป 20 วินาที มีค่าน้อยกว่า 4.54×10^{-1} เปอร์เซ็นต์ สำหรับขีดความสามารถสูงสุดคำนวณได้ถึง 1.0×10^{-4} ซึ่งแสดงถึงระดับน้ำด้านท้ายน้ำมีลักษณะเป็นพื้นแห้ง

สรุป

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แก้สมการน้ำตื้นชนิด 2 มิติบนพื้นฐาน Split flux scheme ที่พัฒนาขึ้นสามารถใช้คำนวณระดับน้ำและการเคลื่อนตัวของคลื่นน้ำที่เกิดจากกรณีปัญหาเขื่อนแตกชนิด 2 มิติ โดยที่สมการมีลักษณะเป็นเมตริกซ์แนวทแยง 3 แถว ซึ่งสามารถคำนวณอย่างมีประสิทธิภาพโดยใช้บล็อกเมตริกซ์แบบ TDMA สามารถคำนวณการไหลที่เปลี่ยนแปลงจากการไหลแบบใต้วิกฤติเป็นการไหลแบบเหนือวิกฤติหรือในทางกลับกันอย่างมีเสถียรภาพ แม้ว่าอัตราส่วนของระดับน้ำด้านท้ายน้ำกับอ่างเก็บน้ำจะมีค่าน้อยมากถึง 1.0×10^{-4} ผลการคำนวณข้างต้นแสดงว่า แบบจำลองนี้มีความเหมาะสมในการนำไปประยุกต์ใช้คำนวณปัญหาเขื่อนหรือฝายแตกในอุดมคติได้เป็นอย่างดี

ภาคผนวก ก รายละเอียดการคำนวณขั้นที่ 2

คำนวณหาค่าระดับน้ำและความเร็วในแกน y ของเวลาใหม่ตามแบบวิธี ADI scheme ได้จาก

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{V}_{i,j-1}^{t+\Delta t} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{V}_{i,j}^{t+\Delta t} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{V}_{i,j+1}^{t+\Delta t} + \boldsymbol{P} = \boldsymbol{0} \qquad (27)$$

เมื่อกระจายเวคเตอร์ K, L และ M เขียนเป็น

$$K_{11} = -\alpha_y\left[B_{11}^{+}\right]_{i,j-1}, \quad K_{12} = -\alpha_y\left[B_{13}^{+}\right]_{i,j-1}$$

$$K_{21} = -\alpha_y\left[B_{31}^{+}\right]_{i,j-1}, \quad K_{22} = -\alpha_y\left[B_{32}^{+}\right]_{i,j-1} \qquad \text{(ก1a)-(ก1d)}$$

$$L_{11} = \left[1+\alpha_y\left(B_{11}^{+} - B_{11}^{-}\right)\right]_{i,j}, \quad L_{12} = \alpha_y\left[\left(B_{13}^{+} - B_{13}^{-}\right)\right]_{i,j}$$

$$L_{21} = \left[\alpha_y\left(B_{31}^{+} - A_{31}^{-}\right) - gS_{oy}\right] \qquad \text{(ก2a)-(ก2d)}$$

$$L_{22} = \left[1+\alpha_y\left(B_{32}^{+} - B_{32}^{-}\right) + \left(\frac{g\sqrt{\left(u_{i,j}^{t+\Delta t/2}\right)^2 + \left(v_{i,j}^{t+\Delta t/2}\right)^2}}{\left(h_{i,j}^{t+\Delta t/2}\right)^{4/3}}\right)\cdot\left(\frac{n_{i,j}+n_{i+1,j}}{2}\right)^2\right]$$

$$M_{11} = \alpha_y\left[B_{11}^{-}\right]_{i,j+1}, \quad M_{12} = \alpha_y\left[B_{12}^{+}\right]_{i,j+1}$$

$$M_{21} = \alpha_y\left[B_{31}^{-}\right]_{i,j+1}, \quad M_{22} = \alpha_y\left[B_{32}^{-+}\right]_{i,j+1} \qquad \text{(ก3a)-(ก3d)}$$

และเวคเตอร์ P จะได้ว่า

$$P_1 = \alpha_x\Big[-\left\{A_{11}^{+}h + A_{12}^{+}(uh)\right\}_{i,j-1} + \left\{\left(1 + A_{11}^{+} - A_{11}^{-}\right)h + \left(A_{12}^{+} - A_{12}^{-}\right)(uh)\right\}_{i,j} + \left\{A_{11}^{-}h + A_{12}^{-}(uh)\right\}_{i,j+1}\Big] \quad \text{(ก4a)}$$

$$P_2 = \alpha_x\Big[-\left\{A_{21}^{+}h + A_{22}^{+}(uh)\right\}_{i,j-1} + \left\{\left(1 + A_{21}^{+} - A_{21}^{-}\right)h + \left(A_{22}^{+} - A_{22}^{-}\right)(uh)\right\}_{i,j} + \left\{A_{21}^{-}h + A_{22}^{-}(uh)\right\}_{i,j+1}\Big] \quad \text{(ก4b)}$$

จากค่าของเมตริกซ์ K, L และ M สามารถคำนวณหาค่าระดับน้ำและความเร็วในแนวแกน y ที่ได้จากปริมาณที่ทราบค่าในลำดับเวลา $t+\Delta t$ ใดๆ ได้โดยการแก้สมการบล็อกเมตริกซ์ ส่วนความเร็วในแกน x ใช้วิธีคำนวณตามแบบวิธี Explicit ดังนี้

$$\left[1 + g\left(\frac{\sqrt{\left(u_{i,j}^{t+\Delta t/2}\right)^2 + \left(v_{i,j}^{t+\Delta t/2}\right)^2}}{\left(h_{i,j}^{t+\Delta t}\right)^2}\right)\cdot\frac{\left(n_{i,j} + n_{i,j+1}\right)^2}{2}\right]\cdot(uh)_{i,j}^{t+\Delta t} =$$

$$-\Big[\alpha_x\Big\{\left(A_{21}^{+}\right)\nabla_x\left(h_{i,j}^{t+\Delta t}\right) + \left(A_{21}^{-}\right)\Delta_x\left(h_{i,j}^{t+\Delta t}\right) + \left(A_{22}^{+}\right)\nabla_x\left(u^{t+\Delta t/2}h^{t+\Delta t}\right)_{i,j}$$

$$+\left(A_{22}^{-}\right)\Delta_x\left(u^{t+\Delta t/2}h^{t+\Delta t}\right)_{i,j}\Big\} + \alpha_y\Big\{\left(B_{21}^{+}\right)\nabla_y\left(h_{i,j}^{t+\Delta t}\right) + \left(B_{21}^{-}\right)\Delta_y\left(h_{i,j}^{t+\Delta t}\right)$$

$$+\left(B_{22}^{+}\right)\nabla_y(vh)_{i,j}^{t+\Delta t} + \left(B_{22}^{-}\right)\Delta_y(vh)_{i,j}^{t+\Delta t} + \left(B_{23}^{+}\right)\nabla_y(vh)_{i,j}^{t+\Delta t}$$

$$+\left(B_{23}^{-}\right)\Delta_y(vh)_{i,j}^{t+\Delta t} - gh_{i,j}^{t+\Delta t}\left(Z_{i,j} - Z_{i-1,j}\right) - (uh)_{i,j}^{t+\Delta t/2}\Big] \quad \text{(ก5)}$$

ซึ่งเขียนให้อยู่รูปอย่างง่ายและคำนวณได้จากสมการที่ (28)

เอกสารอ้างอิง

1. Stoker, J.J., 1957, Water *Waves*, Interscience Publisher, Inc., Willey and Sons, New York.
2. Mahmood, K. and Yevjevich, V., 1975, Unsteady *Flow* in Open Channels, Water Resources Publications, Fort Collins, CO.
3. Cunge, J.A., Holly, F.M., Jr; and Verwey, J., 1980, Practical *Aspects of Computation River* Hydraulics, Pitman Publishing Limited, London.
4. Abbott, M.B., 1979, Computational Hydraulics: Elements *of the* Theory *of* Free-surface *Flows*, Pitman Publishing Limited, London.

5. Jha, A.K., 1995, Characteristic Based Numerical Schemes for 1 -D Transient Free Surface Flows, Thesis Presented to the Kyushu Institute of Technology, in Partial Fulfillment of the requirement for the degree of Doctor of Philosophy.

6. Hromadka II, T.V. and Yen, C.C., , 19 86, "A Diffusion Hydrodynamic Model (DHM)," Advance in Water Resources, Vo1.9, pp.118-170.

7. Fennema, R.J., 1987, Numerical Solution of Two-dimensional Transient Free-surface Flows, Thesis Presented to the Washington State University, at Pullman, Wash., in Partial Fulfillment of the requirement for the degree of Doctor of Philosophy.

8. Fennema, R.J. and Chaudhry, M.H., 1989, "Explicit Methods for 2-D Transient Free-surface Flows," Journal of Hydraulics Engineering, ASCE, Vol.1 16, No.8, pp.1013-1034.

9. Fraccarollo, L. and Toro, E.F., 1995, "Experimental and Numerical Assessment of the Shallow Water Model for Two-dimensional Dam-break Type," Journal of Hydraulic Research, Vo1.33, No.6, pp.843-864.

10. Wongsa, S., 1996, Numerical Computation of Two-dimensional Dam-break Problem by MacCormack Scheme, Thesis Presented to the Kyushu Institute of Technology, in Partial Fulfillment of the requirement for the degree of Master of Engineering. (in Japanese)

11. Anderson, D.A., Tannehill, J.D. and Pletcher, R.H., 1984, Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, McGraw-Hill, New York.

12. Ponce, V.M. and Yabusaki, S.B., 1981, "Modelling Circulation in Depth-averaged Flow," Journal of Hydraulic Division, ASCE, Vol.107, No. HY11, pp.1 501- 1518.

13. Jha, A.K., Akiyama, J. and Ura, M., 1995, "Two-dimensional Dam Break Flood Wave Modelling with AD1 Scheme based on Splitting Flux," Technical Report Presented to Hydraulics Lab., Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu.

14. Zhoa, D.H., Shen, H.W., Lai, J.S., and Tabios III, G.Q., 1994, "Approximate Riemann Solvers in FVM for 2D Hydraulic Shock Wave Modeling," Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vo1.112, No.12, pp.692-702.