

การวิเคราะห์การสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาแบบออร์ทอทรอปิก
โดยวิธีบาวดารีเอลิเมนต์
Free Vibration Analysis of Orthotropic Thick Plates
by Boundary Element Method

ภัทร ฉายอรุณ, บุญมี ชินนาบุญ*, สมชาย ชูชีพสกุล

Pat Chairun, Boonme Chinnaboon*, Somchai Chuchepsakul

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี กรุงเทพฯ ประเทศไทย
Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangkok, Thailand

มนต์ชัย ปัญญาทอง

Monchai Panyatong

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลล้านนา เชียงราย ประเทศไทย
Faculty of Engineering, Rajamangala University of Technology Lanna, Chiang Rai, Thailand

*Corresponding author E-mail: boonme.chi@kmutt.ac.th

Received 24 June 2024; Revised 30 September 2024; Accepted 30 September 2024

บทคัดย่อ

ความเป็นมาและวัตถุประสงค์ : การศึกษาการสั่นอิสระของแผ่นพื้นออร์ทอทรอปิกที่คำนึงถึงการเปลี่ยนรูปเนื่องจากแรงเฉือนมีความสำคัญและน่าสนใจในหลาย ๆ แง่มุม การเข้าใจพฤติกรรมการสั่นของแผ่นพื้นเหล่านี้ช่วยปรับปรุงการออกแบบโครงสร้างให้แข็งแรงและมีเสถียรภาพมากขึ้น ลดความเสี่ยงจากความเสียหายหรือการพังทลายของโครงสร้างในระยะยาว การศึกษาพฤติกรรมของแผ่นพื้นออร์ทอทรอปิก ซึ่งมีสมบัติเชิงกลเฉพาะทิศทาง มีความสำคัญต่อการเลือกวัสดุที่มีประสิทธิภาพสำหรับการทำงานในโครงสร้างเฉพาะ เช่น ในอุตสาหกรรมการบินและอวกาศ การประยุกต์ใช้แผ่นพื้นออร์ทอทรอปิกขยายไปสู่เทคโนโลยีขั้นสูงในอุตสาหกรรมยานยนต์ การบิน และอิเล็กทรอนิกส์ นอกจากนี้ ข้อมูลที่ได้จากการวิเคราะห์การสั่นยังช่วยในการปรับปรุงการออกแบบโครงสร้าง ลดการสั่นสะเทือนที่ไม่พึงประสงค์ และเพิ่มความสามารถในการรับน้ำหนัก วิธีบาวดารีเอลิเมนต์เป็นที่รู้จักในด้านประสิทธิภาพและความแม่นยำสูงในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมที่ซับซ้อน ทำให้เป็นตัวเลือกที่เหมาะสมสำหรับการวิเคราะห์นี้ การศึกษานี้มีวัตถุประสงค์เพื่อประยุกต์ใช้วิธีบาวดารีเอลิเมนต์ในการศึกษาพฤติกรรมการสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาแบบออร์ทอทรอปิกภายใต้เงื่อนไขขอบเขตและรูปทรงทั่วไป

วิธีดำเนินการวิจัย : การวิเคราะห์นี้อิงตามทฤษฎีของ Mindlin ซึ่งเกี่ยวกับแผ่นพื้นปานกลาง และสร้างสมการเคลื่อนที่โดยใช้หลักการของ Hamilton วิธีการที่เสนอใช้หลักการของสมการแอนนะล็อกเพื่อหาความถี่และรูปแบบการสั่นจากการวิเคราะห์การสั่นอิสระของแผ่นพื้น เทคนิคนี้เกี่ยวข้องกับการแทนที่สมการ

การเคลื่อนที่ของปัญหาตั้งเดิมด้วยสมการ Poisson สามสมการภายใต้แรงสมมุติที่สอดคล้องเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตตั้งเดิม แรงสมมุติเหล่านี้คำนวณโดยใช้วิธีบาวดารีเอลิเมนต์และการประมาณโดยใช้ฟังก์ชันเรเดียลเบสิส

ผลการวิจัย : ในการตรวจสอบความน่าเชื่อถือและความแม่นยำของวิธีการ เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับงานวิจัยอื่น ๆ ซึ่งพบว่า ความคลาดเคลื่อนของการสั่นในโหมดแรกอยู่ในช่วง 0.035% ถึง 1.236% นอกจากนี้ การลู่เข้าของคำตอบแสดงให้เห็นว่าจำนวนเอลิเมนต์ที่เหมาะสมอยู่ในช่วง 160 ถึง 240 เอลิเมนต์และจำนวนโหนดภายในโดเมนอยู่ในช่วง 196 ถึง 400 โหนด ซึ่งให้คำตอบที่มีความเสถียร วิธีที่นำเสนอสามารถวิเคราะห์ความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นของแผ่นหนาแบบออร์โททรอปิกภายใต้เงื่อนไขขอบเขตทั่วไปที่มีพฤติกรรมอยู่ระหว่างจุดรองรับแบบยึดหยุ่นและจุดรองรับแบบยึดแข็ง นอกจากนี้ ยังศึกษาพารามิเตอร์ที่ส่งผลต่อการสั่นอิสระของแผ่นหนาแบบออร์โททรอปิก ประสิทธิภาพของวิธีการที่นำเสนอ แสดงโดยการวิเคราะห์การสั่นอิสระของแผ่นหนาแบบออร์โททรอปิกที่มีรูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตที่ซับซ้อน ผลการวิเคราะห์แสดงให้เห็นว่าค่าความถี่ธรรมชาติมีความสอดคล้องกับคำตอบที่ได้จากวิธีอื่น ๆ เป็นอย่างดี แสดงให้เห็นถึงความมีประสิทธิภาพของวิธีบาวดารีเอลิเมนต์โดยใช้หลักการของสมการแอนนะล็อก วิธีการนี้สามารถแสดงพฤติกรรมการสั่นของแผ่นพื้นหนาแบบออร์โททรอปิกที่มีรูปร่างซับซ้อนได้อย่างแม่นยำ

สรุป : คำตอบที่ได้จากวิธีบาวดารีเอลิเมนต์สอดคล้องกับงานวิจัยก่อนหน้านี้ แสดงให้เห็นถึงความเหมาะสมในการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาแบบออร์โททรอปิก การศึกษานี้เน้นย้ำถึงประสิทธิภาพและความแม่นยำของวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ในการวิเคราะห์รูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตที่ซับซ้อน จึงนับว่าเป็นเครื่องมือที่มีค่าสำหรับวิศวกรโครงสร้าง ความสามารถของวิธีการนี้ในการวิเคราะห์ความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นได้อย่างมีประสิทธิภาพและแม่นยำ ทำให้มั่นใจได้ถึงการประชุมที่ดีใช้งานจริงในการออกแบบและวิเคราะห์ระบบโครงสร้างขั้นสูง งานวิจัยในอนาคตสามารถขยายการศึกษานี้โดยสำรวจผลกระทบของสมบัติวัสดุและเงื่อนไขขอบเขตที่แตกต่างกัน รวมทั้งขยายวิธีการเพื่อวิเคราะห์การสั่นแบบบังคับ

การนำไปใช้ประโยชน์ในเชิงปฏิบัติ : วิธีการนี้สามารถวิเคราะห์ความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นของแผ่นหนาแบบออร์โททรอปิกที่มีรูปร่างซับซ้อนภายใต้เงื่อนไขขอบเขตทั่วไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ สำหรับการใช้งานในการออกแบบโครงสร้างแผ่นหนาที่คำนึงการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือน

คำสำคัญ : การสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาแบบออร์โททรอปิก, วิธีบาวดารีเอลิเมนต์, วิธีสมการแอนนะล็อก

Abstract

Background and Objectives: A study of free vibration of shear deformable orthotropic plates holds significant importance and interest in various aspects. Understanding the vibration

behavior of these plates enhances the design of stronger and more stable structures, reducing the risk of damage or structural failure over time. Study of the behavior of orthotropic plates, with their directional mechanical properties, are crucial for selecting efficient materials for specific structural applications, such as in aerospace and high-rise buildings. The application of orthotropic plates extends across advanced technologies in industries like automotive, aerospace, and electronics. Additionally, the insights gained from vibration analysis would facilitate the optimization of structural designs, minimizing unwanted vibrations and enhancing load-bearing capabilities. The boundary element method is known for its high efficiency and accuracy in solving complex engineering problems, making it an ideal choice for such analysis. The present study aimed to apply the boundary element method to investigate the free vibration behavior of thick orthotropic plates under general boundary conditions and shapes.

Methodology: The present analysis is based on Mindlin's theory of moderately thick plates and formulates the equations of motion using the Hamilton's principle. The proposed approach employs the principle of the analog equation to determine the frequencies and mode shapes for free vibration analysis of the plates. This technique involves substituting the original problem's equations of motion with three Poisson equations under fictitious forces that conform to the original boundary conditions. These fictitious forces are computed using the boundary element method and approximated using radial basis functions.

Main Results: To validate the reliability and accuracy of the method, the analysis results were compared with those of other research. The results show that the error for the first vibrational mode ranges from 0.035% to 1.236%. Additionally, the convergence of the solution reveals that the optimal number of boundary elements ranges from 160 to 240, while the number of internal nodes within the domain ranges from 196 to 400. The proposed methodology could effectively analyze the natural frequencies and mode shapes of orthotropic thick plates with general boundary conditions, ranging between elastic support and elastic restraint. Furthermore, this research investigated the parameters affecting the free vibration of orthotropic thick plates. The efficiency of the proposed method is demonstrated by analyzing the free vibration of orthotropic thick plates with complex shapes and boundary conditions. The analysis shows that the natural frequencies are in good agreement with

those obtained using other solutions, demonstrating the effectiveness of the boundary element method employing the principle of the analog equation. The method is capable of accurately depicting the vibration behavior of complex-shaped orthotropic thick plates.

Conclusions: The solutions obtained from the boundary element method are consistent with those from previous research, indicating its suitability for analyzing free vibration problems of orthotropic thick plates. The present study highlights the robustness and precision of the boundary element method in handling complex geometries and boundary conditions, making it a valuable tool for structural engineers. The ability to efficiently and accurately investigate natural frequencies and mode shapes ensures its practical applicability in the design and analysis of advanced structural systems. Future work could expand on this research by exploring the effects of different material properties and boundary conditions, as well as extending the method to analyze forced vibrations.

Practical Application: The proposed method can efficiently analyze natural frequencies and mode shapes of complex-shaped orthotropic thick plates under general boundary conditions for use in designing plate structures.

Keywords: Analog Equation Method, Boundary Element Method, Free Vibration of Orthotropic Thick Plates

Introduction

ปัจจุบันงานทางด้านวิศวกรรมโครงสร้างมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง โดยในการพัฒนาจะต้องอาศัยการนำแนวคิดใหม่ ๆ มาใช้ร่วมกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการวิเคราะห์ปัญหา ซึ่งในโครงสร้างแผ่นพื้ที่นำมาใช้นั้นจำเป็นต้องเลือกวัสดุให้เหมาะสม ไม่ว่าจะเป็นเรื่องของ สมบัติทางกลศาสตร์ ความสวยงาม ความสะดวกในการใช้งาน และราคานั้นมีส่วนสำคัญในการเลือกชนิดของวัสดุทั้งสิ้น โครงสร้างแผ่นพื้ที่นั้นเมื่อได้รับการสั่นสะเทือน สามารถวิบัติได้ไม่ว่าจะเป็นสาเหตุที่เกิดจากมนุษย์ หรือเกิดจากธรรมชาติ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องวิเคราะห์ค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเพื่อหลีกเลี่ยงการสั่นพ้อง (Resonance) ของโครงสร้างวัสดุประเภทออร์โททรอปิกเป็นหนึ่งในส่วนประกอบโครงสร้างที่สำคัญที่ใช้ในงานวิศวกรรมหลายประเภท เช่น การบิน อวกาศ ยานยนต์ เรือดำน้ำ และอาคาร เนื่องจากมีอัตราส่วนความแข็งแรงต่อน้ำหนักสูง [1-3]

งานวิจัยที่ผ่านมา Liu และคณะ [4] ได้ทำการวิเคราะห์การสั่นอิสระของวัสดุเฟียโซอิเล็กทริกประกบคู่เชื่อมติดกันเป็นแผ่นพื้หนาวงกลมซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีของ Mindlin ที่ความหนาต่างกัน ภายใต้สมการ

อนุพันธ์อันดับสี่ที่อยู่ในรูปของการโค้งตัวหนึ่งสมการ Shafiee และคณะ [5] ได้ทำการวิเคราะห์การสั่นอิสระของแผ่นพื้นสี่เหลี่ยมประเภทออร์โททรอปิกประกบคู่ที่เป็นอิสระจากกัน ตามทฤษฎีแผ่นบาง (classical thin plate theory) และใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหาค่าความถี่ธรรมชาติ Karami และคณะ [6] ใช้วิธี Differential Quadrature (DQM) ในการวิเคราะห์แผ่นพื้นลามิเนตหนาแบบสมมาตรที่มีจุดรองรับแบบยึดหยุ่นแบบยึดรั้ง (elastic restraints) ซึ่งผลลัพธ์แสดงให้เห็นว่า DQM สามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องและแม่นยำ Chinnaboon และคณะ [7] ได้ประยุกต์ใช้วิธีบาวดารีเอลิเมนต์แบบไม่แบ่งเอลิเมนต์ภายในโดเมนวิเคราะห์ปัญหาแผ่นพื้นหนาปานกลางของ Mindlin ซึ่งอาศัยวิธีการสมการแอนะล็อก ซึ่งผลที่ได้แสดงให้เห็นถึงข้อดีของวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ที่แบ่งเอลิเมนต์เฉพาะที่ขอบเท่านั้น และแสดงให้เห็นว่าปัญหาแผ่นพื้นหนาของ Mindlin ที่มีเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ สามารถวิเคราะห์ได้โดยง่าย Hosseini-Hashemi และคณะ [8] เสนอวิธีการหาค่าตอบแม่นยำตรงในการวิเคราะห์การสั่นอิสระของแผ่นพื้นสี่เหลี่ยมประเภท Lévy โดยพิจารณาการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนอันดับที่สาม โดยเปรียบเทียบกับวิธีเชิงตัวเลข หรือวิธีเชิงวิเคราะห์ ซึ่งคำตอบที่ได้มีความสอดคล้องกัน Thai และ Kim [9] เสนอการวิเคราะห์การสั่นอิสระของแผ่นพื้นออร์โททรอปิก โดยใช้วิธี Lévy ภายใต้ Refined plate theory และเปรียบเทียบกับคำตอบกับ classical plate theory ซึ่งคำตอบที่ได้สอดคล้องกัน Senjanovic' และคณะ [10] เสนอวิธีการวิเคราะห์การสั่นของแผ่นพื้นหนาปานกลางตามทฤษฎีแผ่นพื้นของ Mindlin ที่เป็นสมการอนุพันธ์สามสมการให้เป็นสมการอนุพันธ์ภายใต้การโค้งตัวเพียงสมการเดียว Petrolito [11] ศึกษาวิเคราะห์การสั่นและเสถียรภาพของแผ่นพื้นหนาออร์โททรอปิกด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยการแบ่งเอลิเมนต์เป็นสามเหลี่ยม Ye และคณะ [12] เสนอการประยุกต์ใช้คำตอบจากอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ เพื่อวิเคราะห์การสั่นของแผ่นพื้นหนาลามิเนตภายใต้ทฤษฎีการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนอันดับที่หนึ่ง (first-order shear deformation theory) Wang และคณะ [13] ประยุกต์ใช้อ่อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ เพื่อวิเคราะห์การสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาแบบออร์โททรอปิก ภายใต้ทฤษฎีการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนอันดับที่หนึ่ง (FSDT) วางบนฐานรากยึดหยุ่น ที่มีที่รองรับแบบต่าง ๆ รวมทั้งมีที่รองรับภายในแผ่นพื้น และใช้วิธีการของ Rayleigh-Ritz ในการหาค่าตอบมาเปรียบเทียบกับวิธีเชิงวิเคราะห์หรือวิธีเชิงตัวเลขอื่น ๆ Wang และคณะ [14] ประยุกต์ใช้ Fourier-Ritz เพื่อวิเคราะห์การสั่นอิสระภายในระนาบของแผ่นพื้น ภายใต้ทฤษฎีการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนอันดับที่หนึ่ง (FSDT) ที่มีรูปวงกลม วงแหวน และเซกเตอร์ของวงกลม เปรียบเทียบคำตอบกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ Pang และคณะ [15] ประยุกต์ใช้อ่อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ เพื่อวิเคราะห์การสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาลามิเนตภายใต้ทฤษฎีการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนอันดับที่หนึ่ง (FSDT) รูปเซกเตอร์ของวงแหวนที่มีที่รองรับแบบต่าง ๆ รวมทั้งมีที่รองรับภายในแผ่นพื้นและใช้วิธีการของ Rayleigh-Ritz ในการหาค่าตอบมาเปรียบเทียบกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ Ghashochi-Bargh และ Razavi [16] ได้เสนอโมเดลการวิเคราะห์อย่างง่ายในการวิเคราะห์การสั่นอิสระของแผ่นพื้นที่ใช้วัสดุออร์โททรอปิกและวัสดุ functionally graded (FGM) ตามทฤษฎีแผ่นพื้นของ Mindlin เปรียบเทียบคำตอบกับวิธีเชิงตัวเลขอื่น ๆ Jeeradit [17] ได้ทำการประยุกต์ใช้วิธีบาวดารีเอลิเมนต์ ในการวิเคราะห์แผ่นพื้นหนานอกเขตยึดหยุ่นแบบออร์โททรอปิก ซึ่งมีความซับซ้อน Katsikadelis [18] จึงเสนอแนะให้ประยุกต์ใช้วิธีการสมการแอนะล็อก (Analog Equation

Method) ในการสร้างระบบสมการ ซึ่งหาคำตอบได้โดยตรงด้วยวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ Zheng และ คณะ [19] ได้ทำการวิเคราะห์การสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาไอโซทรอปิกที่ไม่ใช่แบบ Lévy ภายใต้การเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนอันดับที่สามของ Reddy โดยอาศัยหลักการซ้อนทับเชิงซิมเพลกติกด้วยการรวมผลของการวิเคราะห์ทั้งสองทิศทาง จากการศึกษาพบว่าผลที่ได้เปรียบเทียบกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีความสอดคล้องกัน งานวิจัยนี้ได้เสนอวิธีการวิเคราะห์การสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาที่เป็นวัสดุประเภทออร์โททรอปิก ที่มีจุดรองรับชนิดต่าง ๆ หรือ จุดรองรับแบบผสม โดยใช้ทฤษฎีของแผ่นพื้นตามสมมติฐานของ Mindlin ซึ่งเป็นพื้นหนานกลางที่มีอัตราส่วนความหนาต่อความยาวด้านสั้นหรือรัศมีของแผ่นพื้น ตั้งแต่ 0.1-0.2 ซึ่งในทางปฏิบัติแล้ว โครงสร้างแผ่นพื้นหนานกลางอาจมีรูปทรงที่ซับซ้อนซึ่งไม่สามารถหาคำตอบแม่นยำตรงได้ จึงต้องใช้วิธีเชิงตัวเลขในการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาแบบออร์โททรอปิก ที่มีรูปร่างที่ซับซ้อนได้ โดยประยุกต์ใช้วิธีบาวดารีเอลิเมนต์ที่ได้พัฒนาขึ้นมาและใช้หลักการสมการแอนะล็อก (Principle of Analog Equation) ซึ่งนำเสนอโดย Katsikadelis [18] โดยสมการอนุพันธ์ของปัญหาเดิมจะแทนที่ด้วยสมการปัวซอง (Poisson's Equation) จำนวนสามสมการที่เป็นอิสระต่อกัน ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเดิม โดยประยุกต์ใช้ตัวปฏิบัติการลาปลาซ (Laplace Operator) เพื่อให้มีลำดับของอนุพันธ์สอดคล้องกับสมการของปัญหาเดิม จากนั้นก็ทำการสร้างสมการอินทิกรัลในการหาคำตอบของปัญหา จากนั้นทำการเปรียบเทียบคำตอบที่ได้กับงานวิจัยที่ผ่านมาเพื่อตรวจสอบแม่นยำของวิธีการนี้ รวมทั้งศึกษาพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่มีผลกระทบต่อการสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาออร์โททรอปิกและแสดงถึงประสิทธิภาพของวิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ โดยแก้ปัญหาในกรณีที่แผ่นพื้นมีรูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตที่ซับซ้อน

Methods

สมการการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาแบบออร์โททรอปิก

พิจารณาแผ่นพื้นหนานกลางที่มีความหนาสม่ำเสมอ h ซึ่งอยู่ภายในโดเมน Ω ที่อยู่ในระนาบ (x, y) และล้อมรอบด้วยขอบเขต $\Gamma \cup_{i=0}^{i=k} \Gamma_i$ โดยที่ Γ_i คือเส้นโค้งที่มีความราบเรียบมีจำนวนมุมคือ k (ดู Figure 1) กำหนดให้แผ่นพื้นหนาทำจากวัสดุที่มีสมบัติทางกลที่รับแรงในแต่ละทิศทางได้ไม่เท่ากันทั้งสามทิศทางเรียกว่า วัสดุออร์โททรอปิก (Orthotropic Material) ที่มีความยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น (Linear Elastic Material) ดังนั้นสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดได้ดัง สมการที่ (1)

$$v(x, y, z, t) = z\phi_y(x, y, t) \quad (4)$$

เมื่อ u, v, w คือการกระจัดในทิศทางแกน x, y และ z ที่อยู่ในฟังก์ชันของเวลา t ในขณะที่ ϕ_x และ $-\phi_y$ แทนการหมุนรอบแกน x และ y ตามลำดับ จากสมการที่ (2)-(4) ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดสามารถเขียนได้ตามสมการที่ (5)-(9)

$$\varepsilon_x = z\phi_{x,x} \quad (5)$$

$$\varepsilon_y = z\phi_{y,y} \quad (6)$$

$$\gamma_{xy} = z(\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \quad (7)$$

$$\gamma_{xz} = \phi_x + w_{,x} \quad (8)$$

$$\gamma_{yz} = \phi_y + w_{,y} \quad (9)$$

จากสมการที่ (1) และ (5)-(9) จะสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและการกระจัด จากนั้นอินทิเกรตความเค้นตลอดความหนาของแผ่นพื้นหนาแบบบอร์โททอปิกจะให้ความสัมพันธ์ของโมเมนต์ดัด (M_x, M_y) โมเมนต์บิด (M_{xy}, M_{yx}) และแรงเฉือน (Q_x, Q_y) ดังสมการที่ (10)-(15)

$$M_x = D_{11}\phi_{x,x} + D_{12}\phi_{y,y} \quad (10)$$

$$M_y = D_{12}\phi_{x,x} + D_{22}\phi_{y,y} \quad (11)$$

$$M_{xy} = D_{66}(\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \quad (12)$$

$$M_{yx} = -D_{66}(\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \quad (13)$$

$$Q_x = A_{55}(\phi_x + w_{,x}) \quad (14)$$

$$Q_y = A_{44}(\phi_y + w_{,y}) \quad (15)$$

โดยที่ $D_{ij} = \frac{C_{ij}h^3}{12}$, $A_{ij} = k_s h C_{ij}$

k_s คือ ค่าปรับแก้แรงเฉือน (shear correction factor)

Wang และคณะ [13] ได้ศึกษาค่าปรับแก้แรงเฉือน k_s ที่เหมาะสม ซึ่งอยู่ระหว่าง 2/3 ถึง 7/6 ที่ส่งผลต่อค่าพารามิเตอร์ของความถี่ธรรมชาติ ยิ่งใช้ค่าปรับแก้แรงเฉือนมากขึ้นจะทำให้ได้ค่าพารามิเตอร์ของความถี่ธรรมชาติมากขึ้นส่งผลต่อความคลาดเคลื่อนของค่าพารามิเตอร์ของความถี่ธรรมชาติด้วยเช่นกัน ในงานวิจัยนี้ใช้ $k_s = 5/6$ ซึ่งอยู่ระหว่าง 2/3 ถึง 7/6 และให้คำตอบที่ใกล้เคียงกับงานวิจัย [13]

การสร้างสมการควบคุมสำหรับปัญหาการสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาแบบบอร์โททอปิกนั้นสามารถสร้างโดยประยุกต์ใช้หลักการแฮมิลตัน (Hamilton's Principle) ซึ่งแสดงได้ดังสมการ (16)

$$\delta \int_0^t (U - K) dt = 0 \quad (16)$$

เมื่อ U และ K คือพลังงานศักย์ของแผ่นพื้น และพลังงานจลน์ ของแผ่นพื้นหนาแบบบอร์โททอริกตามลำดับ โดยสามารถแสดงสมการของพลังงานดังกล่าวได้ดังนี้

$$U = \frac{1}{2} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega} \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} \right) d\Omega dz \quad (17)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega} \rho \left((z\phi_{x,t})^2 + (z\phi_{y,t})^2 + (w_t)^2 \right) d\Omega dz \quad (18)$$

เมื่อ ρ คือความหนาแน่นของวัสดุ จากนั้นแทนสมการ (17)-(18) ลงในสมการที่ (16) และใช้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดจากสมการ (1) รวมถึงความเครียดจากสมการที่ (5)-(9) และสมการโมเมนต์และแรงเฉือนสมการที่ (10)-(15) ทำการอินทิเกรตตลอดความหนาและประยุกต์ใช้สมการออยเลอร์-ลากรองจ์ จะได้สมการควบคุมการสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาแบบบอร์โททอริกดังต่อไปนี้

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (19)$$

$$M_{x,x} - M_{xy,y} - Q_x + I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} = 0 \quad (20)$$

$$M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y + I_2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} = 0 \quad (21)$$

เมื่อ $I_0 = \rho h$, $I_2 = \frac{\rho h^3}{12}$ คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของมวล (mass moments of inertia)

เนื่องจากงานวิจัยนี้เป็นการวิเคราะห์การสั่นอิสระของแผ่นพื้นและกำหนดการเคลื่อนที่เป็นคาบ (Periodic motion) ดังนั้นการกระจัดในแนวตั้ง การหมุนรอบแกนและแรงภายในแผ่นพื้นแสดงได้ดังนี้

$$w(x, y, t) = w(x, y) e^{i\omega t} \quad (22)$$

$$\phi_x(x, y, t) = \phi_x(x, y) e^{i\omega t} \quad (23)$$

$$\phi_y(x, y, t) = \phi_y(x, y) e^{i\omega t} \quad (24)$$

$$Q_x(x, y, t) = Q_x(x, y) e^{i\omega t} \quad (25)$$

$$Q_y(x, y, t) = Q_y(x, y)e^{i\omega t} \quad (26)$$

$$M_x(x, y, t) = M_x(x, y)e^{i\omega t} \quad (27)$$

$$M_y(x, y, t) = M_y(x, y)e^{i\omega t} \quad (28)$$

$$M_{xy}(x, y, t) = M_{xy}(x, y)e^{i\omega t} \quad (29)$$

โดยที่ ω คือ ความถี่ธรรมชาติของแผ่นพื้นและ t คือ เวลาในการสั่น หลังจากนั้นทำการแทนสมการ (22)-(29) ลงในสมการที่ (19)-(21) จะได้สมการควบคุมการสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาดังสมการที่ (30)-(32)

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} = -\rho h w_{,tt} \quad (30)$$

$$M_{x,x} - M_{xy,y} - Q_x = -\frac{\rho h^3}{12} \phi_{x,tt} \quad (31)$$

$$M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y = -\frac{\rho h^3}{12} \phi_{y,tt} \quad (32)$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขตดังต่อไปนี้

$$w - w^* = 0 \quad Q_n - Q_n^* = 0 \quad (33)$$

$$M_n - M_n^* = 0 \quad \phi_n - \phi_n^* = 0 \quad (34)$$

$$M_{nt} - M_{nt}^* = 0 \quad \phi_{nt} - \phi_{nt}^* = 0 \quad (35)$$

จากสมการที่ (33)-(35) สมการเงื่อนไขขอบเขตของจุดรองรับ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์ ดังนี้

$$\alpha_1 w + \alpha_2 Q_n = \alpha_3 \quad (36)$$

$$\beta_1 \phi_n + \beta_2 M_n = \beta_3 \quad (37)$$

$$\gamma_1 \phi_t + \gamma_2 M_{nt} = \gamma_3 \quad (38)$$

จากสมการที่ (36)-(38) ที่รองรับแต่ละชนิดจะมีค่า α_i, β_i และ γ_i ดังนี้

1. จุดรองรับแบบยึดแน่น (Clamped support)

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 & \alpha_2 &= 0 & \alpha_3 &= 0 \\ \beta_1 &= 1 & \beta_2 &= 0 & \beta_3 &= 0 \\ \gamma_1 &= 1 & \gamma_2 &= 0 & \gamma_3 &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

2. จุดรองรับอย่างง่ายแบบอ่อน (Soft type simply supported)

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1 & \alpha_2 &= 0 & \alpha_3 &= 0 \\ \beta_1 &= 0 & \beta_2 &= 1 & \beta_3 &= 0 \\ \gamma_1 &= 0 & \gamma_2 &= 1 & \gamma_3 &= 0\end{aligned}\quad (40)$$

3. จุดรองรับอย่างง่ายแบบแข็ง (Hard type simply supported)

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1 & \alpha_2 &= 0 & \alpha_3 &= 0 \\ \beta_1 &= 0 & \beta_2 &= 1 & \beta_3 &= 0 \\ \gamma_1 &= 1 & \gamma_2 &= 0 & \gamma_3 &= 0\end{aligned}\quad (41)$$

4. จุดรองรับแบบอิสระ (Free support)

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0 & \alpha_2 &= 1 & \alpha_3 &= 0 \\ \beta_1 &= 0 & \beta_2 &= 1 & \beta_3 &= 0 \\ \gamma_1 &= 0 & \gamma_2 &= 1 & \gamma_3 &= 0\end{aligned}\quad (42)$$

5. จุดรองรับแบบยืดหยุ่น (Elastic support)

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= k_r(z) & \alpha_2 &= 1 & \alpha_3 &= 0 \\ \beta_1 &= 0 & \beta_2 &= 1 & \beta_3 &= 0 \\ \gamma_1 &= 0 & \gamma_2 &= 1 & \gamma_3 &= 0\end{aligned}\quad (43)$$

6. จุดรองรับยืดหยุ่นแบบยึดรั้ง (Elastic restraint)

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1 & \alpha_2 &= 0 & \alpha_3 &= 0 \\ \beta_1 &= k_{ro}(z) & \beta_2 &= 1 & \beta_3 &= 0 \\ \gamma_1 &= 0 & \gamma_2 &= 1 & \gamma_3 &= 0\end{aligned}\quad (44)$$

เมื่อ $k_r(z)$ และ $k_{ro}(z)$ คือ ค่าสติฟเนสที่สัมพันธ์กับการเคลื่อนที่ (translational stiffness) และค่าสติฟเนสที่สัมพันธ์กับการหมุน (rotational stiffness) ตามลำดับ โดยที่ค่า M_n, M_{nt} และ Q_n แสดงได้ดังนี้ [18]

$$M_n = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2n_x n_y M_{yx} \quad (45)$$

$$M_{nt} = M_{xy}(n_y^2 - n_x^2) + n_x n_y (M_x - M_y) \quad (46)$$

$$Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y \quad (47)$$

โดยที่ $n_x = \cos \theta$ และ $n_y = \sin \theta$ มุม θ วัดทวนเข็มนาฬิกา (ดัง Figure 1) เมื่อได้สมการเงื่อนไขขอบเขตแล้ว ต่อมาทำการแทนสมการที่ (10)-(15) ลงในสมการที่ (30)-(32) หลังจากทำการอนุพันธ์แล้ว จะได้สมการควบคุมของปัญหาการสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาที่เป็นวัสดุออร์โททรอปิกดังต่อไปนี้

$$A_{55}(\phi_{x,x} + w_{,xx}) + A_{44}(\phi_{y,y} + w_{,yy}) + \gamma^4 w = 0 \quad (48)$$

$$D_{11}(\phi_{x,xx}) + D_{12}(\phi_{y,yy}) - D_{66}(\phi_{x,yy} + \phi_{y,xy}) - A_{55}(\phi_x + w_{,x}) + \chi^4 \phi_x = 0 \quad (49)$$

$$D_{12}(\phi_{x,xy}) + D_{22}(\phi_{y,yy}) + D_{66}(\phi_{y,xx} + \phi_{x,xy}) - A_{44}(\phi_y + w_{,y}) + \chi^4 \phi_y = 0 \quad (50)$$

$$\text{โดยที่ } \gamma^4 = \rho h \omega^2, \quad \chi^4 = \frac{\rho h^3 \omega^2}{12}$$

เมื่อได้สมการการสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาแบบออร์โททรอปิกแล้ว ต่อไปจะเสนอรายละเอียดที่ประยุกต์ใช้วิธีแอนะล็อก (AEM) โดยใช้พื้นฐานการวิเคราะห์ด้วยวิธีบาวดารีเอลิเมนต์

วิธีบาวดารีเอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาแบบออร์โททรอปิก

วิธีบาวดารีเอลิเมนต์ที่เสนอในบทความนี้ได้นำมาประยุกต์ใช้ร่วมกับหลักการของวิธีสมการแอนะล็อก ซึ่งวิธีการนี้มีหลักการว่า สมการอนุพันธ์ใด ๆ ซึ่งจะเป็นเชิงเส้นหรือไม่เชิงเส้น สามารถแทนด้วยสมการอนุพันธ์อื่นที่มีอันดับเท่ากับสมการอนุพันธ์เดิม ภายใต้แหล่งกำเนิดสมมติ (Fictitious Source) โดยสมการแทนที่นี้จะเรียกว่าสมการแอนะล็อก [18]

เริ่มต้นพิจารณาสมการควบคุม (48)-(50) ซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์อันดับสอง ดังนั้นสมการแอนะล็อกจึงต้องเป็นอนุพันธ์อันดับสองด้วย ซึ่งสมการอนุพันธ์อันดับสองที่หาคำตอบได้อย่างง่ายคือสมการปัวซอง และแสดงได้ดังสมการที่ (51)-(53)

$$\nabla^2 w = b^{(1)}(X, t), \quad X \in \Omega \quad (51)$$

$$\nabla^2 \phi_x = b^{(2)}(X, t), \quad X \in \Omega \quad (52)$$

$$\nabla^2 \phi_y = b^{(3)}(X, t), \quad X \in \Omega \quad (53)$$

เมื่อ $b^{(1)}(X, t), b^{(2)}(X, t)$ และ $b^{(3)}(X, t)$ โดยที่ $X \in \Omega, t > 0$ คือแหล่งกำเนิดสมมติ คำตอบของสมการที่ (51)-(53) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของอินทิกรัล ได้ดังสมการที่ (54)-(56)

$$\varepsilon w(p) = -\int_{\Gamma} (u^* w_{,n} - u_n^* w) ds + \int_{\Omega} u^* b^{(1)} d\Omega \quad (54)$$

$$\varepsilon \phi_x(p) = -\int_{\Gamma} (u^* \phi_{x,n} - u_n^* \phi_x) ds + \int_{\Omega} u^* b^{(2)} d\Omega \quad (55)$$

$$\varepsilon \phi_y(p) = -\int_{\Gamma} (u^* \phi_{y,n} - u_n^* \phi_y) ds + \int_{\Omega} u^* b^{(3)} d\Omega \quad (56)$$

นิยาม เครื่องหมายตัวยก (*) หมายถึง คำตอบพื้นฐาน และเครื่องหมายตัวห้อย n, t หมายถึง เวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยและเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย ตามลำดับ

เมื่อ $u^* = (\ln r) / 2\pi$ คือคำตอบพื้นฐานของสมการลาปลาซ และ u_n^* คืออนุพันธ์ของคำตอบพื้นฐานตามเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย ในขณะที่ ε คือค่าสัมประสิทธิ์ที่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุด P โดยนิยามได้ตั้งสมการที่ (57)

$$\varepsilon(P) = \begin{cases} 1 & P \in \Omega \\ \frac{\alpha}{2\pi} & P \equiv p \in \Gamma \\ 0 & P \notin \Omega \end{cases} \quad (57)$$

โดยแหล่งกำเนิดสมมติ $b^{(1)}, b^{(2)}$ และ $b^{(3)}$ สามารถประมาณค่าโดย $b^{(l)} = \sum_{j=1}^M a_j^{(l)} f_j$ เมื่อ $l=1,2,3$ ซึ่ง f_j คือ Radial Basis Function (RBFs) และ $a_j^{(l)}(t)$ คือค่าสัมประสิทธิ์ที่ยังไม่ทราบค่าแล้วแทนลงในสมการที่ (54)-(56) หลังจากนั้นอาศัยทฤษฎีบทที่สองของกรีนจะได้สมการบาวดาเรียนที่กรัดตั้งสมการที่ (58)-(60) [7]

$$\varepsilon w(p) = \left(-\int_{\Gamma} (u^* w_{,n} - u_n^* w) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(1)} \left\{ \varepsilon \hat{u}_j(p) + \int_{\Gamma} (u^* \hat{u}_{j,n} - u_n^* \hat{u}_j) ds \right\} \right) \quad (58)$$

$$\varepsilon \phi_x(p) = \left(-\int_{\Gamma} (u^* \phi_{x,n} - u_n^* \phi_x) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(2)} \left\{ \varepsilon \hat{u}_j(p) + \int_{\Gamma} (u^* \hat{u}_{j,n} - u_n^* \hat{u}_j) ds \right\} \right) \quad (59)$$

$$\varepsilon \phi_y(p) = \left(-\int_{\Gamma} (u^* \phi_{y,n} - u_n^* \phi_y) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(3)} \left\{ \varepsilon \hat{u}_j(p) + \int_{\Gamma} (u^* \hat{u}_{j,n} - u_n^* \hat{u}_j) ds \right\} \right) \quad (60)$$

นอกจากนี้ยังสามารถที่จะสร้างสมการเพิ่มเติมเพื่อใช้ในการหาคำตอบอีกสามสมการด้วยการอนุพันธ์สมการที่ (58)-(60) ตามเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย τ (ดัง Figure 1) สำหรับจุด P ที่อยู่ทีขอบราบเรียบสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{1}{2} w_{,\tau}(p) = -\int_{\Gamma} (u_{,\tau}^* w_{,n} - u_{,n\tau}^* [w - w(p)]) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(1)} \left\{ \frac{1}{2} \hat{u}_{j,\tau}(p) + \int_{\Gamma} (u_{,\tau}^* \hat{u}_{j,\tau} - u_{,n\tau}^* [\hat{u}_j - \hat{u}_j(p)]) ds \right\} \quad (61)$$

$$\frac{1}{2} \phi_{x,\tau}(p) = -\int_{\Gamma} (u_{,\tau}^* \phi_{x,n} - u_{,n\tau}^* [\phi_x - \phi_x(p)]) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(2)} \left\{ \frac{1}{2} \hat{u}_{j,\tau}(p) + \int_{\Gamma} (u_{,\tau}^* \hat{u}_{j,\tau} - u_{,n\tau}^* [\hat{u}_j - \hat{u}_j(p)]) ds \right\} \quad (62)$$

$$\frac{1}{2} \phi_{y,\tau}(p) = -\int_{\Gamma} (u_{,\tau}^* \phi_{y,n} - u_{,n\tau}^* [\phi_y - \phi_y(p)]) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(3)} \left\{ \frac{1}{2} \hat{u}_{j,\tau}(p) + \int_{\Gamma} (u_{,\tau}^* \hat{u}_{j,\tau} - u_{,n\tau}^* [\hat{u}_j - \hat{u}_j(p)]) ds \right\} \quad (63)$$

สำหรับค่าอนุพันธ์ของการกระจัด เมื่อ $P \in \Omega$ ($\varepsilon=1$) สามารถหาได้จากสมการที่ (54)-(56) เช่นกัน โดยแสดงได้ดังนี้

$$w_{,vg}(P) = -\int_{\Gamma} (u_{,vg}^* w_{,n} - u_{,nvg}^* w) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(1)} \left\{ \hat{u}_{j,vg}(P) + \int_{\Gamma} (u_{,vg}^* \hat{u}_{j,n} - u_{,nvg}^* \hat{u}_j) ds \right\} \quad (64)$$

$$\phi_{x,vg}(P) = -\int_{\Gamma} (u_{,vg}^* \phi_{x,n} - u_{,nvg}^* \phi_x) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(1)} \left\{ \hat{u}_{j,vg}(P) + \int_{\Gamma} (u_{,vg}^* \hat{u}_{j,n} - u_{,nvg}^* \hat{u}_j) ds \right\} \quad (65)$$

$$\phi_{y,vg}(P) = -\int_{\Gamma} (u_{,vg}^* \phi_{y,n} - u_{,nvg}^* \phi_y) ds + \sum_{j=1}^M a_j^{(1)} \left\{ \hat{u}_{j,vg}(P) + \int_{\Gamma} (u_{,vg}^* \hat{u}_{j,n} - u_{,nvg}^* \hat{u}_j) ds \right\} \quad (66)$$

โดยกำหนดให้ $v, g = 0, x, y$ และจุด $P \in \Omega$

พิจารณาปัญหาค่าขอบเขตที่อธิบายด้วยสมการที่ (36)-(38) และ(58)-(63) มีตัวแปรไม่ทราบค่าทั้งหมด 9 ตัวคือ $w, w_n, w_t, \phi_x, \phi_{x,n}, \phi_{x,t}, \phi_y, \phi_{y,n}$ และ ที่ตำแหน่งขอบของปัญหา ซึ่งสามารถหาได้จากสมการของเงื่อนไขขอบเขต 3 สมการคือ สมการที่ (36)-(38) สมการบาวดารีอินทิกรัล 6 สมการคือ สมการที่ (58)-(63) รวมทั้งหมด 9 สมการ ดังนั้นจึงสามารถแก้ปัญหานี้ได้ด้วยการใช้วิธีสมการแอนนะล็อก ซึ่งทำให้หาคำตอบของปัญหานี้ได้

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

การหาคำตอบของสมการบาวดารีอินทิกรัลจะประยุกต์ใช้เทคนิคของวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ในการหาคำตอบ โดยบทความนี้ใช้บาวดารีเอลิเมนต์แบบคงที่ (Constant Element) เนื่องจากสะดวกในการหาคำตอบเมื่อเกิดสมการเอกฐาน (Singular Integral) ซึ่งสามารถหาค่าโดยใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ได้โดยตรง ไม่จำเป็นต้องใช้การหาค่าอินทิกรัลเอกฐานโดยวิธีเชิงตัวเลข

กำหนดให้ N และ M คือจำนวนเอลิเมนต์ที่ขอบและจำนวนโหนดภายในโดเมน (ดู Figure 2) ภายใต้สมการเงื่อนไขขอบเขตสมการที่ (36)-(38) และสมการบาวดารีอินทิกรัล (58)-(63) เมื่อให้ตำแหน่งของจุด p อยู่ที่โหนดของเอลิเมนต์แบบคงที่จำนวน N โหนด ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ดังนี้

$$[A]\{x\} = [C]\{a_j\} + \{B\} \quad (67)$$

โดย $\{x\}$ มีขนาด $9N \times 1$ เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรไม่ทราบค่า 9 ตัว $w, w_n, w_t, \phi_x, \phi_{x,n}, \phi_{x,t}, \phi_y, \phi_{y,n}$ และ $\phi_{y,t}$ ค่าสัมประสิทธิ์ $\{a_j\}$ คือค่าสัมประสิทธิ์ที่อยู่หน้า f_j ซึ่งสามารถหาค่าได้ภายหลัง และเมทริกซ์ $[A]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $9N \times 9N$ คือค่าสัมประสิทธิ์ที่ทราบค่าจากการอินทิเกรตฟังก์ชันเคอร์เนลบนบาวดารีเอลิเมนต์และสัมประสิทธิ์จากเงื่อนไขขอบเขตและ $\{B\}$ เป็นเวกเตอร์ $9N \times 1$ คือเมทริกซ์ที่ทราบค่าจากสมการเงื่อนไขจุดขอบเขต (36)-(38) ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ จากนั้นสามารถจัดเมทริกซ์เพื่อหาค่าของตัวแปรไม่ทราบค่าได้ดังนี้

$$\{x\} = [A]^{-1} [C]\{a_j\} \quad (68)$$

จากนั้นประยุกต์ใช้สมการที่ (64)-(66) โดยกำหนดให้จุด P อยู่ที่ตำแหน่งโหนดภายในโดเมนจำนวน M โหนด จะได้สมการที่ใช้หาคำตอบภายในโดเมนดังนี้

$$\{w_{,vg}\} = [D_{,vg}^{(1)}]\{x_1\} + [C_{,vg}^{(1)}]\{a_j^{(1)}\} \quad (69)$$

$$\{\phi_{x,vg}\} = [D_{,vg}^{(2)}]\{x_2\} + [C_{,vg}^{(2)}]\{a_j^{(2)}\} \quad (70)$$

$$\{\phi_{y,vg}\} = [D_{,vg}^{(3)}]\{x_3\} + [C_{,vg}^{(3)}]\{a_j^{(3)}\} \quad (71)$$

โดยที่ $\{w_{,vg}\}, \{\phi_{x,vg}\}$ และ $\{\phi_{y,vg}\}$ คือเวกเตอร์ที่เป็นคำตอบภายในโดเมน Ω มีขนาด $M \times 1$; $[D_{,vg}^{(1)}], [D_{,vg}^{(2)}]$ และ $[D_{,vg}^{(3)}]$ คือเมทริกซ์ที่ทราบค่าขนาด $M \times 2N$ ซึ่งได้มาจากการอินทิเกรตฟังก์ชันเคอร์เนลบนบาวดารีเอลิเมนต์ $\{x_1\}, \{x_2\}$; และ $\{x_3\}$ เป็นเวกเตอร์ขนาด $2N \times 1$ คือ ตัวแปรไม่ทราบค่าประกอบไปด้วย $[w, w_n]^T, [\phi_x, \phi_{x,n}]^T$ และ $[\phi_y, \phi_{y,n}]^T$ ตามลำดับ $[C_{,vg}^{(1)}], [C_{,vg}^{(2)}]$ และ $[C_{,vg}^{(3)}]$ เป็นเมทริกซ์มีขนาด $M \times M$ คือค่าสัมประสิทธิ์ที่ทราบค่าที่มาจาก u^* เป็นคำตอบพื้นฐานของสมการลาปลาซซึ่งอยู่ตรงตำแหน่งหลังพจน์ และ ตามลำดับของสมการที่ (64)-(66) จากนั้นแทนสมการที่ (69)-(71) ลงในสมการควบคุมสำหรับวิเคราะห์การสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาออร์โททรอปิกสมการที่ (48)-(50) แล้วจัดรูปสมการจะได้สมการเชิงเส้นของการสั่นอิสระแผ่นพื้นหนาแบบออร์โททรอปิก ซึ่งเป็นปัญหาค่าลักษณะเฉพาะดังสมการที่ (72)

$$[[K] - \omega_j^2 [M]]\{a_j^{(l)}\} = \{0\} \quad (72)$$

เมื่อ $[K]$ และ $[M]$ คือเมทริกซ์ของสติฟเนสและเมทริกซ์มวลของแผ่นพื้น ตามลำดับ ซึ่งทราบค่าขนาด $3M \times 3M$, ω_j คือค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency) และ $\{a_j^{(l)}\}$ เป็นเวกเตอร์ขนาด $3M \times 1$ คือเวกเตอร์แหล่งกำเนิดสมมติ โดยที่ $j = 1, 2, 3, \dots, M$

หลังจากหาค่าเฉพาะ (Eigenvalue) ในสมการที่ (72) จะได้ค่าความถี่ธรรมชาติและเวกเตอร์เฉพาะ (Eigenvector) สำหรับรูปร่างการสั่น แล้วให้นำ $\{a_j^{(l)}\}$ มาแทนลงในสมการที่ (69) จะได้สมการในการหาลักษณะการสั่นไหว ดังสมการที่ (73)

$$w_{,vg} = [W_{,vg}^{(1)}]\{a_j^{(1)}\} \quad (73)$$

โดยที่ค่า $w_{,vg}$ คือลักษณะการเสีรูปร่างเนื่องจากการสั่นไหวของแผ่นพื้นหนาแบบออร์โททรอปิก ซึ่งจำเป็นต้องเลือกความถี่ลักษณะเฉพาะให้ตรงกับค่าเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะตามโหมดการสั่นไหวที่ต้องการทราบค่าความถี่ธรรมชาตินั้นให้ตรงกัน

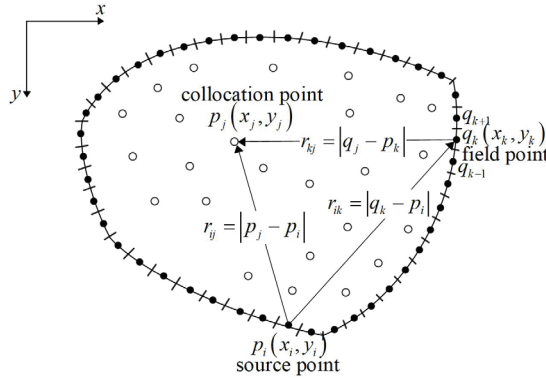


Figure 2 Discretization of the problem: Source point $p_i(x_i, y_i)$, Field point $q_k(x_k, y_k)$ and Collocation point $p_j(x_j, y_j)$

Numerical Results and Discussion

การตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการ

การประมาณค่าของคำตอบเชิงตัวเลขนั้น ในงานวิจัยนี้ใช้การประมาณค่าฟังก์ชันด้วย Radial Basis Function (RBFs) แบบ Thin Plate Spline : $f_j(r) = r^2 \ln r$ ซึ่งมีข้อดีคือไม่ต้องอาศัยตัวแปรจาก Shape parameter

การตรวจสอบความถูกต้องของงานวิจัยนี้ จะดำเนินการโดยเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติแบบไร้หน่วยกับงานวิจัยที่ผ่านมา โดยทำการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นพื้นหนา ออร์โททรอปิกกรุปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $a \times a$ ซึ่งกำหนดสมบัติของวัสดุออร์โททรอปิกดังนี้ $E_x / E_y = 40$, $G_{xy} = G_{xz} = 0.6E_y$, $G_{yz} = 0.5E_y$, $\rho = 200 \text{ kg/m}^3$ และ $\nu_{xy} = 0.25$ สำหรับค่าปรับแก้แรงเฉือนนั้นใช้ $k_s = 5/6$ ซึ่งมีจตุรกรงรับแบบต่าง ๆ (ดัง Figure 3) โดยกำหนดสัญลักษณ์ของจตุรกรงรับดังนี้

1. S คือ จตุรกรงรับอย่างง่าย (แบบแข็ง)
2. C คือ จตุรกรงรับยึดแน่น
3. F คือ จตุรกรงรับแบบอิสระ

การกำหนดลำดับของจตุรกรงรับจะให้ลำดับตำแหน่งของขอบ 1-2, 2-3, 3-4 และ 4-1 ตามลำดับ เช่นจตุรกรงรับแบบ $SCSF$ หมายถึง ด้าน 1-2 เป็นจตุรกรงรับอย่างง่าย ด้าน 2-3 เป็นจตุรกรงรับยึดแน่น ด้าน 3-4 เป็นจตุรกรงรับอย่างง่าย และด้าน 4-1 เป็นจตุรกรงรับแบบอิสระ เป็นต้น

Table 1 แสดงผลการเปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ความถี่ธรรมชาติแบบไร้หน่วย ระหว่างผลที่คำนวณได้กับผลวิเคราะห์ของ Wang และคณะ [13] ซึ่งได้เสนอผลวิเคราะห์แบบแม่นยำไว้ด้วย โดยการวิเคราะห์นี้ใช้จำนวนบาวตารีเอลิเมนต์จำนวน 200 และโหนดภายในโดเมนจำนวน 196 จาก Table 1 และยกตัวอย่าง

โหมดการสั่น (ดัง Figure 4) จะเห็นได้ว่าผลการวิเคราะห์มีความใกล้เคียงกัน ซึ่งความคลาดเคลื่อนโหมดที่ 1 นั้นมีค่าอยู่ในช่วงร้อยละ 0.035 ถึงร้อยละ 1.236 ดังนั้นวิธีการที่นำเสนอในงานวิจัยนี้สามารถใช้ได้และมีความถูกต้อง

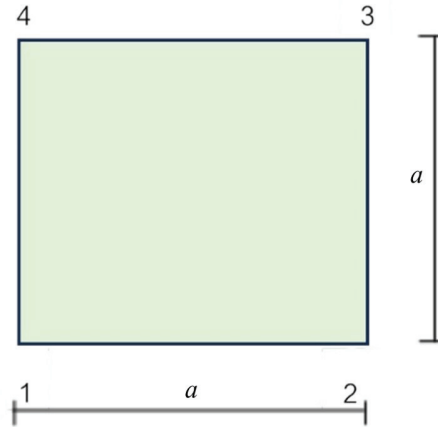


Figure 3 Arrangement of support points on each side of orthotropic plate

Table 1 Comparison of first five non-dimensional natural frequency parameters

$$\omega = (\omega_j a^2 / \pi^2) (\sqrt{\rho h / D_{22}}) \text{ for } h / a = 0.1$$

Boundary condition	Method	Mode Number				
		1	2	3	4	5
SSSS	Wang et al. [13]	5.142	6.625	9.988	13.330	14.088
	Present	5.140	6.681	10.062	13.387	14.173
CSSS	Wang et al. [13]	5.283	7.164	10.849	13.389	14.349
	Present	5.285	7.212	10.891	13.452	14.419
SCSC	Wang et al. [13]	5.498	7.783	11.738	13.475	14.665
	Present	5.502	7.818	11.754	13.543	14.714
SCSF	Wang et al. [13]	4.952	5.690	8.034	12.050	13.223
	Present	5.013	5.928	8.445	12.269	13.733

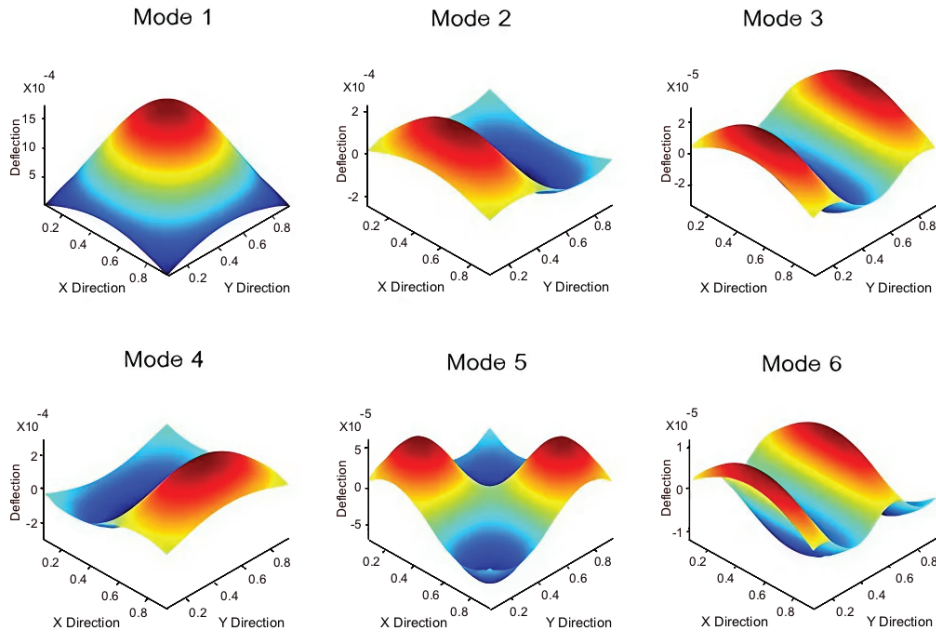


Figure 4 Mode shapes of thick orthotropic rectangular plate with SSSS boundary condition for $h/a = 0.1$

การตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบ

การประเมินการลู่เข้าของคำตอบเชิงตัวเลขนั้น ทำโดยการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นพื้นหนาทอโรทอปิกรูปลี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $a \times a$ เปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกับคำตอบเชิงวิเคราะห์ในงานวิจัยของ Petrolito [11] ซึ่งกำหนดสมบัติของวัสดุอโรทอปิกดังนี้ $E_x / E_y = 40$, $G_{xy} = G_{xz} = 0.6E_y$, $G_{yz} = 0.5E_y$, $\rho = 200 \text{ kg/m}^3$ และ $\nu_{xy} = 0.25$ สำหรับค่าปรับแก้แรงเฉือนนั้นใช้ $k_s = 5/6$ ที่มีจุดรองรับธรรมดาแบบแข็ง ในการประมาณค่าฟังก์ชันด้วย Thin Plate Splines หากใช้ฟังก์ชัน multi-quadrics ทำให้วิเคราะห์ได้ง่ายขึ้น จากการตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบนั้น เมื่อแบ่งจำนวนเอลิเมนต์ที่ขอบ และโหนดภายในโดเมนเพิ่มขึ้น พบว่าความคลาดเคลื่อนมีแนวโน้มลดลง (ดู Figure 5) จะเห็นได้ว่าจำนวนเอลิเมนต์ที่ขอบไม่ค่อยส่งผลต่อความคลาดเคลื่อนของคำตอบมากนัก แต่จำนวนโหนดภายในโดเมนมีผลต่อความคลาดเคลื่อนของคำตอบเป็นอย่างมาก จากการศึกษาการลู่เข้าของคำตอบพบว่าจำนวนเอลิเมนต์อยู่ในช่วง 160 ถึง 240 และจำนวนโหนดภายในโดเมนอยู่ในช่วง 196 ถึง 400 เป็นช่วงที่ให้คำตอบที่ดี มีความคลาดเคลื่อนน้อยมากและไม่สิ้นเปลืองทรัพยากรในการคำนวณทำให้คำนวณได้รวดเร็วขึ้น

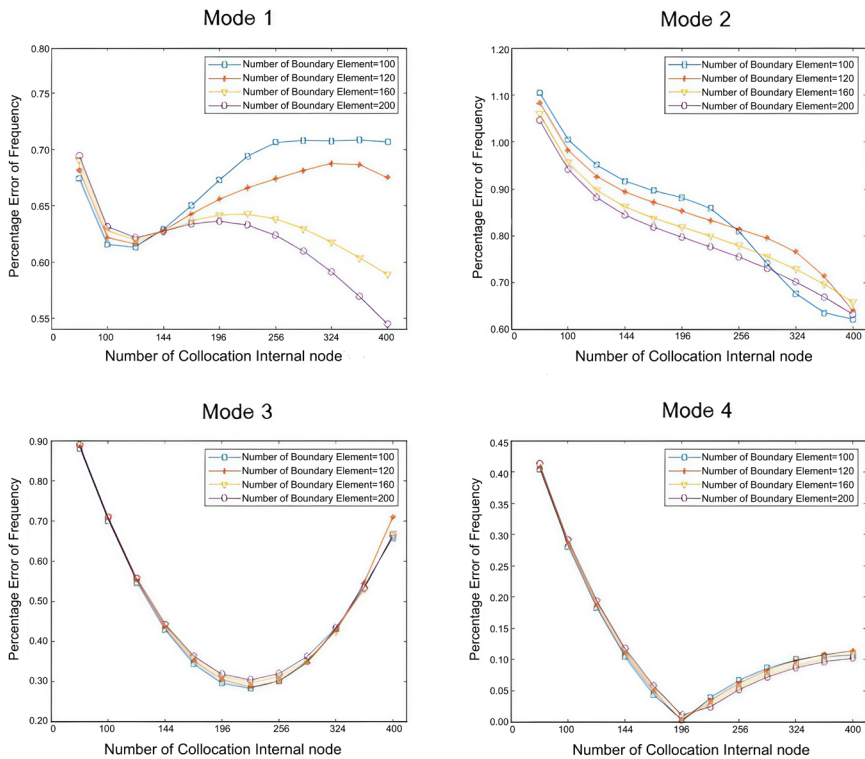


Figure 5 Comparison of convergence of natural frequency parameters with different numbers of N elements and M domains

ผลของอัตราส่วนค้ำมอดุลัสยืดหยุ่น E_x/E_y และอัตราส่วน h/a ที่ส่งผลต่อความถี่ธรรมชาติ

เพื่อศึกษาผลของอัตราส่วนของมอดุลัสยืดหยุ่นที่ส่งผลต่อความถี่ธรรมชาติของแผ่นพื้นหนาแบบออร์โททรอปิก รูปร่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1×1 เมตร เงื่อนไขรองรับธรรมดาแบบแข็ง ซึ่งได้กำหนดอัตราส่วน $E_x/E_y = 2$, และเมื่อให้ E_x คงที่และแปรผัน E_y , ด้วยอัตราส่วนความหนาต่อต้านสั้นเท่ากับ 0.1 ถึง 0.2 $G_{xy} = G_{xz} = 0.6E_y$, $G_{yz} = 0.5E_y$, $\rho = 200 \text{ kg/m}^3$ และ $\nu_{xy} = 0.25$ จากการศึกษาพบว่าเมื่ออัตราส่วนมอดุลัสยืดหยุ่นเพิ่มขึ้น ความถี่ธรรมชาติยิ่งลดลง เนื่องจากสติเฟนสของแผ่นพื้นมีค่าลดลง อัตราส่วนความหนาต่อต้านสั้น ส่งผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติ เมื่อความหนาเพิ่มขึ้นความถี่ธรรมชาติมีค่าเพิ่มขึ้น เนื่องจากสติเฟนสเพิ่มขึ้น โดยงานวิจัยนี้แสดงความสัมพันธ์ของอัตราส่วนของมอดุลัสยืดหยุ่นที่อัตราส่วนความหนาต่อต้านสั้นที่แตกต่างกันกับความถี่ธรรมชาติ (ดู Figure 6)

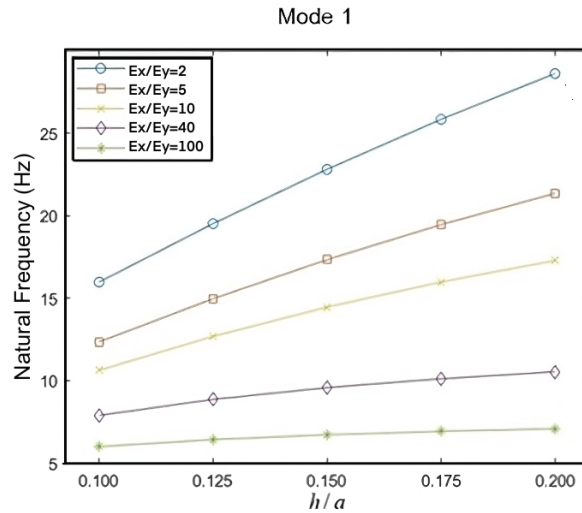


Figure 6 Natural frequency versus thickness ratio h/a for orthotropic plate with different orthotropic degrees E_x/E_y

การวิเคราะห์ความถี่ธรรมชาติของแผ่นพื้นหนาออร์โททรอปิกที่มีเงื่อนไขรองรับที่ขอบแบบผสม Elastic support - Elastic restraint

การวิเคราะห์ค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นพื้นหนาแบบออร์โททรอปิก โดยการเปลี่ยนแปลงค่าความแข็งเกร็งต่อการเคลื่อนที่ (translational stiffness : \bar{k}_{tr}) และค่าความแข็งเกร็งต่อการดัด (rotational stiffness : \bar{k}_{ro}) วัสดุออร์โททรอปิกจะใช้ $\bar{k}_{tr} = k_{tr}(a^3/D_{22})$ กับ $\bar{k}_{ro} = k_{ro}(a/D_{22})$ [17] ซึ่งเป็นเงื่อนไขของจตุรรองรับแบบผสมของเงื่อนไขรองรับแบบยืดหยุ่น (Elastic support) กับเงื่อนไขรองรับยืดหยุ่นแบบยึดรั้ง (Elastic restraint) (ดู Figure 7) ในการวิเคราะห์ครั้งนี้จะใช้สมบัติของวัสดุตามหัวข้อการตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบ โดยแผ่นพื้นที่จะพิจารณา คือสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1×1 ตารางเมตร ความหนา 0.1 เมตร โดยใช้จำนวนของเอลิเมนต์ที่ขอบเขตและจำนวนโนดภายในโดเมนที่ใช้ คือ 200 และ 400 ตามลำดับ และผลการวิเคราะห์ค่าความถี่ธรรมชาติแบบไร้หน่วย แสดงดัง Table 2 แสดงให้เห็นว่า เมื่อ $\bar{k}_{tr} = 0$ แผ่นพื้นจะแสดงพฤติกรรมสอดคล้องกับค่าความถี่ธรรมชาติที่มีเงื่อนไขรองรับแบบอิสระ และเมื่อ \bar{k}_{tr} มีค่าเข้าใกล้อนันต์ ค่าความถี่ธรรมชาติจะสอดคล้องกับค่าความถี่ธรรมชาติที่มีเงื่อนไขรองรับแบบธรรมดาแบบแข็ง เมื่อ $\bar{k}_{ro} = 0$ แผ่นพื้นจะแสดงพฤติกรรมสอดคล้องกับค่าความถี่ธรรมชาติที่มีเงื่อนไขรองรับแบบธรรมดาแบบอ่อน และเมื่อ \bar{k}_{ro} มีค่าเข้าใกล้อนันต์ ค่าความถี่ธรรมชาติจะสอดคล้องกับค่าความถี่ธรรมชาติที่มีเงื่อนไขรองรับแบบยึดแน่น ซึ่งแสดงให้เห็นว่าวิธีสมการแอนนะล็อกสามารถวิเคราะห์ความถี่ธรรมชาติของแผ่นพื้นหนาออร์โททรอปิกที่มีจตุรรองรับที่ขอบระหว่าง จตุรรองรับแบบอิสระ ผสมกับจตุรรองรับธรรมดาแบบอ่อน และจตุรรองรับธรรมดาแบบแข็งผสมกับจตุรรองรับแบบยึดแน่นได้

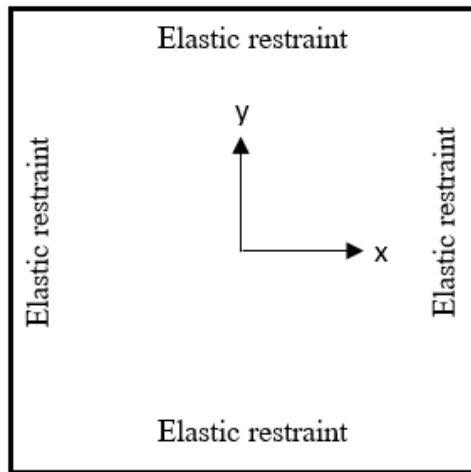


Figure 7 Thick orthotropic square plate with Elastic support - Elastic restraint Boundary conditions

Table 2 First five non-dimensional natural frequency parameter with Elastic support - Elastic restraint boundary conditions

$\bar{k}_{tr}, \bar{k}_{ro}$	Mode number				
	1	2	3	4	5
Free support - Soft type simply support (<i>FSFS</i>)	5.120	5.629	8.211	11.196	13.235
0	5.120	5.629	8.211	11.196	13.235
10	5.190	5.809	8.249	9.588	13.291
100	5.896	5.815	8.751	9.705	13.533
1000	6.678	9.188	10.659	13.831	14.147
10000	6.932	9.199	10.727	13.932	14.500
100000	6.969	9.286	10.748	13.951	14.610
1000000	6.973	9.238	10.802	13.953	14.624
Hard type simply support - Clamped support (<i>SCSC</i>)	6.973	9.221	10.808	13.954	14.625

การวิเคราะห์แผ่นพื้นหนาออร์ทอทรอปิกที่มีรูปร่างซับซ้อน

เพื่อให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีบาวตารีเอลิเมนต์ที่ประยุกต์ใช้วิธีเมชเลสในการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาออร์ทอทรอปิกที่มีรูปร่างซับซ้อน ซึ่งแสดงรูปร่างของแผ่นพื้นและโหนดภายในโดเมน (ดู Figure 8) โดยกำหนดสมบัติต่าง ๆ ตามหัวข้อการตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการ กำหนดให้ใช้ความกว้างของแผ่นพื้นด้านสั้นที่สุด $a=1$ และค่าความโค้งที่มากที่สุด $b=0.2$ โดยแบ่งเอลิเมนต์ที่ขอบเท่ากับ 210 เอลิเมนต์ โหนดภายในโดเมนเท่ากับ 308 และ 483 โหนด เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับโปรแกรม ABAQUS โดยใช้ 3D shell element แบบ S8R จำนวน 2,808 เอลิเมนต์ จากการวิเคราะห์พบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติแบบไร้หน่วยที่ได้จากงานวิจัยนี้ มีความสอดคล้องกัน แสดงดัง Table 3 จากตัวอย่างข้างต้นได้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีบาวตารีเอลิเมนต์ โดยอาศัยวิธีสมการแอนนะล็อกในการประมาณคำตอบ ซึ่งเป็นวิธีที่สามารถแสดงให้เห็นพฤติกรรมการสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาออร์ทอทรอปิกที่มีรูปร่างซับซ้อน (ดู Figure 9) และจะเห็นได้ว่าคำตอบนั้นขึ้นอยู่กับอันดับอนุพันธ์ของสมการเดิมเท่านั้น ดังนั้นวิธีการนี้จึงนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ ได้

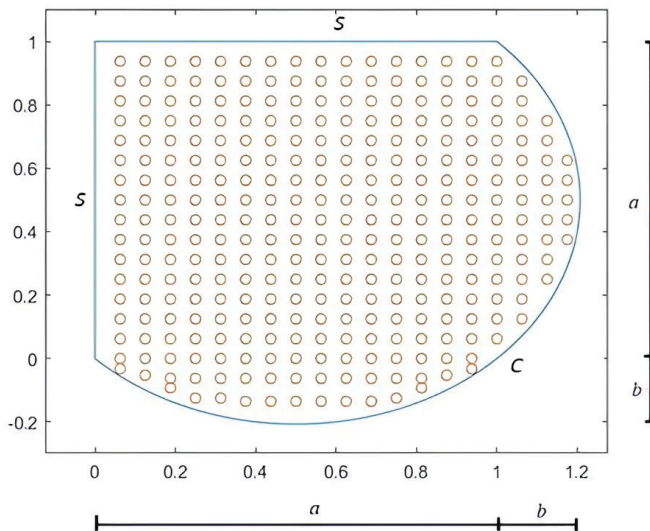


Figure 8 Orthotropic thick general plate with CSS boundary condition

Table 3 Comparison of the first five non-dimensional natural frequency parameters $\omega = (\omega_j a^2 / \pi^2) (\sqrt{\rho h / D_{22}})$ for a thick orthotropic general plate

Boundary condition	h/a	N	M	Method	Mode number				
					1	2	3	4	5
CSS	0.1	210		ABAQUS	4.906	6.329	8.956	11.258	12.017
			308	Present	4.949	6.408	8.991	11.240	12.379
			percentage error		0.879	1.240	0.386	0.165	2.927
			483	Present	4.943	6.392	8.959	11.242	12.365
			percentage error		0.740	0.980	0.035	0.139	2.817
	0.2	210		ABAQUS	3.136	4.413	6.332	6.556	7.402
			308	Present	3.155	4.460	6.337	6.573	7.436
			percentage error		0.602	1.054	0.078	0.256	0.462
			483	Present	3.151	4.457	6.335	6.571	7.435
			percentage error		0.481	0.981	0.048	0.231	0.443

(A) Mode shapes of thick orthotropic general plate with CSS boundary condition for $\nu = 0.1$

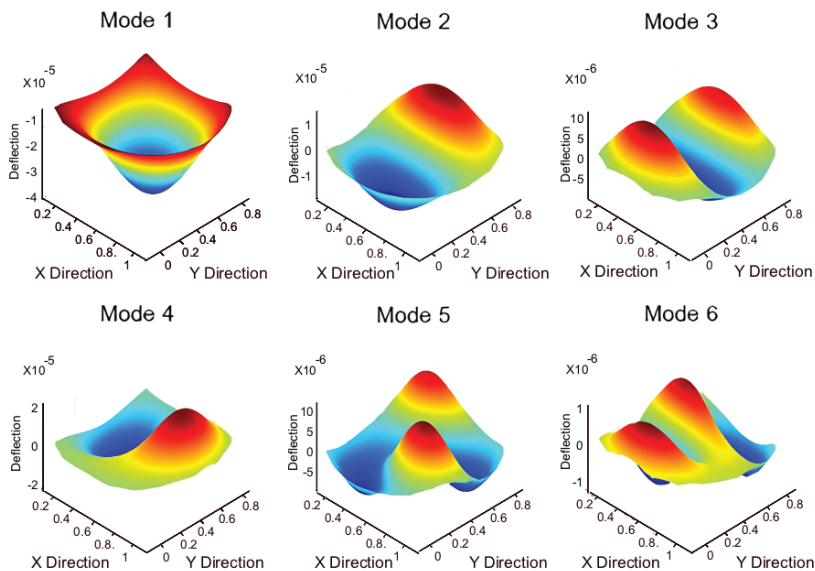


Figure 9 Mode shapes of thick orthotropic general plate

(B) Mode shapes of thick orthotropic general plate with CSS boundary condition for $\nu = 0.2$

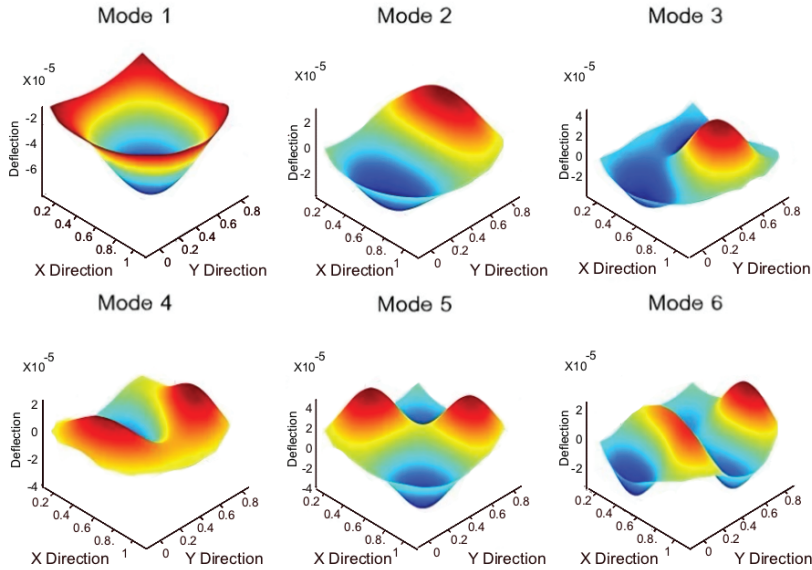


Figure 9 Mode shapes of thick orthotropic general plate (continued)

Conclusions

การศึกษานี้ได้พัฒนาวิธีบาวดารีเอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาแบบออร์โททรอปิกตามสมมติฐานของ Mindlin ซึ่งสามารถวิเคราะห์แผ่นพื้นหนามี่รูปร่างซับซ้อนได้ โดยใช้หลักการของวิธีสมการแอนนูล็อก ซึ่งวิธีการดังกล่าวคือการแทนสมการควบคุมดั้งเดิมด้วยสมการปัวซองสามสมการที่เป็นอิสระต่อกัน ภายใต้แรงกระทำสมมติ โดยมีเงื่อนไขขอบเขตเดียวกันกับปัญหาเดิม จากผลการวิเคราะห์สรุปได้ดังนี้

1. ค่าตอบที่ได้จากวิธีบาวดารีเอลิเมนต์มีความสอดคล้องกับค่าตอบที่ได้จากงานวิจัยอื่น ๆ ที่ผ่านมา แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีการนี้ ดังนั้นวิธีนี้สามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาการสั่นอิสระของแผ่นพื้นหนาแบบออร์โททรอปิกได้อย่างมีประสิทธิภาพ

2. การลู่เข้าของค่าตอบเมื่อทำการแบ่งเอลิเมนต์ที่ขอบและจำนวนโหนดภายในในมากขึ้น ส่งผลให้ค่าความคลาดเคลื่อนของค่าตอบลดน้อยลง เมื่อแบ่งเอลิเมนต์ที่ขอบตั้งแต่ 100 เอลิเมนต์จนถึง 200 เอลิเมนต์พบว่าไม่ส่งผลกระทบต่อค่าความคลาดเคลื่อนของค่าตอบมากนักเมื่อเทียบกับจำนวนโหนดภายในโดเมนตั้งแต่ 81 จุดจนถึง 400 จุดพบว่าค่าความคลาดเคลื่อนมีแนวโน้มลดลง เมื่อจำนวนโหนดภายในโดเมนเพิ่มมากขึ้น

3. จากการพิจารณาผลของพารามิเตอร์ต่าง ๆ พบว่าเมื่อความหนาเพิ่มขึ้นส่งผลให้ความถี่ธรรมชาติสูงขึ้น เนื่องจากค่าสติเฟนของแผ่นพื้นสูงขึ้น ในขณะที่อัตราส่วนค้ำอดคูลัสยืดหยุ่นเพิ่มขึ้น ทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติลดลง เนื่องจากเมื่ออัตราส่วนค้ำอดคูลัสยืดหยุ่นลดลงส่งผลให้ค่าความแข็งของแผ่นพื้นลดลงด้วยเช่นกัน

4. จากการศึกษาเงื่อนไขของจุดรองรับที่ขอบ กรณีที่เป็นจุดรองรับแบบยึดหยุ่น เมื่อ $\bar{k}_r = 0$ แผ่นพื้นจะแสดงพฤติกรรมสอดคล้องกับค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นพื้นที่มีเงื่อนไขรองรับแบบอิสระและเมื่อ \bar{k}_r มีค่าเข้าใกล้อนันต์ ค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นพื้นจะสอดคล้องกับแผ่นพื้นที่มีเงื่อนไขรองรับแบบธรรมดาแบบแข็ง และเงื่อนไขของจุดรองรับที่ขอบ กรณีที่เป็นจุดรองรับแบบยึดรั้งยึดหยุ่น เมื่อ $\bar{k}_{ro} = 0$ แผ่นพื้นจะแสดงพฤติกรรมสอดคล้องกับแผ่นพื้นที่มีเงื่อนไขรองรับแบบธรรมดาแบบอ่อนและเมื่อ \bar{k}_{ro} มีค่าเข้าใกล้อนันต์ ค่าความถี่ธรรมชาติจะสอดคล้องกับค่าความถี่ธรรมชาติของแผ่นพื้นที่มีเงื่อนไขรองรับแบบยึดแน่น

5. วิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติและลักษณะการสั่นของแผ่นพื้นหนาแบบออร์โททรอปิกที่มีรูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตที่ซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ

References

1. Biancolini, M., Brutti, C. and Reccia, L., 2005, "Approximate Solution for Free Vibrations of Thin Orthotropic Rectangular Plates," *Journal of Sound and Vibration*, 288 (1–2), pp. 321–344.
2. Demasi, L., 2006, "Quasi-3D Analysis of Free Vibration of Anisotropic Plates," *Composite Structures*, 74 (4), pp. 449–457.
3. Xing, Y. and Liu, B., 2009, "New Exact Solutions for Free Vibrations of Thin Orthotropic Rectangular Plates," *Composite Structures*, 89 (4), pp. 567–574.
4. Liu, X., Wang, Q. and Quek, S.T., 2002, "Analytical Solution for Free Vibration of Piezoelectric Coupled Moderately Thick Circular Plates," *International Journal of Solids and Structures*, 39, pp. 2129–2151.
5. Shafiee, A., Alizadeh, Y. and Redekop, D., 2003 "Free Vibration of Completely Free Coupled Orthotropic Rectangular Plates," *Journal of Sound and Vibration*, 267, pp. 366–370.
6. Karami, G. Malekzadeh, P. and Mohebpour, S.R., 2006, "DQM Free Vibration Analysis of Moderately Thick Symmetric Laminated Plates with Elastically Restrained Edges," *Composite Structures*, 74, pp. 115–125.
7. Chinnaboon, B., Chucheepsakul, S. and Katsikadelis, J. T., 2011, "A BEM-Based Domain Meshless Method for The Analysis of Mindlin Plates with General Boundary Condition," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200, pp. 1379–1388.
8. Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M. and Rokni Damavandi Taher, H., 2011, "Exact Solutions for Free Flexural Vibration of Lévy-type Rectangular Thick Plates Via Third-order Shear

- Deformation Plate Theory,” *Applied Mathematical Modelling*, 35 (2), pp. 708–727.
9. Thai, H.T. and Kim, S.E, 2012, “Levy-type Solution for Free Vibration Analysis of Orthotropic Plates Based on Two Variable Refined Plate Theory,” *Applied Mathematical Modelling*, 36 (8), pp. 3870–3882.
 10. Senjanovic´, I., Vladimir, N. and Tomic´, M., 2013, “An advanced Theory of Moderately Thick Plate Vibrations,” *Journal of Sound and Vibration*, 332, 1868–1880.
 11. Petrolito, J., 2014, “Vibration and Stability Analysis of Thick Orthotropic Plates Using Hybrid-Trefftz Elements,” *Applied Mathematical Modelling*, 38, pp. 5858-5869.
 12. Ye, T., Jin, G., Su, Z. and Chen, Y., 2014, “A Modified Fourier Solution for Vibration Analysis of Moderately Thick Laminated Plates with General Boundary Restraints and Internal Line Supports,” *International Journal of Mechanical Sciences*, 80, pp. 29-46.
 13. Wang, Q., Shi, D. and Shi, X., 2015, “A Modified Solution for The Free Vibration Analysis of Moderately Thick Orthotropic Rectangular Plates with General Boundary Conditions, Internal Line Supports and Resting on Elastic Foundation,” *Meccanica*, pp. 1-33.
 14. Wang, Q., Shi, D., Liang, Q. and e Ahad, F., 2016, “A Unified Solution for Free In-plane Vibration of Orthotropic Circular, Annular and Sector Plates with General Boundary Conditions,” *Applied Mathematical Modelling*, 40 (21–22), pp. 9228-9253.
 15. Pang, F., Li, H., Miao, X. and Wang, X., 2017, “A Modified Fourier Solution for Vibration Analysis of Moderately Thick Laminated Annular Sector Plates with General Boundary Conditions, Internal Radial Line and Circumferential Arc Supports,” *Curved and Layered Structures*, 4 (1), pp. 189-220.
 16. Ghashochi-Bargh, H. and. Razavi, S., 2018, “A Simple Analytical Model for Free Vibration of Orthotropic and Functionally Graded Rectangular Plates,” *Alexandria Engineering Journal*, 57, pp. 595-607
 17. Jeeradit, S., 2021, Analysis of Thick Orthotropic Auxetic Plates by Boundary Element Method, Master of Engineering Thesis, Civil Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology Thonburi, 135 p. (In Thai)
 18. Katsikadelis, J.T., 2014, The Boundary Element Method for Plate Analysis: BEM for Dynamic Analysis of Plates, Elsevier Science Inc., Oxford, pp. 217-220.
 19. Zheng, X., Xu, D., Ni, Z., Zhou, C., An, D., Wang, B. and Li, R., 2021, “New Benchmark Free Vibration Solutions of Non-Lévy-type Thick Rectangular Plates Based on Third-order Shear Deformation Theory,” *Composite Structures*, 268, pp. 113955.

20. Eftekhari, S.A. and Jafari, A.A., 2013, "Modified Mixed Ritz-DQ Formulation for Free Vibration of Thick Rectangular and Skew Plates with General Boundary Conditions," *Applied Mathematical Modelling*, 37 (12–13), pp. 7398–7426.