Science and Engineering Connect, ISSN 3027-7914 (Online)
Vol. 48 No. 1 pp. 22-52 (2025)

บทความวิจัย (Research Article)

การวิเคราะห์การดัดของพื้นหนาที่ผลิตจากวัสดุ FGMs บนฐานรากยืดหยุ่น ด้วยวิธีบาวดารีเอลิเมนต์

Bending Analysis of Functionally Graded Thick Plates on Elastic Foundations by Boundary Element Method

ติณณภพ บุญทศ, บุญมี ชินนาบุญ*, สมชาย ชูชีพสกุล
Tinnapop Boontos, Boonme Chinnaboon*, Somchai Chucheepsakul
คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี กรุงเทพฯ ประเทศไทย
Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangkok, Thailand
มนต์ชัย ปัญญาทอง
Monchai Panyatong
คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลล้านนา เชียงราย ประเทศไทย
Faculty of Engineering, Rajamangala University of Technology Lanna, Chiang Rai, Thailand
* Corresponding author E-mail: boonme.chi@kmutt.ac.th

Received 1 November 2024; Revised 25 February 2025; Accepted 3 March 2025

บทคัดย่อ

ความเป็นมาและวัตถุประสงค์ : ปัจจุบัน วัสดุ FGMs (Functionally Graded Materials) ได้รับความสนใจเป็นอย่างมากในวงการวิศวกรรม โดยมีการประยุกต์ใช้อย่างหลากหลายในโครงสร้างแผ่นพื้นเนื่องจากสมบัติที่เปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องตามความหนา ทำให้สามารถปรับแต่งสมบัติทางกลและความต้านทานให้เหมาะสมกับการใช้งานได้ การวิเคราะห์พฤติกรรมการดัดของแผ่นพื้นหนา FGMs บนฐานรากยืดหยุ่นเป็นปัญหาที่ซับซ้อน เนื่องจากต้องพิจารณาปฏิสัมพันธ์ระหว่างแผ่นพื้นและฐานราก รวมถึงผลของการเปลี่ยนแปลงสมบัติวัสดุตามความหนา แม้ว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีเชิงวิเคราะห์อื่น ๆ จะได้รับการพัฒนาเพื่อวิเคราะห์การดัดของแผ่นพื้นหนา FGMs บนฐานรากยืดหยุ่น แต่วิธีดังกล่าวยังคงมีข้อจำกัดในการจัดการกับเงื่อนไขขอบเขตและรูปร่างที่ซับซ้อนของโครงสร้าง ดังนั้น งานวิจัยนี้จึงได้พัฒนาวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ (Boundary Element Method; BEM) ขึ้นเพื่อเป็นทางเลือกในการวิเคราะแผ่นพื้นหนาแบบ FGMs บนฐานรากยืดหยุ่น

วิธีดำเนินการวิจัย : สมการควบคุมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหานี้ได้มาจากการใช้หลักการงานเสมือน โดยใช้ทฤษฎีของแผ่นพื้นที่คำนึงถึงการเปลี่ยนรูปเนื่องจากแรงเฉือนอันดับที่ 1 ในขณะที่สมบัติของวัสดุ FGMs จำลองโดยใช้การกระจายแบบ Power law วิธีการที่นำเสนอนี้ได้รับการพัฒนาโดยใช้แนวคิดของวิธีสมการแอนะล็อก (Analog Equation Method; AEM) โดยที่สมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาเดิมจะถูกแทนที่ด้วยสมการปัวซอง 3 สมการภายใต้แหล่งกำเนิดสมมติที่มีเงื่อนไขขอบเขตเช่นเดียวกับปัญหาเดิม จากนั้นแหล่ง

กำเนิดสมมติจะถูกสร้างขึ้นโดยใช้เทคนิคที่มีพื้นฐานจากวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ และประมาณค่าโดยใช้ Radial basis functions ความน่าเชื่อถือของวิธีการประเมินโดยการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่คำนวณได้กับผลลัพธ์จากการวิเคราะห์โดยวิธีอื่น ๆ

ผลการวิจัย : ผลการคำนวณที่ได้จากวิธีที่นำเสนอมีความถูกต้องแม่นยำสูงเมื่อเปรียบเทียบกับผลของงานวิจัยอื่นที่เกี่ยวข้อง โดยแสดงให้เห็นถึงการลู่เข้าของคำตอบเมื่อใช้จำนวนโหนดภายในโดเมนมากขึ้น อีกทั้งยังแสดงการวิเคราะห์แผ่นพื้นหนา FGMs ที่วางบนฐานรากยืดหยุ่นที่มีความซับซ้อน เช่น มีเงื่อนไขขอบเขตแบบยึดหยุ่นและยึดหยุ่นแบบยึดรั้งหรือแผ่นพื้นที่มีรูปร่างแบบต่าง ๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งยังไม่พบการวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนดังกล่าวในงานวิจัยอื่นที่ผ่านมา

สรุป : งานวิจัยนี้พัฒนาวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ร่วมกับสมการแอนะล็อกเพื่อวิเคราะห์การดัดของแผ่นพื้นหนาที่ทำจากวัสดุ FGMs บนฐานรากยืดหยุ่นที่มีความซับซ้อนทั้งเงื่อนไขขอบเขตและรูปร่าง ผลลัพธ์ที่ได้ชี้ให้เห็นถึงความถูกต้องและประสิทธิภาพของวิธีการที่นำเสนอ โดยสามารถจำลองปฏิสัมพันธ์และผลกระทบของสมบัติวัสดุและพารามิเตอร์ต่าง ๆ ต่อการตอบสนองการดัดของแผ่นพื้นได้อย่างแม่นยำ

การนำไปใช้ประโยชน์ในเชิงปฏิบัติ : การศึกษานี้เสนอวิธีการที่มีประสิทธิภาพสำหรับวิเคราะห์การดัดของแผ่นพื้นหนาจากวัสดุ FGMs ที่วางบนฐานรากยืดหยุ่น โดยสามารถวิเคราะห์แผ่นพื้นที่มีความซับซ้อนในแง่มุมของทั้งรูปร่างแผ่นพื้นและเงื่อนไขขอบเขต ซึ่งพบได้ในการประยุกต์ใช้งานในสถานการณ์จริง ดังนั้นจึงทำให้สามารถออกแบบโครงสร้างดังกล่าวได้อย่างปลอดภัยและมีประสิทธิภาพ

คำสำคัญ : ฐานรากยืดหยุ่น, แผ่นพื้นหนา FGMs, วิธีบาวดารีเอลิเมนต์, วิธีสมการแอนะล็อก

Abstract

Background and Objectives: Functionally Graded Materials (FGMs) are garnering significant attention in engineering due to their versatile applications in structural components, especially in plate structures. Their properties, which vary continuously with thickness, enable the tailoring of mechanical properties and resistance to meet specific operational needs. Analyzing the bending behavior of thick FGM plates on elastic foundations is nevertheless a complicated task, requiring consideration of the interactions between the plates and the foundations as well as the implications of variation in material properties with thickness. Although Finite Element Method (FEM) and other analytical approaches have been extensively developed to analyze the bending of thick FGM plates on elastic foundations, such methods continue

to encounter limitations in managing complex boundary conditions and structural shapes. Consequently, in this research, the Boundary Element Method (BEM) was developed as an alternative for analyzing thick FGM plates on elastic foundations.

Methodology: The governing equations and boundary conditions were derived using the principle of virtual work, based on the first-order shear deformation plate theory. The properties of FGMs were modeled using a power law distribution model. The presented method was developed using the concept of the Analog Equation Method, where the differential equations of the original problem were substituted with three Poisson's equations under fictitious forces, maintaining the original boundary conditions. These fictitious forces were generated using techniques based on the Boundary Element Method and approximated using radial basis functions. The reliability of the proposed method was assessed by comparing the results of the present research with outcomes from other established approaches.

Main Results: The numerical results obtained from the proposed method are highly accurate and precise when compared to those of other relevant research, demonstrating convergence of the solution as the number of boundary elements and internal nodes increases. Furthermore, it effectively analyzed thick FGMs plates on elastic foundations under complex conditions, such as an elastic support and elastic restraint, or plates with various shapes. Such complex problem has not been investigated in previous research studies.

Conclusions: The present research developed the Boundary Element Method (BEM) in conjunction with the Principle of Analog Equation to analyze the bending of complex thick plates made from Functionally Graded Materials (FGMs) resting on elastic foundations, considering both the boundary conditions and the plate shapes. The results demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed methods, capable of accurately simulating the interactions and effects of material properties and various parameters on the bending response of the plates.

Practical Application: This study proposes an effective method for analyzing the bending of thick plates made from Functionally Graded Materials (FGMs) on elastic foundations, capable of analyzing plates with complex shapes and boundary conditions that are common in real-world applications. This allows for the safe and efficient design of such structures.

Keywords: Elastic Foundation, Thick Functionally-Graded Plate, Boundary Element Method, Analog Equation Method

Introduction

โครงสร้างแผ่นหนาวางอยู่บนฐานรากยืดหยุ่นเป็นองค์ประกอบสำคัญในงานวิศวกรรมโยธาและวิศวกรรมโครงสร้าง โดยพบการประยุกต์ใช้งานได้อย่างหลากหลาย เช่น พื้นอาคารที่วางบนดิน ถนน และฐานรากเครื่องจักร เป็นต้น ในทศวรรษที่ผ่านมา วัสดุ FGMs (Functionally Graded Materials; FGMs) เป็นวัสดุคอมโพสิตขั้นสูงที่ได้รับความสนใจอย่างมากในการนำมาใช้ในโครงสร้างที่พบในอุตสาหกรรมต่าง ๆ เช่น ชิ้นส่วนเครื่องยนต์ไอพ่นและเปลือกกันความร้อนยานอวกาศ ลูกสูบเครื่องยนต์ ใบกังหันลม เกราะกันกระสุน ท่อส่งน้ำมัน พื้นสะพานและฐานรากเครื่องจักรโรงงาน เป็นต้น เนื่องจากสมบัติที่เปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องตามความหนา ทำให้สามารถปรับแต่งสมบัติทางกลและความต้านทานให้เหมาะสมกับการใช้งานได้ โดยประยุกต์ใช้จุดเด่นของวัสดุแต่ละชนิดที่นำมาประกอบกันเป็นวัสดุคอมโพสิตที่มีประสิทธิภาพ

การวิเคราะห์พฤติกรรมการดัดของแผ่นพื้นหนา FGMs บนฐานรากยืดหยุ่นเป็นปัญหาที่ซับซ้อน เนื่องจากต้องพิจารณาปฏิสัมพันธ์ระหว่างแผ่นพื้นและฐานราก รวมถึงผลของการเปลี่ยนแปลงสมบัติวัสดุตามความหนา วิธีเชิงวิเคราะห์ (Analytical Method) และวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) ได้ถูกพัฒนาขึ้นเพื่อแก้ปัญหานี้ โดยงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์แผ่นพื้นหนาแบบต่าง ๆ วางบนฐานรากยืดหยุ่นมีดังนี้ Kobayashi และ Sonoda [1] ได้ใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ในการวิเคราะห์แผ่นหนาตามทฤษฎีของ Mindlin ซึ่งมีการพิจารณาผลกระทบการเปลี่ยนรูปจากแรงเฉือนและคิดผลกระทบเนื่องจากฐานรากยืดหยุ่น โดยในการศึกษานี้จำกัดไปที่การวิเคราะห์แผ่นพื้นที่มีรูปร่างสี่เหลี่ยมและใช้วัสดุแบบไอโซทรอปิก Kutlu และ Omurtag [2] ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ศึกษาการโก่งตัวของแผ่นพื้นหนารูปวงรีวางบนฐานรากยืดหยุ่นแบบ Pasternak โดยฐานรากมีสมบัติแบบออร์โธทรอปิก ในขณะที่วัสดุของแผ่นพื้นเป็นแบบไอโซทรอปิก Chinnaboon และคณะ [3] เสนอการประยุกต์ใช้วิธีบาวดารีเอลิเมนต์วิเคราะห์ปัญหาแผ่นพื้นหนาปานกลางตามสมมติฐานของ Mindlin ที่ใช้วัสดุแบบไอโซทรอปิก โดยสามารถวิเคราะห์แผ่นพื้นที่มีรูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตได้หลากหลาย ผลที่ได้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพในการใช้วิธีบาวดารีเอลิเมนต์ซึ่งให้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำ ต่อมา Panyatong และคณะ [4] ประยุกต์ใช้วิธีบาวดารีเอลิเมนต์ (BEM) วิเคราะห์ปัญหาการดัดของแผ่นพื้นหนาที่ทำจากวัสดุ FGMs โดยสามารถวิเคราะห์แผ่นพื้นที่มีรูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตที่มีความซับซ้อนได้ Ameur และคณะ [5] ศึกษาการดัดของแผ่นพื้นหนาที่คำนึงการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนแบบตรีโกณมิติ โดยใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ศึกษาแผ่นพื้นที่ทำจากวัสดุ FGMs ที่วางบนฐานรากยืดหยุ่นโดยจำกัดไปที่แผ่นพื้นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีที่รองรับแบบธรรมดา Thai และ Choi [6] ได้ปรับปรุงทฤษฎีของแผ่นพื้นหนาที่คำนึงการเสียรูปโดยกำหนดให้ความเครียดเฉือนตลอดความ

หนามีการแปรผันแบบกำลังสอง งานวิจัยนี้ใช้วิธีเชิงวิเคราะห์โดยจำกัดไปที่แผ่นพื้นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีวัสดุแบบ FGMs ที่วางบนฐานรากยืดหยุ่นแบบ Pasternak โดยศึกษาทั้งสถิตศาสตร์และพลศาสตร์ Benyoucef และคณะ [7] ได้เสนอการวิเคราะห์แผ่นพื้นหนาที่คำนึงการเสียรูปโดยกำหนดให้ความเค้นเฉือนตลอดความหนามีการแปรผันแบบพาราโบลา งานวิจัยนี้ใช้วิธีเชิงวิเคราะห์โดยจำกัดไปที่แผ่นพื้นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีวัสดุแบบ FGMs ที่วางบนฐานรากยืดหยุ่นแบบ Pasternak เช่นกัน Nebab และคณะ [8] ศึกษาการดัดของแผ่นพื้นหนาโดยคำนึงการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนแบบคลื่นไซน์ที่ทำจากวัสดุ FGMs และวางบนฐานรากยืดหยุ่นที่มีสมบัติเปลี่ยนแปลงได้ตลอดแผ่น งานวิจัยนี้ใช้วิธีเชิงวิเคราะห์โดยจำกัดไปที่แผ่นพื้นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีที่รองรับแบบธรรมดา Lei และ Zheng [9] เสนอวิธีเชิงวิเคราะห์สำหรับการดัดตามแกนสมมาตรของแผ่นพื้นบางรูปวงกลมโดยที่มีวัสดุแบบ FGMs Akavci [10] ได้วิเคราะห์การดัด การสั่นอิสระและการโก่งเดาะของแผ่นพื้นหนาทำจากวัสดุ FGMs โดยศึกษาแผ่นพื้นประกบแบบแซนด์วิชและวางบนฐานรากยืดหยุ่น งานวิจัยนี้เสนอวิธีเชิงวิเคราะห์โดยจำกัดไปที่แผ่นพื้นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีที่รองรับแบบธรรมดา Zaoui และคณะ [11] ศึกษาการดัดของแผ่นพื้นหนาโดยคำนึงการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนอันดับสูงที่ทำจากวัสดุ FGMs และวางบนฐานรากยืดหยุ่น งานวิจัยนี้ใช้วิธีเชิงวิเคราะห์โดยจำกัดไปที่แผ่นพื้นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีที่รองรับแบบธรรมดาเช่นกัน

จากงานวิจัยที่ได้กล่าวมา การวิเคราะห์พฤติกรรมการดัดของแผ่นพื้นหนาที่ทำจากวัสดุ FGMs บนฐานรากยืดหยุ่นได้รับความสนใจมากขึ้น เนื่องจากวัสดุ FGMs สามารถปรับเปลี่ยนสมบัติทางกลอย่างต่อเนื่องตามความหนา ทำให้แผ่นพื้นเหล่านี้มีความเหมาะสมสำหรับการใช้งานที่ต้องการความแข็งแรง ความยืดหยุ่นและความทนทานที่แตกต่างกันในแต่ละส่วนของแผ่นพื้น อย่างไรก็ตาม แม้ว่าวิธีเชิงวิเคราะห์จะให้คำตอบที่แม่นตรงแต่ก็สามารถหาคำตอบได้เฉพาะแผ่นพื้นที่มีรูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตอย่างง่ายเท่านั้น ส่วนวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นสามารถหาคำตอบของแผ่นพื้นที่มีรูปร่างและเงื่อนไขที่ซับซ้อนได้แต่วิธีนี้จะไม่มีประสิทธิภาพเมื่อวิเคราะห์แผ่นพื้นที่มีรูหรือมีมุม ซึ่งต้องการการแบ่งเอลิเมนต์จำนวนมากในบริเวณดังกล่าวและจะใช้เวลาในการคำนวณเพิ่มมากขึ้น อีกทั้งประสิทธิภาพจะลดลงเมื่อต้องการหาค่าที่เกี่ยวข้องกับค่าอนุพันธ์ของตัวแปร เช่น ความเค้น ความเครียด โมเมนต์และแรงเฉือน เป็นต้น ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงมีวัตถุประสงค์ในการพัฒนาวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ เพื่อวิเคราะห์แผ่นพื้นที่มีความซับซ้อนทั้งรูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตอย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งวิธีนี้จะลดมิติของปัญหาลงหนึ่งมิติทำให้ง่ายต่อการสร้างเอลิเมนต์และทำเฉพาะที่ขอบเขตเท่านั้น จึงทำให้การเตรียมข้อมูลสำหรับการคำนวณทำได้ง่ายขึ้น อีกทั้งยังสามารถคำนวณค่าอนุพันธ์ของตัวแปรได้แม่นยำกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อีกด้วย [12] วิธีการที่นำเสนอนี้ได้ประยุกต์ใช้วิธีบาวดารีเอลิเมนต์ร่วมกับวิธีสมการแอนะล็อก (Analog Equation Method; AEM) [13] ซึ่งสมการอนุพันธ์ของปัญหาเดิมจะถูกแทนที่ด้วยสมการปัวซอง (Poisson's equation) ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเดิม จากนั้นคำตอบของสมการที่ถูกนำมาแทนจะอยู่ในรูปของสมการอินทิกรัลซึ่งจะใช้คำตอบพื้นฐานของ

สมการลาปลาซ ทำให้การคำนวณฟังก์ชันในสมการอินทิกรัลทำได้สะดวกจึงทำให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาแผ่นพื้นหนาที่มีรูปร่างซับซ้อนและเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ เช่น แบบยึดหยุ่น (Elastic Support) และยึดหยุ่นแบบยึดรั้ง (Elastic Restraint) ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณได้นำไปเปรียบเทียบกับวิธีเชิงวิเคราะห์เพื่อแสดงให้เห็นถึงความถูกต้องแม่นยำของวิธีการที่นำเสนอนี้ จากนั้นงานวิจัยนี้นำเสนอการวิเคราะห์แผ่นพื้นหนาทำจากวัสดุ FGMs ที่วางบนฐานรากยึดหยุ่น โดยมีเงื่อนไขขอบเขตแบบต่าง ๆ ที่มีความซับซ้อนรวมทั้งแผ่นพื้นที่มีรูปร่างทั่วไปเพื่อแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีที่นำเสนอ

Methods

สมบัติของวัสดุ Functionally graded materials

Functionally graded materials (FGMs) เป็นวัสดุที่นิยมใช้ในงานด้านวิศวกรรมเช่น โครงสร้างตัวเครื่องบิน แผงโซลาร์เซลล์ ประตูกันไฟ เป็นต้น เนื่องจากเป็นวัสดุที่ทนความร้อนได้สูงและมีความแข็งแรง วัสดุ FGMs นั้นเป็นวัสดุที่มีโครงสร้างไม่เป็นเนื้อเดียวกัน (Inhomogeneous material) โดยมีการแปรผันอย่างต่อเนื่องจากพื้นผิวหนึ่งไปยังอีกพื้นผิวหนึ่งตลอดทิศทางที่กำหนด Figure 1 แสดงตัวอย่างวัสดุ FGMs ที่ทำจากอะลูมิเนียมออกไซด์ (Al_2O_3) และอีพ็อกซี่ (Epoxy) ซึ่งมีการแปรผันของสมบัติวัสดุตลอดความหนา สำหรับงานวิจัยนี้จะกำหนดให้ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity) มีการแปรผันตลอดความหนาพื้นและเป็นไปตามแบบจำลอง Power Law ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ดังสมการที่ (1)

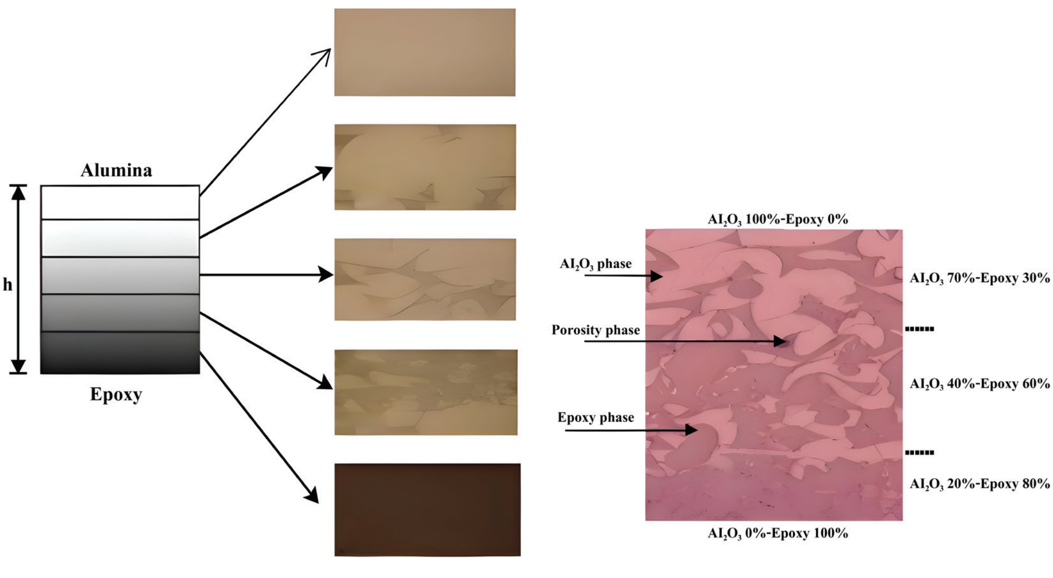

Figure 1 Material distribution of FGMs (Al_2O_3/Epoxy) across the thickness [14]

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)\left(\frac{h-2z}{2h}\right)^p \tag{1}$$

โดยที่ E_c คือโมดูลัสยืดหยุ่นของเซรามิก (ผิวบน), E_m คือโมดูลัสยืดหยุ่นของโลหะ (ผิวล่าง), p คือค่า Power Index และ h คือความหนาของแผ่นพื้นหนา

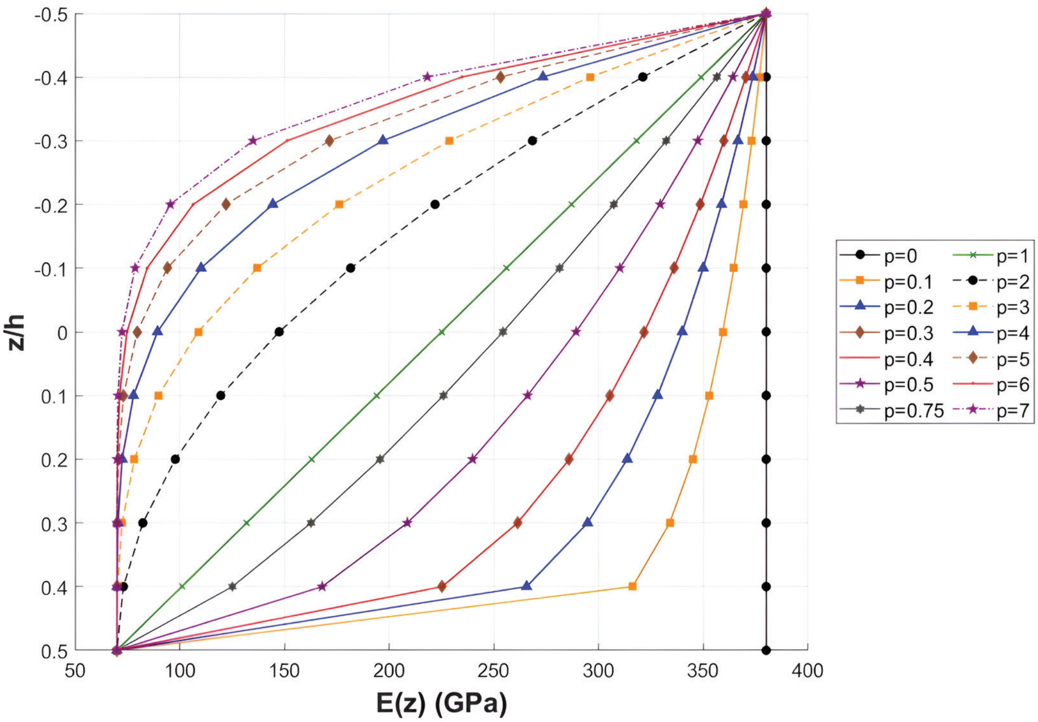

Figure 2 Variation of the modulus of elasticity through the plate thickness

จากการวิจัยของ Wattanasakulpong และคณะ [14] แสดงให้เห็นว่าแบบจำลอง Power Law นั้นมีความสอดคล้องกับผลการตรวจวัดตัวอย่างวัสดุ FGMs ที่สร้างขึ้นด้วยวิธี A multistep sequential infiltration technique ด้วยการปรับค่า Power Index ให้เหมาะสม Figure 2 แสดงตัวอย่างลักษณะการแปรผันของโมดูลัสยืดหยุ่นตลอดความหนาของแผ่นพื้น โดยกำหนดให้ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของเซรามิกและโลหะเท่ากับ E_c = 380 GPa และ E_m = 70 GPa ตามลำดับ ส่วนค่า Power Index อยู่ในช่วง 0-7 สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของแผ่นพื้นสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (2)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \tag{2}$$

เมื่อ ν คือ อัตราส่วนปัวซอง (Poisson’s ratio) ซึ่งในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้เป็นค่าคงที่ไม่แปรผันตามความหนาเนื่องจากผลกระทบของอัตราส่วนปัวซองต่อพฤติกรรมเชิงกลของแผ่นพื้นมีค่าน้อยมาก [15]

ทฤษฎีการดัดของแผ่นพื้นตามสมมติฐานของ Mindlin วางบนฐานรากยืดหยุ่น

ในงานวิจัยนี้จะสมมติให้แผ่นพื้นมีความหนาปานกลางและมีพฤติกรรมเป็นไปตามทฤษฎีของ Mindlin หรือที่เรียกว่า “ทฤษฎีการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนอันดับที่หนึ่ง” (First-order shear deformation) ซึ่งทำให้คำตอบสำหรับแผ่นพื้นหนาปานกลางมีความแม่นยำ โดยที่แผ่นพื้นหนาปานกลางจะมีอัตราส่วนความหนาต่อความยาวด้านสั้นที่สุดของแผ่นพื้น (h/a) อยู่ในช่วง 0.10-0.20 จากทฤษฎีของ Mindlin การเคลื่อนที่ของตำแหน่งใด ๆ บนแผ่นพื้นจะสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (3)-(5)

$$\bar{u}(x,y,z) = z\phi_x(x,y), \tag{3}$$

$$\bar{v}(x,y,z) = z\phi_y(x,y), \tag{4}$$

$$\bar{w}(x,y) = w(x,y), \tag{5}$$

เมื่อ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ คือการเคลื่อนที่ของตำแหน่งใด ๆ บนแผ่นพื้นในทิศทางแกน x , y และ z ตามลำดับ ในขณะที่ ϕ_x และ ϕ_y คือการหมุนรอบแกน y และแกน x ตามลำดับ ส่วน w คือการโก่งตัวในทิศทางแกน z ของระนาบกลางของแผ่นพื้น (Middle surface) จากสมการที่ (3)-(5) จะได้ความสัมพันธ์ของความเครียดแสดงดังสมการที่ (6)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z\phi_{x,x} \\ z\phi_{y,y} \\ z(\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \\ \frac{1}{2}(\phi_x + w,_x) \\ \frac{1}{2}(\phi_y + w,_y) \end{Bmatrix} \tag{6}$$

โดยที่เครื่องหมายจุลภาค (,) แทนค่าอนุพันธ์ของตัวแปร

จากนั้นแทนสมการที่ (6) ลงในสมการที่ (2) และทำการอินทิเกรตตลอดความหนาจะได้ความสัมพันธ์ของโมเมนต์ดัด ($M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xx} dz$, $M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{yy} dz$) โมเมนต์บิด ($M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xy} dz$) และแรงเฉือน ($Q_{xz} = K_s \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz$, $Q_{yz} = K_s \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz$) กับตัวแปร ϕ_x, ϕ_y และ w ดังสมการที่ (7)-(11)

$$M_{xx} = D\left(\phi_{x,x} + \nu\phi_{y,y}\right), \tag{7}$$

$$M_{yy} = D\left(\phi_{y,y} + \nu\phi_{x,x}\right), \tag{8}$$

$$M_{xy} = \frac{D}{2}(1-\nu)\left(\phi_{x,y} + \phi_{y,x}\right), \tag{9}$$

$$Q_{xz} = K_s\bar{G}\left(\phi_x + w_{,x}\right), \tag{10}$$

$$Q_{yz} = K_s\bar{G}\left(\phi_y + w_{,y}\right), \tag{11}$$

เมื่อ D คือค่าความแข็งเกร็งการดัด (Bending stiffness) มีค่าเท่ากับ $D = \frac{1}{\left(1-\nu^2\right)} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 E(z) dz$

$\bar{G}$ คือค่าความแข็งเกร็งเฉือน (Shear stiffness) มีค่าเท่ากับ $\bar{G} = \frac{1}{2(1+\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz$

K_s คือค่าปรับแก้แรงเฉือนซึ่งงานวิจัยนี้จะกำหนดให้มีค่าเป็น 5/6

สำหรับสมการควบคุมของแผ่นพื้นที่ทำจากวัสดุ FGMs สามารถสร้างได้ด้วยหลักการของงานเสมือนซึ่งข้อดีของวิธีนี้คือสามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาทั้งแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้นได้อย่างสะดวก โดยสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (12)

$$\delta U + \delta V_p + \delta V_e = 0 \tag{12}$$

เมื่อ δU คือพลังงานความเครียดเสมือนของแผ่นพื้น, δV_p คืองานเสมือนเนื่องจากแรงภายนอก และ δV_e คือพลังงานความเครียดเสมือนของฐานรากยืดหยุ่น แสดงดังสมการที่ (13)-(15)

$$\delta U=\int_{\Omega}\int_{-h/2}^{h/2}\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy}+2\sigma_{xy}\delta\varepsilon_{xy}\\ +2\sigma_{xz}\delta\varepsilon_{xz}+2\sigma_{yz}\delta\varepsilon_{yz}\end{pmatrix}dzd\Omega \tag{13}$$

$$\delta V_p=-\int_A q\delta w\,dA \tag{14}$$

$$\delta V_e=\int_A k\,w\,\delta w\,dA \tag{15}$$

เมื่อ k คือ โมดูลัสยืดหยุ่นของฐานราก (Elastic foundation modulus)

ต่อมาแทนสมการที่ (13)-(15) ลงในสมการที่ (12) จากนั้นใช้ความสัมพันธ์ของความเค้นจากสมการที่ (2) และความเครียดจากสมการที่ (6) จากนั้นทำการอินทิเกรตตลอดความหนาของแผ่นพื้นและใช้ทฤษฎีของเกาส์-กรีน (Gauss-Green theorem) จะทำให้ได้สมการควบคุมของแผ่นพื้นที่วางบนฐานรากยืดหยุ่นแสดงดังสมการที่ (16)-(18)

$$\delta w: Q_{zx,x}+Q_{yz,y}+q-k\,w=0 \tag{16}$$

$$\delta\phi_x: -M_{xx,x}-M_{xy,y}+Q_{xz}=0 \tag{17}$$

$$\delta\phi_y: -M_{yy,y}-M_{xy,x}+Q_{yz}=0 \tag{18}$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขตแสดงดังสมการที่ (19)-(21)

$$w=0 \text{ หรือ } Q_{xz}n_x+Q_{yz}n_y=0 \tag{19}$$

$$\phi_x \text{ หรือ } M_{xx}n_x+M_{xy}n_y=0 \tag{20}$$

$$\phi_y \text{ หรือ } M_{yy}n_y+Q_{xy}n_x=0 \tag{21}$$

เมื่อ n_x และ n_y เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย n แสดงดัง Figure 3

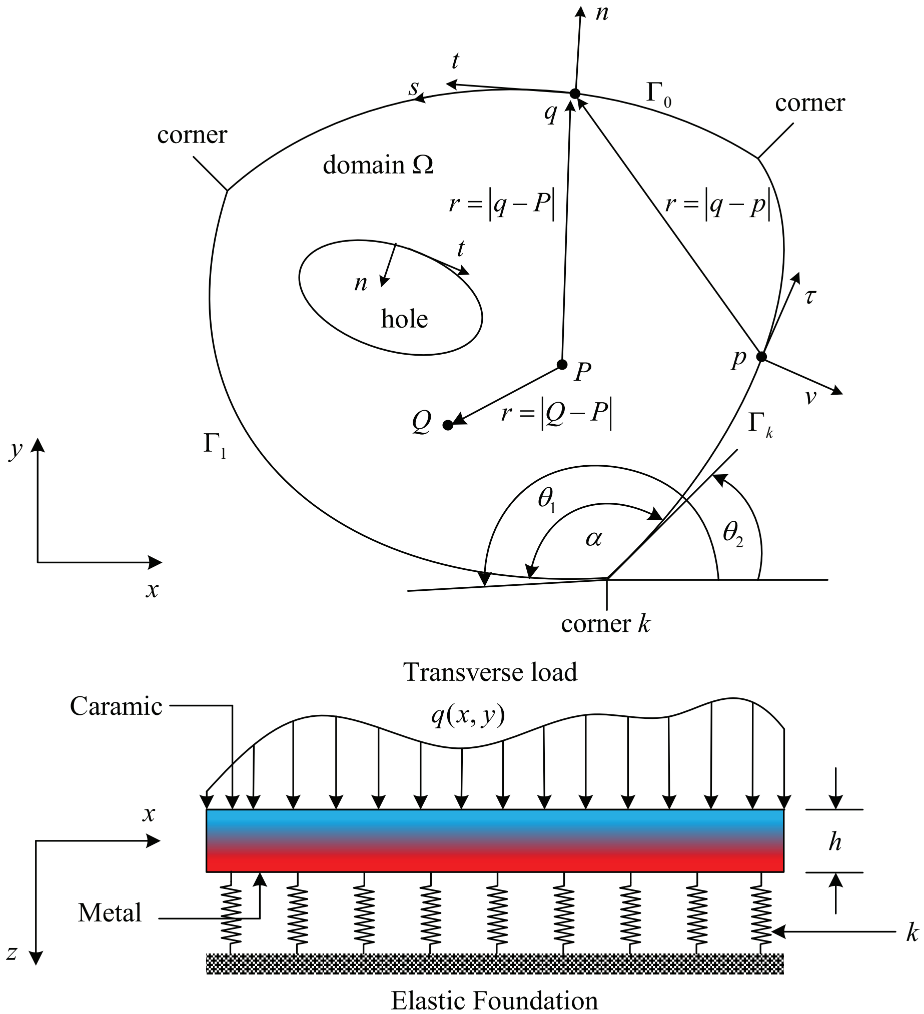

Figure 3 FG plate geometry and notations

จากนั้นเมื่อแทนสมการที่ (7)-(11) ลงในสมการที่ (16)-(18) จะได้สมการควบคุมของแผ่นพื้นวางบนฐานรากยืดหยุ่นที่อยู่ในรูปของตัวแปร ϕ_x, ϕ_y และ w แสดงดังสมการที่ (22)-(24)

$$-K_s\bar{G}(\nabla^2 w+\phi_{x,x}+\phi_{y,y})+kw=q(x,y) \tag{22}$$

$$\frac{D}{2}\Big[(1-\nu)(\nabla^2\phi_x)+(1+\nu)\Big(\phi_{x,xx}+\phi_{y,xy}\Big)\Big]-K_s\bar{G}(w,_x+\phi_x)=0 \tag{23}$$

$$\frac{D}{2}\Big[(1-\nu)(\nabla^2\phi_y)+(1+\nu)\Big(\phi_{x,xy}+\phi_{y,yy}\Big)\Big]-K_s\bar{G}(w,_y+\phi_y)=0 \tag{24}$$

สมการเงื่อนไขขอบเขต (19)-(21) สามารถเขียนความสัมพันธ์ใหม่ได้ดังสมการที่ (25)-(27)

$$\alpha_1 w + \alpha_2 Q_n = \alpha_3 \tag{25}$$

$$\beta_1 \phi_n + \beta_2 M_n = \beta_3 \tag{26}$$

$$\gamma_1 \phi_t + \gamma_2 M_{nt} = \gamma_3 \tag{27}$$

โดยฐานรองรับในแต่ละชนิดสามารถหาได้จากสมการที่ (25)-(27) ด้วยการกำหนดตัวแปร α_i, β_i และ γ_i ดังต่อไปนี้

1. ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Clamped support)

$$\begin{gathered} \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0 \\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = 0 \\ \gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = 0 \end{gathered} \tag{28}$$

2. ฐานรองรับธรรมดาแบบอ่อน (Soft type simple support)

$$\begin{gathered} \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0 \\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 0 \\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 1,\ \gamma_3 = 0 \end{gathered} \tag{29}$$

3. ฐานรองรับธรรมดาแบบแข็ง (Hard type simple support)

$$\begin{gathered} \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0 \\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 0 \\ \gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = 0 \end{gathered} \tag{30}$$

4. ขอบอิสระ (Free support)

$$\begin{gathered} \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 0 \\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 0 \\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 1,\ \gamma_3 = 0 \end{gathered} \tag{31}$$

5. ฐานรองรับแบบยึดหยุ่น (Elastic support)

$$\begin{gathered} \alpha_1 = k_s(z),\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 0 \\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 0 \\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 1,\ \gamma_3 = 0 \end{gathered} \tag{32}$$

6. ฐานรองรับยึดหยุ่นแบบยึดรั้ง (Elastic restraint)

$$\begin{gathered} \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0 \\ \beta_1 = k_r(z),\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 0 \\ \gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = 0 \end{gathered} \tag{33}$$

เมื่อ k_s และ k_r คือค่าความแข็งเกร็งต่อการเคลื่อนที่ (Translational stiffness) และค่าความแข็งเกร็งต่อการหมุน (Rotational stiffness) ของฐานรองรับที่ขอบ ตามลำดับ

การประยุกต์ใช้สมการแอนะล็อก

สมการควบคุมของแผ่นพื้น FGMs วางบนฐานรากยืดหยุ่นดังสมการที่ (22)-(24) พบว่าเป็นสมการอนุพันธ์อันดับสอง ดังนั้นจากหลักการของ AEM สมการที่นำมาแทนที่ต้องเป็นสมการอนุพันธ์อันดับสองเช่นกันและควรอยู่ในรูปอย่างง่ายที่มีคำตอบของสมการพื้นฐาน (Fundamental solution) ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงใช้สมการปัวซองมาเป็นสมการแทนที่แสดงดังสมการที่ (34)-(36)

$$\nabla^2 w = b^{(1)}(x,y) \tag{34}$$

$$\nabla^2 \phi_x = b^{(2)}(x,y) \tag{35}$$

$$\nabla^2 \phi_y = b^{(3)}(x,y) \tag{36}$$

โดยที่ $b^{(l)}, (l=1,2,3)$ คือแหล่งกำเนิดสมมติและเป็นค่าที่ไม่ทราบในตอนนี้ คำตอบของสมการที่ (34)-(36) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการอินทิกรัลได้ดังนี้

$$\varepsilon w(p) = -\int_\Gamma (u^* w_{,n} - u^*_{,n} w)\, ds + \int_\Omega u^* b^{(1)} d\Omega \tag{37}$$

$$\varepsilon \phi_x(p) = -\int_\Gamma (u^* \phi_{x,n} - u^*_{,n} \phi_x)\, ds + \int_\Omega u^* b^{(2)} d\Omega \tag{38}$$

$$\varepsilon \phi_y(p) = -\int_\Gamma (u^* \phi_{y,n} - u^*_{,n} \phi_y)\, ds + \int_\Omega u^* b^{(3)} d\Omega \tag{39}$$

เมื่อ $u^* = \dfrac{1}{2\pi}\ln r$ คือคำตอบพื้นฐานของสมการลาปลาซและ $u^*_{,n} = \dfrac{r_{,n}}{2\pi r}$ คืออนุพันธ์ของคำตอบพื้นฐานของสมการลาปลาซตามเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย n สำหรับค่า ε คือสัมประสิทธิ์ที่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุด p สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (40)

$$\varepsilon(P) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad P \in \Omega \\ \dfrac{\alpha}{2\pi} & \text{for } P \equiv p \ on\, \Gamma \\ 0 & \text{for} \quad P \notin \Omega \cup \Gamma \end{cases} \tag{40}$$

จะเห็นว่าในสมการที่ (37)-(39) มีเทอมโดเมนอินทิกรัล $\int_\Omega u^* b^{(l)} d\Omega$ ดังนั้นเพื่อคงเอกลักษณ์ของวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ไว้ เทอมโดเมนอินทิกรัลดังกล่าวจะถูกแปลงให้เป็นบาวดารีอินทิกรัลด้วยการใช้เทคนิค

Domain meshless โดยเริ่มต้นทำการประมาณค่าแหล่งกำเนิดสมมติด้วย Radial Basis Function (RBFs) แสดงดังสมการที่ (41)

$$b^{(l)} = \sum_{j=1}^{M} a_j^{(l)} f_j , \;\; l = 1,2,3 \tag{41}$$

เมื่อ f_j คือ Radial Basis Function และ $a_j^{(l)}$ คือสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า สำหรับงานวิจัยนี้จะใช้ฟังก์ชัน Thin Plate Splines (TPSs) เป็นฟังก์ชัน f_j ซึ่งแสดงได้เป็น $f_j = r^2 \ln r$ โดยที่ $r = r_{ij} = \left| p_i - p_j \right|$ คือระยะระหว่างโหนดภายในกับจุดกำเนิดแสดงดัง Figure 4 จากนั้นแทนแหล่งกำเนิดสมมติจากสมการที่ (41) ลงในเทอมโดเมนอินทิกรัล $\int_\Omega u^* b^{(l)} d\Omega$ และใช้ทฤษฎีบทเอกลักษณ์ที่สองของกรีนส์ทำให้สามารถแปลงเป็นบาวดารีอินทิกรัลได้เป็น $\sum_{j=1}^{M} a_j^{(l)} \left\{ \varepsilon \hat{u}_j(P) + \int_\Gamma (u^* \hat{u}_{j,n} - u^*_{,n} \hat{u}_j) ds \right\}$ โดยที่ $\hat{u}_j$ เป็นคำตอบเฉพาะของ $\nabla^2 \hat{u}_j = f_i$ ดังนั้นสมการที่ (37)-(39) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของบาวดารีอินทิกรัลได้ดังสมการที่ (42)-(44)

$$\varepsilon w(p) = -\int_\Gamma (u^* w_{,n} - u^*_{,n} w)\, ds + \sum_{j=1}^{M} a_j^{(1)} \left\{ \varepsilon \hat{u}_j(P) + \int_\Gamma (u^* \hat{u}_{j,n} - u^*_{,n} \hat{u}_j) ds \right\} \tag{42}$$

$$\varepsilon \phi_x(p) = -\int_\Gamma (u^* \phi_{x,n} - u^*_{,n} \phi_x)\, ds + \sum_{j=1}^{M} a_j^{(2)} \left\{ \varepsilon \hat{u}_j(P) + \int_\Gamma (u^* \hat{u}_{j,n} - u^*_{,n} \hat{u}_j) ds \right\} \tag{43}$$

$$\varepsilon \phi_y(p) = -\int_\Gamma (u^* \phi_{y,n} - u^*_{,n} \phi_y)\, ds + \sum_{j=1}^{M} a_j^{(3)} \left\{ \varepsilon \hat{u}_j(P) + \int_\Gamma (u^* \hat{u}_{j,n} - u^*_{,n} \hat{u}_j) ds \right\} \tag{44}$$

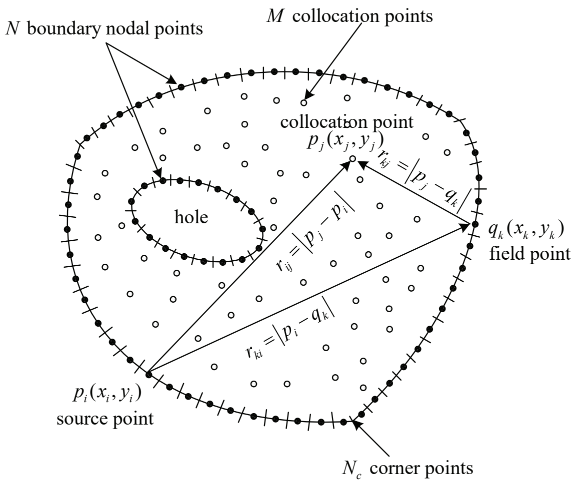

Figure 4 Discretization of the FG plate

นอกจากนี้ ยังสามารถสร้างสมการบาวดารีอินทิกรัลได้เพิ่มเติมด้วยการอนุพันธ์สมการที่ (43) และ (44) ตามเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย แสดงดัง Figure 3 สำหรับจุด p ที่วางบนขอบที่ต่อเนื่อง $(\varepsilon = 1/2)$ สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (45) และ (46)

$$\frac{1}{2}\phi_{x,\tau}(p) = -\int_{\Gamma}(u^*_{,\tau}\phi_{x,n} - u^*_{,n\tau}[\phi_x - \phi_x(p)])ds + \sum_{j=1}^{M} a_j^{(2)} \left\{\frac{1}{2}\hat{u}_{j,\tau}(p) + \int_{\Gamma}(u^*_{,\tau}\hat{u}_{j,n} - u^*_{,n\tau}[\hat{u}_j - \hat{u}_j(p)])ds\right\} \quad \mathbf{(45)}$$

$$\frac{1}{2}\phi_{x,\tau}(p) = -\int_{\Gamma}(u^*_{,\tau}\phi_{y,n} - u^*_{,n\tau}[\phi_y - \phi_y(p)])ds + \sum_{j=1}^{M} a_j^{(3)} \left\{\frac{1}{2}\hat{u}_{j,\tau}(p) + \int_{\Gamma}(u^*_{,\tau}\hat{u}_{j,n} - u^*_{,n\tau}[\hat{u}_j - \hat{u}_j(p)])ds\right\} \quad \mathbf{(46)}$$

สำหรับค่าอนุพันธ์ของคำตอบที่อยู่ภายใน $(\varepsilon = 1)$ สามารถหาได้จากการอนุพันธ์สมการที่ (42)-(44) เช่นกันและแสดงได้ดังสมการที่ (47)-(49)

$$w_{,vg}(P) = -\int_{\Gamma}(u^*_{,vg}w_{,n} - u^*_{,nvg}w)\,ds + \sum_{j=1}^{M} a_j^{(1)} \left\{\hat{u}_{j,vg}(P) + \int_{\Gamma}(u^*_{,vg}\hat{u}_{j,n} - u^*_{,nvg}\hat{u}_j)\,ds\right\} \quad \mathbf{(47)}$$

$$\phi_{x,vg}(P) = -\int_{\Gamma}(u^*\phi_{x,n} - u^*_{,n}\phi_x)\,ds + \sum_{j=1}^{M} a_j^{(2)} \left\{\varepsilon\hat{u}_j(P) + \int_{\Gamma}(u^*\hat{u}_{j,n} - u^*_{,n}\hat{u}_j)\,ds\right\} \quad \mathbf{(48)}$$

$$\phi_{y,vg}(P) = -\int_{\Gamma}(u^*\phi_{y,n} - u^*_{,n}\phi_y)\,ds + \sum_{j=1}^{M} a_j^{(3)} \left\{\varepsilon\hat{u}_j(P) + \int_{\Gamma}(u^*\hat{u}_{j,n} - u^*_{,n}\hat{u}_j)\,ds\right\} \quad \mathbf{(49)}$$

เมื่อ $v, g = 0, x, y$ และ $P \in \Omega$

เมื่อพิจารณาสมการควบคุม (22)-(24) และเงื่อนไขขอบเขต (25)-(27) ของปัญหาพบว่ามีตัวแปรไม่ทราบค่าที่ขอบเขตทั้งหมด 8 ตัวแปร ได้แก่ $w, w_n, \phi_x, \phi_{x,n}, \phi_{x,t}, \phi_y, \phi_{y,n}$ และ $\phi_{y,t}$ ในขณะเดียวกันมีสมการอยู่ทั้งหมด 8 สมการ ได้แก่ สมการบาวดารีอินทิกรัล (42)-(46) จำนวน 5 สมการและเงื่อนไขขอบเขต (25)-(27) จำนวน 3 สมการ ดังนั้นจึงทำให้สามารถเขียนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่ขอบเขตทั้ง 8 ตัวแปรให้ติดอยู่ในรูปสัมประสิทธิ์ $a_j^{(l)}$ ได้ จากนั้นแทนสมการที่ (47)-(49) ลงในสมการควบคุมของปัญหา (22)-(24) และแก้ระบบสมการจนได้ค่าสัมประสิทธิ์ a_j ซึ่งทำให้สามารถหาคำตอบของตัวแปรต่าง ๆ ทั้งภายในโดเมนและขอบเขตของปัญหาได้ต่อไป

ระเบียบเชิงตัวเลข

การศึกษาครั้งนี้จะใช้เอลิเมนต์แบบคงที่ (Constant element) เนื่องจากสะดวกในการหาคำตอบเมื่อ

เกิดสภาวะเอกฐาน (Singular integral) ซึ่งสามารถหาค่าโดยใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ได้โดยตรง ไม่จำเป็นต้องใช้วิธีเชิงตัวเลขในการหาค่าอินทิกรัลเอกฐาน ในที่นี้จะกำหนดให้ N คือจำนวนโหนดของเอลิเมนต์ขอบเขตและ M คือจำนวนโหนดภายในโดเมนแสดงดัง Figure 3 เริ่มต้นทำการสร้างระบบสมการด้วยการกำหนดให้จุด p วางที่โหนดเอลิเมนต์ขอบเขต จากนั้นใช้สมการบาวดารีอินทิกรัล (42)-(46) และเงื่อนไขขอบเขต (25)-(27) จะทำให้ได้ระบบสมการแสดงดังสมการที่ (50)

$$[A]\{x\}=\{B\}+[C]\{a_j\} \tag{50}$$

เมื่อ $[A]$ คือเมทริกซ์ของค่าปริพันธ์เคอเนลล์บนเอลิเมนต์ที่ขอบเขตและค่าสัมประสิทธิ์จากเงื่อนไขขอบเขตมีขนาดเท่ากับ $8N \times 8N$ และ $\{x\}$ คือเวกเตอร์ของตัวแปรที่ขอบเขตมีขนาดเท่ากับ $8N \times 1$ ในขณะที่ $\{B\}$ คือเวกเตอร์ของเทอมด้านขวาของสมการเงื่อนไขขอบเขตมีขนาดเท่ากับ $8N \times 1$ ส่วน $[C]$ คือเมทริกซ์ของผลรวมสัมประสิทธิ์หน้าพจน์ a_j มีขนาด $8N \times 3M$ และ $\{a_j\}$ คือเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ $a_j^{(l)}$ มีขนาด $3M \times 1$ จากสมการที่ (50) เราสามารถเขียนเวกเตอร์ $\{x\}$ ให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ $\{a_j\}$ จากนั้นกำหนดให้จุด P อยู่ที่โหนดภายในโดเมนและใช้สมการที่ (47)-(49) ทำให้ได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\{w_{,vg}\}=[D_{,vg}^{(1)}]\{\overline{x_1}\}+[C_{,vg}^{(1)}]\{a_j^{(1)}\} \tag{51}$$

$$\{\phi_{x,vg}\}=[D_{,vg}^{(2)}]\{\overline{x_2}\}+[C_{,vg}^{(2)}]\{a_j^{(2)}\} \tag{52}$$

$$\{\phi_{y,vg}\}=[D_{,vg}^{(3)}]\{\overline{x_3}\}+[C_{,vg}^{(3)}]\{a_j^{(3)}\} \tag{53}$$

เมื่อ $\{w_{,vg}\},\{\phi_{x,vg}\},\{\phi_{y,vg}\}$ คือเวกเตอร์การโก่งตัวในทิศทาง z และการหมุนรวมทั้งอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องภายในโดเมนมีขนาด $M \times 1$ และ $[D_{,vg}^{(1)}],[D_{,vg}^{(2)}],[D_{,vg}^{(3)}]$ คือเมทริกซ์ที่ทราบค่าจากการอินทิเกรตฟังก์ชันเคอร์เนลบนบาวดารีเอลิเมนต์ มีขนาดเมทริกซ์ $M \times 2N$ ในขณะที่ $\{\overline{x_1}\},\{\overline{x_2}\},\{\overline{x_3}\}$ คือเวกเตอร์ขนาด $2N \times 1$ ของตัวแปรที่บริเวณขอบเขตที่ประกอบไปด้วย $\left[w,w_n\right]^T$,$\left[\phi_x,\phi_{x,n}\right]^T$ และ $\left[\phi_y,\phi_{y,n}\right]^T$ ตามลำดับ ส่วน $[C_{,vg}^{(1)}],[C_{,vg}^{(2)}]$ และ $[C_{,vg}^{(3)}]$ คือเมทริกซ์ที่ทราบค่าของสัมประสิทธิ์หลังพจน์ $a_j^{(l)}$ มีขนาดเมทริกซ์ $M \times M$ ต่อมาแทนเวกเตอร์ $\{\overline{x_1}\},\{\overline{x_2}\},\{\overline{x_3}\}$ จากเวกเตอร์ $\{x\}$ ที่ได้จากสมการที่ (50) ลงในสมการที่ (51)-(53) ซึ่งจะทำให้เวกเตอร์ $\{w_{,vg}\},\{\phi_{x,vg}\},\{\phi_{y,vg}\}$ ติดอยู่ในรูปของเวกเตอร์ $\{a_j\}$ จากนั้นแทนลงในสมการควบคุม (22)-(24) และทำการแก้ระบบสมการจนได้เวกเตอร์ $\{a_j\}$ ซึ่งจะทำให้สามารถหาเวกเตอร์จากสมการที่ (51)-(53) สำหรับค่าโมเมนต์ดัด โมเมนต์บิดและแรงเฉือนสามารถหาได้จากการแทน

จากเวกเตอร์ $\{w,_{vg}\},\{\phi_x,_{vg}\},\{\phi_y,_{vg}\}$ ที่ได้ก่อนหน้านี้ลงในสมการที่ (7)-(11)

Numerical Results and Discussion

การศึกษาจะแบ่งออกเป็น 5 ส่วนคือ 1) การวิเคราะห์การลู่เข้าของคำตอบจากจำนวนโหนดภายในโดเมน 2) การตรวจสอบความถูกต้องของผลการวิเคราะห์โดยเปรียบเทียบกับงานวิจัยอื่น 3) การศึกษาพฤติกรรมของแผ่นพื้นวางบนฐานรากยืดหยุ่นโดยมีเงื่อนไขฐานรองรับแบบต่าง ๆ 4) การศึกษาโมดูลัสของแผ่นพื้นทำจากวัสดุ FGMs โดยใช้สมการรูปแบบอื่น 5) การประยุกต์ใช้วิธีบาวดารีเอลิเมนต์กับแผ่นพื้นที่มีรูปร่างซับซ้อน

1) การวิเคราะห์การลู่เข้าของคำตอบจากจำนวนโหนดภายในโดเมน

พิจารณาพื้นคอนกรีตรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $a \times a$ = 400x400 ซม. ที่มีความหนาเท่ากับ h = 60 ซม. มีฐานรองรับธรรมดาแบบแข็งและถูกแรงกระทำแบบสม่ำเสมอเท่ากับ q = 500 กก/ตร.ม. กำหนดให้คอนกรีตมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่นเท่ากับ E_c = 2.40x10^5 กก./ตร.ซม. โดยให้พื้นคอนกรีตวางบนฐานรากยืดหยุ่นที่มีค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของฐานรากแบบไร้มิติ $K=(ka^{4}/D)^{1/4}$ เท่ากับ 1 และ 3 สำหรับในหัวข้อนี้ได้กำหนดให้ค่า Power index มีเป็นศูนย์ และให้จำนวนเอลิเมนต์ขอบเขตเท่ากับ N=200 โดยจะใช้จำนวนโหนดภายในโดเมนมีค่าระหว่าง M = 169-441 เพื่อศึกษาผลของจำนวนโหนดภายในโดเมนต่อการลู่เข้าของคำตอบ ซึ่งผลการวิเคราะห์ที่ได้จะนำมาเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์ด้วยวิธี Levy type single series จากงานวิจัยที่ [1] จาก Table 1 และ Table 2 พบว่าค่าความคลาดเคลื่อนของค่าการโก่งตัว ($\bar{w} = Dw/qa^4$) อยู่ในช่วง 0.219-1.055% ส่วนความคลาดเคลื่อนโมเมนต์ดัด ($\overline{M}_{xx} = M_{xx}/qa^2$) อยู่ในช่วง 0.180-0.920% และเมื่อนำข้อมูลจาก Table 1 และ Table 2 ไปพล๊อตกราฟจะได้ความสัมพันธ์ดังรูปที่ 5 จะเห็นว่าเมื่อจำนวนโหนดภายในโดเมนมีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าลดลงซึ่งแสดงให้เห็นถึงการลู่เข้าของคำตอบอย่างรวดเร็ว

Table 1 Comparison of non-dimensional deflections and bending moments at the center of a thick plate on elastic foundation ($K=1$)

M	Deflection, $\bar{w}$		Bending Moment, $\bar{M}_{xx}$	
	Present	*Error (%)	Present	*Error (%)
169	4.4743E -03	1.055	4.7291E -02	0.920
225	4.4896E -03	0.716	4.7433E -02	0.622
361	4.5067E -03	0.338	4.7590 E-02	0.293
441	4.5118E -03	0.2 26	4.7638E -02	0.193

*Note: From [1], non-dimensional deflections and bending moments are $\bar{w} = 4.522E-03$ and $\overline{M}_{xx} = 4.773E-02$, respectively.

Table 2 Comparison of non-dimensional deflections and bending moments at the center of a thick plate on elastic foundation ($K=3$)

M	Deflection, $\bar{w}$		Bending Moment, $\bar{M}_{xx}$	
	Present	*Error (%)	Present	*Error (%)
169	3.6104E -03	1.031	3.7516E -02	0.85 6
225	3.6226E -03	0.696	3.7621 E-02	0.579
361	3.6360E -03	0.329	3.7737E -02	0.272
441	3.6400E -03	0.219	3.7772E -02	0.180

*Note: From [1], non-dimensional deflections and bending moments are $\bar{w}=3.648E-03$ and $\bar{M}_{xx}=3.784E-02$, respectively.

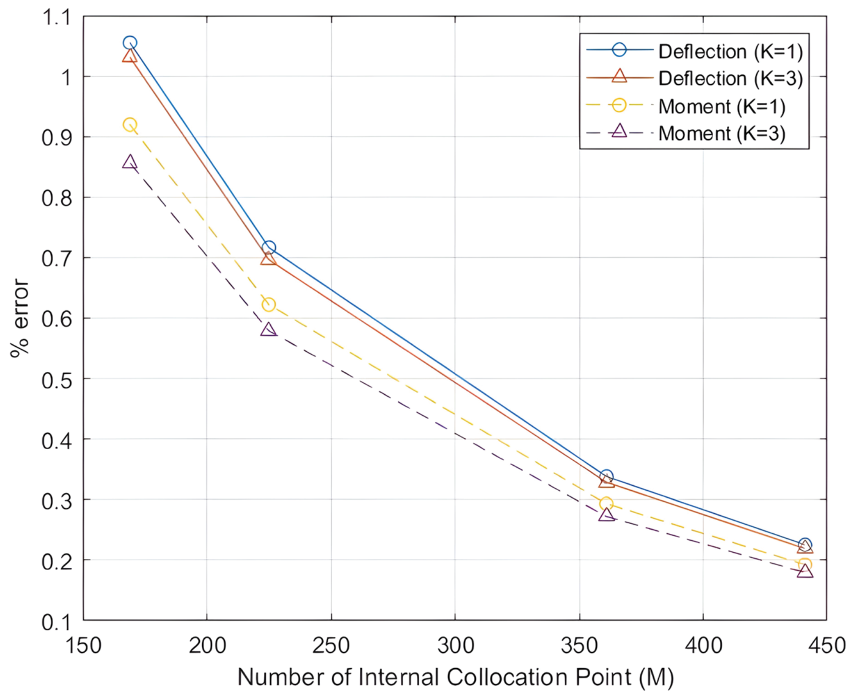

Figure 5 Convergence of the solution

2) การตรวจสอบความถูกต้องของผลการวิเคราะห์

โดยการศึกษาครั้งนี้จะแบ่งออกเป็น 2 กรณีได้แก่ 1. กรณีแผ่นพื้นหนาไม่ได้วางบนฐานรากยืดหยุ่น และ 2. แผ่นพื้นหนาที่วางบนฐานรากยืดหยุ่น

1. แผ่นพื้นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

พิจารณาแผ่นพื้น FGMs ที่มีขนาด $a \times a$ = 1x1 ม. ซึ่งมีอัตราส่วน h / a = 0.15 โดยมีเงื่อนไขฐานรองรับธรรมดาแบบแข็งและถูกแรงกระทำแบบกระจายสม่ำเสมอเท่ากับ q = 5.0x103 นิวตัน/ตร.ม. กำหนดให้ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของโลหะและเซรามิกมีค่าเท่ากับ E_m = 7.0x10^{10} นิวตัน/ตร.ม. และ E_c = 3.80x1011 นิวตัน/ตร.ม. ตามลำดับ ในการวิเคราะห์นี้จะไม่คำนึงถึงฐานรากยืดหยุ่น ($K=0$) และจะใช้จำนวนเอลิเมนต์ขอบเขต N = 400 และจำนวนโหนดภายในโดเมน M = 441 ผลการวิเคราะห์ที่ได้จะนำไปเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์ที่ได้จากวิธี Navier’s approach ซึ่งเป็นวิธีเชิงวิเคราะห์จากงานวิจัยที่ [4] Table 3 แสดงค่าการโก่งตัวที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นพื้นจะเห็นว่าคำตอบที่ได้จากงานวิจัยนี้มีความสอดคล้องเป็นอย่างดีกับผลการวิเคราะห์ที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ ซึ่งมีความคลาดเคลื่อนของการโก่งตัว ($\bar{w} = E_c h^3 w / qa^4$) อยู่ในช่วง 0.14-0.25%

Table 3 Comparison of non-dimensional deflections at the center of a thick plate

Power index (p)	Non - Dimensional Deflections, $\bar{w} = E_c h^3 w / qa^4$		Error (%)
	Present	Analytical [4]	
0.5	7.0575E - 02	7.0749E - 02	0.25
1	8.3453E - 02	8.3655E - 02	0.24
2	9.80E -02	9.82E - 02	0.23
5	1.22E -01	1.22E - 01	0.21
10	1.49E -01	1.49E- 01	0.21

2. แผ่นพื้นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสวางบนฐานรากยืดหยุ่น

ต่อมาจะทำการวิเคราะห์แผ่นพื้นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $a \times a$ = 4x4 ม. ที่วางบนฐานรากยืดหยุ่น ($K = 1,3$) และมีฐานรองรับธรรมดาแบบแข็งที่ถูกแรงแบบกระจายสม่ำเสมอกระทำเท่ากับ q = 5.0x10^3 นิวตัน/ตร.ม. โดยกำหนดให้ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของแผ่นพื้นมีค่าเท่ากับ E = 3.80x10^{11} นิวตัน/ตร.ม. ในการวิเคราะห์นี้จะใช้จำนวนเอลิเมนต์ขอบเขต N = 400 และจำนวนโหนดภายในโดเมนเท่ากับ M = 441 ค่าที่คำนวณได้จะนำไปเปรียบเทียบกับคำตอบแม่นตรง (Exact solution) จากงานวิจัยที่ [1] ซึ่งแสดงได้ดัง Table 4 จากผลการวิเคราะห์จะเห็นว่าความคลาดเคลื่อนของการโก่งตัว ($\bar{w} = Dw / qa^4$) มีค่าอยู่ในช่วง 0.025-0.324% และความคลาดเคลื่อนของโมเมนต์ดัด ($\overline{M}_{xx} = M_{xx} / qa^2$) มีค่าอยู่ในช่วง 0.130-0.249% ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความถูกต้องที่สูงของวิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ในทุกค่าของอัตราส่วน h / a

Table 4 Comparison of deflections and bending moments at the center of a thick plate

$K=\sqrt[4]{\frac{ka^2}{D}}$	$\frac{h}{a}$	Deflection, $\bar{w}=Dw/qa^4$			Bending Moment, $\bar{M}_{xx}=M_{xx}/qa^2$		
		Present	Exact [1]	Error (%)	Present	Exact [1]	Error (%)
1	0.10	4.2473E -03	4.2610E -03	0.322	4.762 1E-02	4.7740E -02	0.249
	0.15	4.5119E -03	4.5220E -03	0.223	4.7641E -02	4.7730E -02	0.186
	0.20	4.8788E -03	4.8800E -03	0.025	4.7638E -02	4.770E -02	0.130
3	0.1	3.47E -03	3.48E -03	0.324	3.83E -02	3.83E -02	0.23
	0.15	3.64E -03	3.65E -03	0.23	3.78E -02	3.78E -02	0.19
	0.2	3.87E -03	3.87E -03	0.207	3.71E -02	3.72E -02	0.175

3. แผ่นพื้นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าวางและไม่วางบนฐานรากยืดหยุ่น

ในหัวข้อนี้จะทำการวิเคราะห์แผ่นพื้น FGMs รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $a \times b$ = 1x3 ม. ที่มีความหนา h = 0.1 ม. ทั้งที่วางบนฐานรากยืดหยุ่น (K =100) และไม่วางบนฐานรากยืดหยุ่น (K=0) ซึ่งแผ่นพื้นมีเงื่อนไขฐานรองรับธรรมดาแบบแข็งและถูกแรงกระทำแบบกระจายสม่ำเสมอเท่ากับ q = 5.0x10^3 นิวตัน/ตร.ม. กำหนดให้โมดูลัสยืดหยุ่นของโลหะและเซรามิกมีค่าเท่ากับ E_m = 7.0x10^{10} นิวตัน/ตร.ม.และ E_m = 3.80x10^{11} นิวตัน/ตร.ม. ตามลำดับ ในการวิเคราะห์นี้จะใช้จำนวนเอลิเมนต์ขอบเขตเท่ากับ N = 400 และจำนวนโหนดภายในโดเมนเท่ากับ M = 441

Table 5 แสดงผลการวิเคราะห์ที่คำนวณได้เปรียบเทียบกับผลของงานวิจัยที่ [11] ซึ่งใช้ higher order shear deformation theory ในการคำนวณ จากผลดังกล่าวพบว่าผลการคำนวณที่ได้จากงานวิจัยนี้มีความสอดคล้องกับงานวิจัยที่ [11] โดยมีผลความแตกต่างมีค่าอยู่ในช่วง 0.390-2.740%

Table 5 Comparison of non-dimensional deflections at the center of a thick plate

$K=\sqrt[4]{\frac{ka^2}{D}}$	Power Index (p)	Deflection, $\overline{w}=100D_c w/qa^4$		
		Present	Analytical [11]	Difference (%)
0	0	1.2516	1.2582	0.525
	0.5	1.9873	1.9343	2.740
	1	2.5031	2.5132	0.402
	2	3.1489	3.2266	2.408
100	0	1.2195	1.2259	0.522
	0.5	1.9077	1.8589	2.625
	1	2.378	2.3873	0.39
	2	2.9532	3.0218	2.27

3) การศึกษาพฤติกรรมของแผ่นพื้นวางบนฐานรากยืดหยุ่นโดยมีเงื่อนไขฐานรองรับแบบต่าง ๆ

ในหัวข้อนี้จะเป็นการศึกษาพฤติกรรมของแผ่นพื้น FGMs วางบนฐานรากยืดหยุ่น โดยจะให้ฐานรองรับมีลักษณะที่แตกต่างกันซึ่งแบ่งออกเป็นทั้งหมด 6 กรณี ได้แก่ 1. ฐานรองรับธรรมดาแบบแข็ง (SSSS) 2. ฐานรองรับแบบยึดแน่น (CCCC) 3. ฐานรองรับแบบผสมระหว่างยึดแน่นกับฐานรองรับแบบอิสระ (CFCF) 4. ฐานรองรับแบบผสมระหว่างฐานรองรับธรรมดาแบบแข็งกับฐานรองรับแบบยึดแน่น (SCSC) 5. ฐานรองรับแบบ Elastic support และ 6. ฐานรองรับแบบ Elastic restraint กำหนดให้แผ่นพื้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $a \times a$ = 1x1 ม. มีความหนา h = 0.15 ม. และถูกแรงกระทำแบบกระจายสม่ำเสมอเท่ากับ q = 5.0×10^{3} นิวตัน/ตร.ม. ในการวิเคราะห์นี้จะใช้จำนวนเอลิเมนต์ขอบเขต N = 400 และโหนดภายในโดเมน M = 441 ส่วนค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของโลหะและเซรามิกมีค่าเท่ากับ E_m = 7.0×10^{10} นิวตัน/ตร.ม. และ E_c = 3.80×10^{11} นิวตัน/ตร.ม. ตามลำดับ

Table 6-9 แสดงค่าการโก่งตัวและโมเมนต์ดัดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นพื้นสำหรับฐานรองรับกรณีที่ 1 ถึง 4 ตามลำดับ ผลการวิเคราะห์ดังกล่าวสามารถใช้เป็นค่าอ้างอิงสำหรับเปรียบเทียบการตรวจสอบความถูกต้องของงานวิจัยอื่นในอนาคตสำหรับแผ่นพื้นที่มีฐานรองรับแบบต่าง ๆ และยังแสดงให้เห็นถึงข้อดีของวิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ในการวิเคราะห์ฐานรองรับที่มีความหลากหลายซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ

Table 6 Deflections and bending moments for a thick plate with hard type simple support (SSSS)

$K=\sqrt[4]{\frac{ka^2}{D}}$	Power Index, p	Deflection, $\bar{w}=E_c h^3 w/qa^4$	Bending Moment, $\bar{M}=M/qa^2$
1	0	4.9400E -02	4.7 700E -02
	0.5	6.5000E -02	4.3700E -02
	1	7.34E -02	4.16E -02
	2	8.20E -02	3.94E -02
3	0	3.98E -02	3.78E -02
	0.5	7.50E -03	3.00E -03
	1	5.60E -03	1.46E -03
	2	4.60E -03	7.75E -04

Table 7 Deflections and bending moments for a thick plate with clamped support (CCCC)

$K=\sqrt[4]{\frac{ka^2}{D}}$	Power Index, p	Deflection, $\bar{w}=E_c h^3 w/qa^4$	Bending Moment, $\bar{M}=M/qa^2$
1	0	4.9400E -02	4.7700E -02
	0.5	6.5000E -02	4.3700E -02
	1	7.3400E -02	4.1600E -02
	2	8.200 0E-02	3.9400E -02
3	0	3.9800E -02	3.7800E -02
	0.5	7.5000E -03	3.0000E -03
	1	5.6000E -03	1.4600E -03
	2	4.6000E -03	7.7457E -04

Table 8 Deflections and bending moment for a thick plate with cfcf support

$K=\sqrt[4]{\frac{ka^2}{D}}$	Power Index, p	**Deflection**, $\bar{w}=E_c h^3 w / qa^4$	Bending Moment	
			$\bar{M}_{xx}=M_{xx}/qa^2$	$\bar{M}_{xx}=M_{xx}/qa^2$
1	0	3.6482E -02	1.0652E -02	4.0449E -02
	0.5	4.8112E -02	9.9010E -03	3.7354E -02
	1	5.49 E-02	9.46E -03	3.57E -02
	2	6.25E -02	8.97E -03	3.40E -02
3	0	3.00E -02	8.73E -03	3.58E -02
	0.5	6.57E -03	9.80E -04	3.31E -03
	1	5.06E -03	5.11E -04	1.71E -03
	2	4.24E -03	2.84E -04	9.45E -04

Table 9 Deflections and bending moments for a thick plate with scsc support

$K=\sqrt[4]{\frac{ka^2}{D}}$	Power Index, p	**Deflection**, $\bar{w}=E_c h^3 w / qa^4$	**Bending Moment**	
			$\bar{M}_{xx}=M_{xx}/qa^2$	$\bar{M}_{xx}=M_{xx}/qa^2$
1	0	2.7871E -02	3.3147E -02	2.7283E -02
	0.5	3.7739E -02	3.1464E -02	2.5 761E -02
	1	4.3657E -02	3.0510E -02	2.5073E -02
	2	5.0475E -02	2.9460E -02	2.4485E -02
3	0	2.4521E -02	2.8779E -02	2.3623E -02
	0.5	6.9873E -03	3.9595E -03	2.9903E -03
	1	5.3771E -03	2.0693E -03	1.5100E -03
	2	4.4671E -03	1.1548E -03	8.3751E -04

Table 10 และ Table 11 แสดงผลการคำนวณการโก่งตัวและโมเมนต์ดัดที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นพื้น สำหรับกรณีที่ 5 ซึ่งเป็นฐานรองรับแบบ Elastic restraint และวางบนฐานรากยืดหยุ่นที่มีค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของฐานรากเท่ากับ K=1 และ K=3 ตามลำดับ จากผลการวิเคราะห์เมื่อค่าความแข็งเกร็งต่อการหมุนมีค่าเป็นศูนย์ (k_r= 0) พฤติกรรมของแผ่นพื้นจะเป็นแผ่นพื้นที่มีฐานรองรับธรรมดาแบบแข็ง ในทางกลับกันหากค่าความแข็งเกร็งต่อการหมุนมีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ ($k_r \to \infty$) พฤติกรรมของแผ่นพื้นจะเป็นแผ่นพื้นที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น

Table 10 Non-dimensional deflections and bending moments at the center of a thick plate with elastic restraint support when K=1

$\boldsymbol{k_r}$	Power Index p=0			
	Deflection, $\bar{w} = E_C h^3\, w / qa^4$		Bending Moment, $\overline{M} = M / qa^2$	
	Elastic Restraint	SSSS	Elastic Restraint	SSSS
0	4.9267E -02	4.9267E -02	4.7634E -02	4.7634E -02
100	2.0502E -02	$\updownarrow$	2.4189E -02	$\updownarrow$
10000	1.9508E -02	1.9498E -02	2.3377E -02	2.3369E -02
	Elastic Restraint	CCCC	Elastic Restraint	CCCC

Table 11 Non-dimensional deflections and bending moments at the center of a thick plate with elastic restraint support when K=3

$\boldsymbol{k_r}$	Power Index p=0			
	Deflection, $\bar{w} = E_C h^3\, w / qa^4$		Bending Moment, $\overline{M} = M / qa^2$	
	Elastic Restraint	SSSS	Elastic Restraint	SSSS
0	3.9751E -02	3.9751E -02	3.7772E -02	3.7772E -02
100	1.862 5E-02	$\updownarrow$	2.1696E -02	$\updownarrow$
10000	1.7799E -02	1.7790E -02	2.1066E -2	2.1059E -02
	Elastic Restraint	CCCC	Elastic Restraint	CCCC

Table 12 และ Table 13 แสดงผลการวิเคราะห์การโก่งตัวและโมเมนต์ดัดที่กึ่งกลางแผ่นพื้นที่วางบนฐานรากที่มีค่าโมดูลัสของฐานรากเท่ากับ K=1 และ K=3 ตามลำดับ และมีฐานรองรับกรณีที่ 6 ซึ่งเป็นฐานรองรับแบบ Elastic support สองด้านตรงกันข้าม ส่วนอีกสองด้านที่เหลือกำหนดให้เป็นฐานรองรับแบบยึดแน่น จากผลการวิเคราะห์เมื่อค่าความแข็งเกร็งต่อการเคลื่อนที่มีค่าเท่ากับศูนย์ (K_s=0) ค่าการโก่งตัวและโมเมนต์ดัดของแผ่นพื้นจะมีพฤติกรรมเป็นแผ่นพื้นที่มีฐานรองรับแบบอิสระ 2 ด้านและยึดแน่น 2 ด้านและหาก

ค่าความแข็งเกร็งต่อการเคลื่อนที่มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ ($k_s \to \infty$) พฤติกรรมของแผ่นพื้นจะเป็นแผ่นพื้นที่มีฐานรองรับธรรมดาแบบอ่อน 2 ด้านและแบบยึดแน่น 2 ด้าน จากผลการวิเคราะห์ดัง Table 10-13 แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีการวิเคราะห์ที่นำเสนอนี้ ซึ่งสามารถศึกษาพฤติกรรมของแผ่นพื้นที่มีพฤติกรรมของฐานรองรับที่อยู่ระหว่างฐานรองรับแบบธรรมดากับฐานรองแบบยึดแน่น (กรณีที่ 5 ฐานรองรับแบบ Elastic Restraint) และระหว่างฐานรองรับแบบธรรมดากับฐานรองรับแบบอิสระ (กรณีที่ 6 ฐานรองรับแบบ Elastic Support)

Table 12 Non-dimensional deflections and bending moments at the center of a thick plate with elastic support when $K=1$

k_s	Power Index $p=0$			
	Deflection, $\overline{w} = E_c h^3 w / qa^4$		Bending Moment, $\overline{M} = M / qa^2$	
	Elastic s upport	CFCF	Elastic support	CFCF
0	3.6482E -02	3.6482E -02	1.0652E -02	1.0652E -02
100	2.8655E -02	$\updownarrow$	2.7387E -02	$\updownarrow$
10000	2.8554E -02	2.8543E -02	2.7565E -02	2.7584E -02
	Elastic support	CSCS	Elastic support	CSC S

Table 13 Non-dimensional deflections and bending moments at the center of a thick plate with elastic support when $K=3$

k_s	Power Index $p=0$			
	Deflection, $\overline{w} = E_c h^3 w / qa^4$		Bending Moment, $\overline{M} = M / qa^2$	
	Elastic support	CFCF	Elastic support	CFCF
0	3.0032E -02	3.0032E -02	8.7294E -03	8.7294E -03
100	2.5681E -02	$\updownarrow$	2.1988E -02	$\updownarrow$
10000	2.5045E -02	2.5037E -02	2.3789E -02	2.3809E -02
	Elastic support	CSCS	Elastic support	CSCS

4) การศึกษาโมดูลัสยืดหยุ่นของแผ่นพื้น FGMs โดยใช้สมการรูปแบบอื่น

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาแผ่นพื้น FGMs รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ใช้สมการโมดูลัสยืดหยุ่นตามแบบจำลองของ Mori – Tanaka Homogenization แสดงได้ดังสมการที่ (54)

$$E(z) = E_m + \frac{(E_c - E_m)(0.5 + z/h)^p}{1 + (1 - (0.5 + z/h)^p)\left(\frac{E_c}{E_m} - 1\right)(\frac{1}{3})} \quad \textbf{(54)}$$

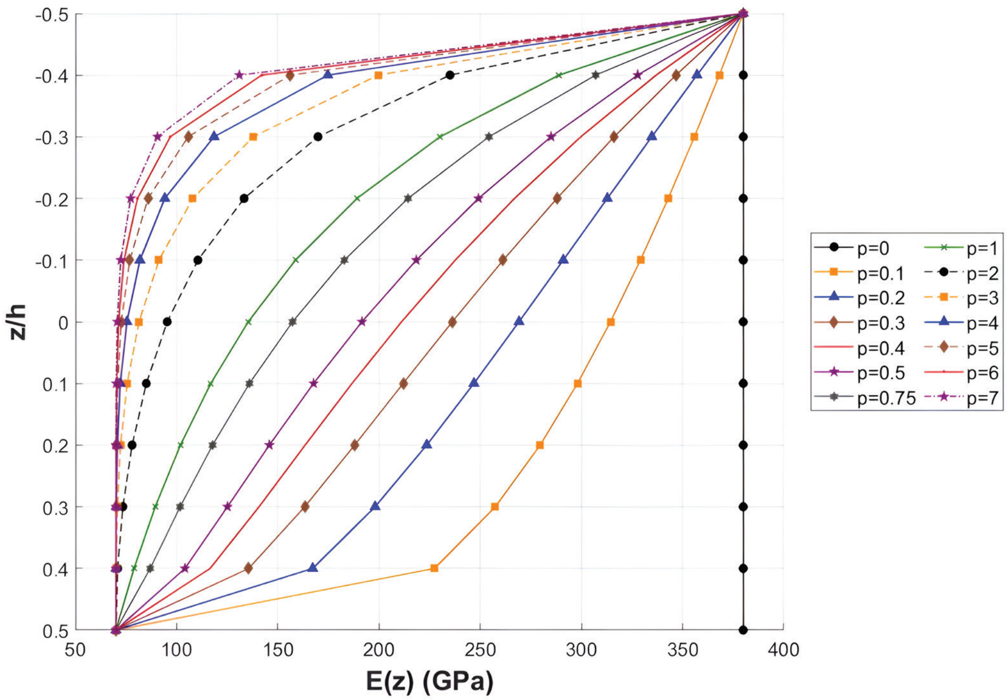

Figure 6 แสดงความสัมพันธ์ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของแผ่นพื้นตลอดความหนาตามแบบจำลองของ Mori – Tanaka Homogenization

ในการวิเคราะห์แผ่นพื้นจะกำหนดให้แผ่นพื้นมีขนาด $a \times b$ = 1x3 ม. มีความหนาเท่ากับ h = 0.1 ม. มีเงื่อนไขขอบเขตของฐานรองรับธรรมดาแบบแข็ง ใช้จำนวนเอลิเมนต์ขอบเขตเท่ากับ N = 400 และจำนวนโหนดภายในโดเมน M = 441 โดยกำหนดให้โมดูลัสยืดหยุ่นของโลหะและเซรามิกมีค่าเท่ากับ E_m = 7.0 10^{10} นิวตัน/ตร.ม. และ E_c = 3.80 10^{11} นิวตัน/ตร.ม. ตามลำดับ แผ่นพื้นถูกแรงกระทำกระจายสม่ำเสมอเท่ากับ q = 5.0 10^3 นิวตัน/ตร.ม. และพิจารณาแผ่นพื้นทั้งที่วางบนฐานรากยืดหยุ่น (K = 100) และไม่วางบนฐานรากยืดหยุ่น (K = 0) Table 14 แสดงค่าการโก่งตัวที่

กึ่งกลางแผ่นพื้นและเปรียบเทียบกับงานวิจัยที่ [11] จากผลการวิเคราะห์พบว่ามีความคลาดเคลื่อนของการโก่งตัวในอยู่ในช่วง 0.004-0.065% ซึ่งแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้

Table 14 Comparison of deflections at the center of a thick plate with hard type simple support

$K=\sqrt[4]{\dfrac{ka^2}{D}}$	Power Index, p	Deflection, $\bar{w}=E_c h^3 w / qa^4$		
		Present	Analytical [11]	Error (%)
0	0	1.2576	1.2582	0.048
	0.5	1.9323	1.9343	0.103
	1	2.5131	2.5132	0.0 04
	2	3.2248	3.2266	0.056
100	0	1.2255	1.2259	0.033
	0.5	1.8577	1.8589	0.065
	1	2.388	2.3873	0.029
	2	3.0222	3.0218	0.013

5) การประยุกต์ใช้วิธีบาวดารีเอลิเมนต์กับแผ่นพื้นที่มีรูปร่างซับซ้อน

ในการศึกษานี้จะทำการวิเคราะห์แผ่นพื้น FGMs ที่มีรูปร่างซับซ้อนแสดงดัง Figure 7 โดยแผ่นพื้นมีความหนา 6 ซม. มีเงื่อนไขฐานรองรับธรรมดาแบบแข็ง ส่วนค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของโลหะและเซรามิกเท่ากับ E_m = 7.0 10^{10} นิวตัน/ตร.ม. และ E_c = 3.80 10^{11} นิวตัน/ตร.ม. ตามลำดับ อัตราส่วนปัวซองเท่ากับ ν = 0.3 และถูกแรงกระทำแบบกระจายสม่ำเสมอเท่ากับ q = 5.0 10^{3} นิวตัน/ตร.ม. กำหนดให้แผ่นพื้นวางบนฐานรากยืดหยุ่นที่มีค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของฐานรากเท่ากับ $K=1$ และ $K=3$ Table 15 แสดงค่าการโก่งตัวและโมเมนต์ดัดที่ตำแหน่ง (29.30, 20.95) ซึ่งผลการวิเคราะห์ดังกล่าวสามารถใช้เป็นค่าอ้างอิงสำหรับเปรียบเทียบตรวจสอบความถูกต้องของงานวิจัยอื่นในอนาคตและแสดงให้เห็นถึงข้อดีของวิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ที่สามารถวิเคราะห์แผ่นพื้นที่มีรูปร่างซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ

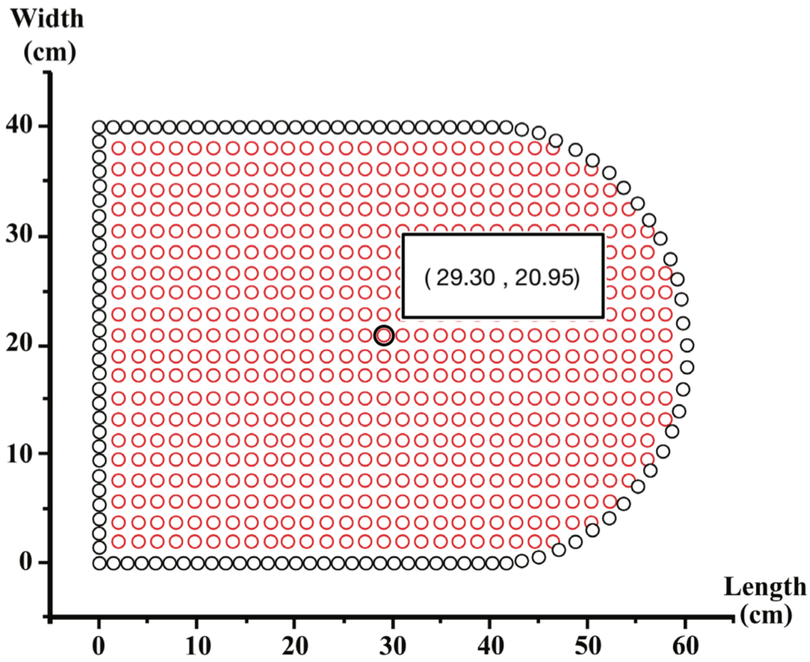

Figure 7 FGMs plate with the complex shape and boundary condition

Table 15 Non-dimensional deflections and bending moments at the center of a thick plate on an elastic foundation

$K = \sqrt[4]{\frac{ka^2}{D}}$	Power Index, p	Deflection, $\bar{w} = E_c h^3 w / qa^4$	Bending Moment	
			$\bar{M}_{xx} = M_{xx} / qa^2$	$\bar{M}_{yy} M_{yy} / qa^2$
1	0	3.0601E -02	2.1915E -02	3.5456E -02
	0.5	4.3473E -02	2.1880E -02	3.5474E -02
	1	5.1697E -02	2.1923E -02	3.5468E -02
	2	6.1642E -02	2.2033E -02	3.5442E -02
3	0	2.6502E -02	1.8420E -02	3.0252E -02
	0.5	3.8193E -02	1.8715E -02	3.0753E -02
	1	4.5730E -02	1.8908E -02	3.098 1E-02
	2	5.4796E -02	1.9121E -02	3.1130E -02

Conclusions

งานวิจัยนี้ได้พัฒนาวิธีบาวดารีเอลิเมนต์โดยใช้ร่วมกับสมการแอนะล็อกเพื่อวิเคราะห์ปัญหาการดัดของแผ่นพื้น FGMs วางบนฐานรากยืดหยุ่นและแบ่งการศึกษาออกเป็น 5 ประเด็นดังนี้

1. การวิเคราะห์การลู่เข้าของคำตอบจากจำนวนโหนดภายในโดเมน จากการศึกษาพบว่าเมื่อจำนวนโหนดภายในโดเมนเพิ่มขึ้นส่งผลให้ความคลาดเคลื่อนของคำตอบมีค่าลดลงเมื่อเทียบกับการใช้จำนวนโหนดภายในโดเมนที่น้อย

2. การตรวจสอบความถูกต้องของการวิเคราะห์กับงานวิจัยอื่น จากการศึกษาสามารถสรุปได้ว่าผลการคำนวณจากวิธีบาวดารีเอลิเมนต์เมื่อเทียบกับวิธีเชิงวิเคราะห์จากงานวิจัยอื่นที่มีปัญหาและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเหมือนกันพบว่ามีค่าความคลาดคลื่อนน้อยมาก โดยมีค่าอยู่ในช่วง 0.025-0.249% แสดงให้เห็นว่าการวิเคราะห์ด้วยวิธีบาวดารีเอลิเมนต์ของงานวิจัยนี้มีความถูกต้องแม่นยำสูง

3. การศึกษาพฤติกรรมแผ่นพื้นวางบนฐานรากยืดหยุ่นและเงื่อนไขฐานรองรับแบบต่าง ๆ จากการวิเคราะห์พบว่าเมื่อค่าความแข็งเกร็งต่อการหมุนมีค่าเป็นศูนย์ ($k_r=0$) พฤติกรรมของฐานรองรับจะเป็นฐานรองรับธรรมดาแบบแข็ง แต่ถ้าค่าความแข็งเกร็งต่อการหมุนมีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ ($k_r \to \infty$) พฤติกรรมของฐานรองรับจะเป็นฐานรองรับแบบยึดแน่น และเมื่อค่าความแข็งเกร็งต่อการเคลื่อนที่มีค่าเท่ากับศูนย์ ($k_s=0$) ฐานรองรับจะมีพฤติกรรมเป็นฐานรองรับแบบอิสระและหากค่าความแข็งเกร็งต่อการเคลื่อนที่มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ ($k_s \to \infty$) พฤติกรรมของฐานรองรับจะเป็นฐานรองรับธรรมดาแบบอ่อน

4. การศึกษาโมดูลัสของแผ่นพื้น FGMs โดยการใช้แบบจำลองของ Mori – Tanaka Homogenization เมื่อใช้วิธีบาวดารีเอลิเมนต์วิเคราะห์แผ่นพื้น FGMs วางบนฐานรากยืดหยุ่นยังคงให้ผลการคำนวณที่ใกล้เคียงสอดคล้องกับงานวิจัยอื่น [11] ที่นำมาเปรียบเทียบ

5. การศึกษาการประยุกต์ใช้วิธีบาวดารีเอลิเมนต์กับแผ่นพื้นที่มีรูปร่างซับซ้อน ผลการศึกษานี้ได้แสดงค่าการโก่งตัวและโมเมนต์ดัด ซึ่งแสดงให้เห็นถึงข้อดีและประสิทธิภาพของวิธีที่นำเสนอนี้ ในขณะที่งานวิจัยที่ผ่านมาได้ใช้วิธีเชิงวิเคราะห์จะไม่สามารถวิเคราะห์กรณีแผ่นพื้นที่มีรูปร่างซับซ้อนได้

References

1. Kobayashi, H. and Sonoda, K., 1989, “Rectangular Mindlin Plates on Elastic Foundations,” *International Journal of Mechanical Sciences*, 31 (9), pp. 679-692.
2. Kutlu, A. and Omurtag, M.H., 2012, “Large Deflection Bending Analysis of Elliptic Plates on Orthotropic Elastic Foundation with Finite Element Method,” *International Journal of Mechanical Sciences*, 65 (1), pp. 64-74.

3. Chinnaboon, B., Chucheepsakul, S. and Katsikadelis, J.T., 2011, "A BEM-Based Domain Meshless Method for the Analysis of Mindlin Plates with General Boundary Conditions," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200, pp. 1379-1388.
4. Panyatong, M., Chinnaboon, B. and Chucheepsakul, S., 2019, "Bending Analysis of Functionally Graded Plates with Arbitrary Shapes and Boundary Conditions," *Structural Engineering and Mechanics*, 71 (6), pp. 627-641.
5. Ameur, M., Tounsi, A., Mechab, I. and Bedia, E.A., 2011, "A New Trigonometric Shear Deformation Theory for Bending Analysis of Functionally Graded Plates Resting on Elastic Foundations," *KSCE Journal of Civil Engineering*, 15 (8), pp. 1405-1414.
6. Thai, H.T. and Choi, D.H., 2011, "A Refined Plate Theory for Functionally Graded Plate Resting on Elastic Foundation," *Composites Science and Technology*, 94 (1), pp. 1850-1858.
7. Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Fekrar, A., Atmane, H. and Bedia, E.A., 2010, "Bending of Thick Functionally Graded Plates Resting on Winkler-Pasternak Elastic Foundations," *Mechanics of Composite Materials*, 46 (4), pp. 425-434.
8. Nebab, M., Atmane, H.A., Bennai, R. and Tounsi, A., 2019, "Effect of Variable Elastic Foundations on Behavior of Functionally Graded Plates Using Sinusoidal Shear Deformation," *Arabian Journal of Geosciences*, 12 (24), p. 809.
9. Lei, Z. and Zheng, Z., 2009, "Exact Solution for Axisymmetric Bending of Functionally Graded Circular Plate," *Tsinghua Science and Technology*, 12 (21), pp. 64-68.
10. Akavci, S.S., 2016, "Mechanical Behavior of Functionally Grade Sandwich Plates on Elastic Foundation," *Composites Part B*, 96, pp. 136-152.
11. Zaoui, F.Z., Ouinas, D., Achour, B., Touahmia, M., Boukendakdji, M., Latifee, E.R., Al-Naghi, A.A.A. and Viña Olay, J.A., 2022, "Mathematical Approach for Mechanical Behaviour Analysis of FGM Plates on Elastic Foundation," *Mathematics*, 10 (4764), 29 p.
12. Katsikadelis, J.T., 2016, The Boundary Element Method for Engineers and Scientists: Theory and Applications, Academic Press, London, pp. 4-5.
13. Katsikadelis, J.T., 2014, The Boundary Element Method for Plate Analysis, Elsevier, Oxford, pp. 115-118.

14. Wattanasakulpong, N., Prusty, B.G., Kelly, D.W. and Hoffman, M., 2012, "Free Vibration Analysis of Layered Functionally Graded Beams with Experimental Validation," *Materials and Design*, 92, pp. 182-190.
15. Kitipornchai, S., Yang, J. and Liew, K.M., 2006, "Random Vibration of the Functionally Graded Laminates in Thermal Environments," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 (9-12), pp. 1075-1095.