

การวิเคราะห์การโก่งเดาะด้านข้างของท่อขนส่งน้ำมันในทะเล ที่มีความโค้งงอเริ่มต้น

วัชร ประเสริฐทรง¹ และ สมชาย ชูชีพสกุล²

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี แขวงบางมด เขตทุ่งครุ กรุงเทพฯ 10140

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาค่าแรงอัดที่ทำให้ท่อเกิดการโก่งเดาะทางด้านข้าง โดยพิจารณาท่อที่มีความโค้งงอเริ่มต้นและวางตัวบนพื้นทะเลที่ราบเรียบ โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการโก่งเดาะ ซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 2 และหาคำตอบแบบแม่นยำตรงจากการวิเคราะห์ พร้อมทั้งหาคำตอบเชิงตัวเลขโดยใช้ซอฟต์แวร์ MATHCAD [1] การตรวจสอบคำตอบที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ใช้ซอฟต์แวร์วิเคราะห์โครงสร้าง SAP2000 [2] คำตอบที่ได้จากทั้งสองวิธีมีความสอดคล้องและใกล้เคียงกัน นอกจากนี้ยังพบจากการศึกษาว่าเมื่อความยาวช่วงของการโก่งเดาะมีค่าน้อยและความโค้งงอเริ่มต้นมีค่าเพิ่มมากขึ้น แรงวิกฤตในโหมดที่ 1 จะมีค่าลดลงมากกว่าแรงวิกฤตในโหมดที่ 3 แต่เมื่อความยาวช่วงของการโก่งเดาะเพิ่มมากขึ้นและความโค้งงอเริ่มต้นมีค่าเพิ่มขึ้น แรงวิกฤตของทั้งสองโหมดจะลดลงน้อยกว่าเมื่อเทียบกับความยาวช่วงของการโก่งเดาะที่น้อยกว่า ทั้งนี้เนื่องมาจากอัตราส่วนของความโค้งงอเริ่มต้นต่อความยาวช่วงของการโก่งเดาะมีค่าลดลง

คำสำคัญ : แรงวิกฤต / ความโค้งงอเริ่มต้น / พื้นทะเลที่ราบเรียบ / ท่อส่งน้ำมันในทะเล

* Corresponding Author : watch.stg@gmail.com

¹ นักศึกษาปริญญาโท โครงการเทคโนโลยีวิศวกรรมโยธา (วิศวกรรมนอกฝั่ง) ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์

² ศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์

Lateral Buckling Analysis of Subsea Pipelines with Initial Imperfection

Watchara Prasertsong^{1*} and Somchai Chucheeepsakul²

King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangmod, Thungkru, Bangkok 10140

Abstract

The objective of this research was to determine the lateral buckling load of subsea pipelines with initial imperfection and rested on flat seabed. The governing differential equation (linear second order) of lateral buckling of a pipe was formulated and the exact analytical solution was obtained by using MATHCAD [1] software. The solution was verified by a nonlinear static analysis using SAP2000 [2] finite element software. The results show that when buckling length is small, the critical load of the 1st mode decreases more than the critical load of the 3rd mode as the initial imperfection increases. However, when the buckling length increases, the critical loads of both modes decrease less than those with smaller buckling length as the initial imperfection increases. This is due to the decrease in the ratio of initial imperfection to buckling length.

Keywords : Critical Load / Flat Seabed / Initial Imperfection / Subsea Pipelines

* Corresponding Author : watch.stg@gmail.com

¹ Master of Engineering Student, Civil Engineering Technology Program (Offshore Engineering), Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering.

² Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering.

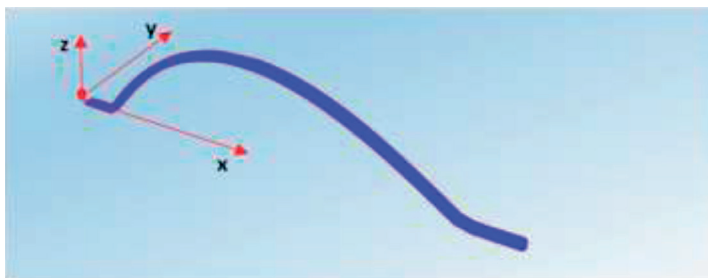
1. บทนำ

ท่อขนส่งน้ำมันใต้ท้องทะเลมีความสำคัญต่อการลงทุนในการผลิตปิโตรเลียมเพิ่มขึ้นมากในช่วงระยะเวลาที่ผ่านมา ซึ่งเป็นผลสืบเนื่องจากการพัฒนาการสำรวจและขุดเจาะน้ำมันในทะเล การโก่งเดาะของท่อขนส่งในขณะที่ใช้งานเกิดขึ้นเนื่องจากแรงอัดตามแนวแกน โดยพฤติกรรม การโก่งเดาะของท่อนั้นขึ้นอยู่กับตัวแปรหลายตัวแปรดังนี้

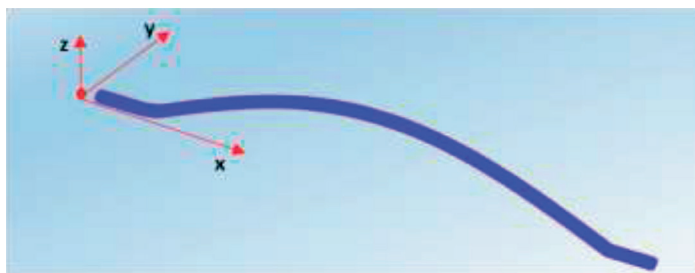
1. สมบัติทางกลของท่อขนส่งและน้ำหนักของวัสดุหุ้มท่อขนส่ง
2. แรงดึงเริ่มต้นที่เกิดขึ้นทันทีภายหลังการวางท่อขนส่งในทะเล
3. ความแตกต่างระหว่างความดันภายในและภายนอกของท่อขนส่ง

4. การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของท่อขนส่งเมื่อน้ำมันไหลผ่านท่อขนส่ง

โดยตัวแปรข้างต้นประกอบกับลักษณะภูมิประเทศของพื้นท้องทะเล (Seabed) และผลของความเสียหาย หรือผลของดินถมกลับของคูขุด (Trench Backfill) เพื่อวางท่อขนส่ง รวมทั้งการยึดรั้งที่ปลายท่อขนส่งล้วนมีผลต่อขนาดของแรงอัด นอกจากนี้แล้วการกัดเซาะ (Scour) กระแสน้ำและน้ำขึ้นน้ำลงก็มีผลต่อขนาดของแรงอัดเช่นกัน ผลตอบสนองต่อแรงอัดตามแนวแกนนั้นมีอยู่สองรูปแบบคือการโก่งเดาะในแนวตั้ง (Vertical Buckling) ดังรูปที่ 1 และการโก่งเดาะทางด้านข้าง (Lateral Buckling) ดังรูปที่ 2



รูปที่ 1 การโก่งเดาะในแนวตั้งของท่อขนส่ง



รูปที่ 2 การโก่งเดาะทางด้านข้างของท่อขนส่ง

วัตถุประสงค์หลักของงานวิจัยมีดังต่อไปนี้

1. เพื่อพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ สำหรับวิเคราะห์การโก่งเดาะทางด้านข้างของโครงสร้างท่อเมื่อท่อมีความโค้งงอทางด้านข้างเริ่มต้น
2. เพื่อศึกษาค่าความโค้งงอทางด้านข้างเริ่มต้นของท่อ

ที่มีผลกระทบต่อ การโก่งเดาะทางด้านข้างของท่อ

3. เพื่อหาคำตอบของปัญหาการโก่งเดาะทางด้านข้างของโครงสร้างท่อ เมื่อท่อมีความโค้งงอทางด้านข้างเริ่มต้น ซึ่งก็คือหาค่าแรงวิกฤตที่ทำให้เกิดการโก่งเดาะทางด้านข้างของโครงสร้างท่อ

โดยงานวิจัยนี้ทำการวิเคราะห์การโก่งเดาะด้านข้างของโครงสร้างท่อเมื่อท่อมีความโค้งงอด้านข้างเริ่มต้นในโหมดที่ 1 หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือท่อที่มีความโค้งงอด้านข้างเริ่มต้นเป็นแบบครึ่งความยาวคลื่นและเนื่องจากความโค้งงอด้านข้างเริ่มต้นของท่อในโหมดที่ 1 นั้น มีแนวโน้มที่จะพัฒนาไปเป็นการโก่งเดาะด้านข้างของท่อในโหมดที่ 3 ได้เนื่องจากการโก่งเดาะด้านข้างในโหมดที่ 3 มีโอกาสเกิดสมดุลของแรงในแนวราบมากกว่าการโก่งเดาะด้านข้างในโหมดที่ 1 และจากผลการศึกษาของ Hobbs [3] การโก่งเดาะด้านข้างของท่อตรงในโหมดที่ 3 นั้นเป็นโหมดที่วิกฤตมากที่สุด โดยการโก่งเดาะในโหมดที่ 3 มีขนาดของการโก่งเดาะด้านข้างและโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นกับท่อมียุทธศาสตร์มากที่สุดซึ่งทำให้เกิดความเค้นสูงสุดภายในท่อ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเน้นทำการวิเคราะห์การโก่งเดาะด้านข้างของท่อในโหมดที่ 1 และ 3 เมื่อท่อมีความโค้งงอด้านข้างเริ่มต้น

2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการโก่งเดาะของท่อขนส่งนั้น โดยส่วนใหญ่จะเป็นการศึกษาเกี่ยวกับการโก่งเดาะในแนวตั้งซึ่งเกิดขึ้นกับท่อที่วางอยู่ในชุดที่มีการถ่วงกลับ ส่วนการศึกษาการโก่งเดาะทางด้านข้างซึ่งเกิดขึ้นกับท่อที่วางอยู่บนพื้นทะเลโดยตรงนั้นยังมีอยู่น้อย โดยการศึกษาที่เกี่ยวข้องกับการโก่งเดาะของท่อทั้งในแนวตั้งและทางด้านข้างนั้นมีดังต่อไปนี้

Hobbs [3] ได้ทำการศึกษาค้นคว้าการโก่งเดาะในแนวตั้งและการโก่งเดาะทางด้านข้างของท่อที่วางตัวอยู่บนพื้นทะเลที่มีความราบเรียบโดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (สมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 2) เพื่อหาค่าแรงวิกฤตและอุณหภูมิที่ทำให้เกิดการโก่งเดาะ โดยมีสมมุติฐานว่าเป็นท่อตรงตลอดช่วงความยาวและมีสมบัติยืดหยุ่นสมบูรณ์และเป็นการโก่งเดาะที่มีค่าความชันน้อยคือมีค่าน้อยกว่า 0.10 เรเดียน การโก่งเดาะในแนวตั้งมีเพียงโหมดเดียวคือโหมดที่ 1 ส่วนการโก่งเดาะทางด้านข้างนั้นประกอบไปด้วย โหมดที่ 1, 2, 3, 4 และโหมดอนันต์ การศึกษาพบว่าเมื่อค่าคงที่ของแรงเสียดทานมีค่าเพิ่มขึ้นค่าอุณหภูมิที่ทำให้เกิดการโก่งเดาะในแนวตั้งและการโก่งเดาะทางด้านข้างก็จะมีค่าเพิ่มขึ้นตามโดยมีกราฟความสัมพันธ์

ระหว่างอุณหภูมิที่แปรเปลี่ยนและช่วงความยาวของการโก่งเดาะหรือขนาดการเสียรูปเมื่อท่อเกิดการโก่งเดาะมีลักษณะเป็นรูปตัวยู นอกจากนี้ยังพบว่าท่อมียุทธศาสตร์ที่จะเกิดการโก่งเดาะทางด้านข้างมากกว่าที่จะเกิดการโก่งเดาะในแนวตั้งเนื่องจากค่าแรงวิกฤตของการโก่งเดาะทางด้านข้างมีค่าน้อยกว่าค่าแรงวิกฤตของการโก่งเดาะในแนวตั้งนั่นเอง

Croll [4] ได้ทำการศึกษาค้นคว้าการโก่งเดาะในแนวตั้งของท่อโดยใช้สมการในการวิเคราะห์พฤติกรรมไม่เชิงเส้นแท้จริงของเสาที่มีความโค้งงอเริ่มต้น (Exact Non-linear Behavior of Imperfection Column) และให้การโก่งเดาะในแนวตั้งของท่อเปรียบเสมือนการโก่งเดาะของเสาที่มีปลายยึดแน่นวางตัวอยู่บนพื้นราบเรียบโดยสมมุติให้พื้นราบเรียบที่รองรับเสานั้นสามารถทรุดตัวได้ ภายใต้แรงกระทำคือน้ำหนักของเสา จะเกิดการเสียรูปในแนวตั้งในทิศทางเดียวกันกับแรงที่กระทำและเมื่อมีแรงอัดตามแนวแกนที่มีค่าเพิ่มขึ้นทีละน้อยมากระทำกับเสา จะเกิดการการเสียรูปไปในทิศทางเดิมจนกระทั่งแรงอัดมีค่าเท่ากับแรงวิกฤตของเสาที่มีปลายยึดแน่นที่ปราศจากน้ำหนักหรือแรงต้านในแนวตั้งโดย ณ จุดนี้เสาจะเกิดการเสียรูปมากที่สุด เมื่อแรงอัดมีค่ามากกว่าแรงวิกฤตเสาจะเกิดการเสียรูปไปในทิศทางตรงกันข้ามอย่างฉับพลันและเมื่อแรงอัดมีค่าเพิ่มมากขึ้นการเสียรูปจะมีค่าน้อยลงจนกระทั่งมีการเสียรูปเท่ากับการเสียรูปเนื่องจากน้ำหนักของเสาแต่มีทิศทางตรงกันข้ามซึ่งแรงอัดที่จุดนี้จึงถือว่าเป็นแรงวิกฤตของเสาที่มีปลายยึดแน่นที่และมียุทธศาสตร์น้ำหนักหรือแรงต้านในแนวตั้งนั่นเอง โดยเมื่อทำการพล็อตกราฟความสัมพันธ์ระหว่างการเสียรูปที่จุดกึ่งกลางช่วงความยาวเสากับแรงอัดตามแนวแกนแล้วกราฟจะมีลักษณะคล้ายกราฟ Hyperbola โดยมีแกนสมมาตรคือแกนของแรงอัดที่กระทำกับท่อ

Peek [5] ได้ทำการศึกษาค้นคว้าการโก่งเดาะทางด้านข้างของท่อขนส่งที่มีความเที่ยงตรงในอินฟินิทโหมด โดยทำการปรับแก้ค่าแรงวิกฤตที่ทำให้เกิดการโก่งเดาะโดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (สมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 4) และยกเลิกเงื่อนไขขอบเขตที่ Hobbs [1] ใช้ในการวิเคราะห์หาค่าค่าแรงวิกฤต (แรงเฉือนมีค่าเท่ากับศูนย์

ที่ $x=+L/2$ และ $x=-L/2$) โดยการใช้หลักการปฏิสมมาตรที่จุดดังกล่าวเป็นเงื่อนไขขอบเขตแทน ผลสรุปที่ได้คือค่าแรงวิกฤตที่ทำให้มีค่าน้อยกว่าค่าแรงวิกฤตที่ได้โดย Hobbs [3] 1.4% โดยประมาณ

Bruton และ Carr [6] ได้ทำการศึกษากาโร่งเตาะทางด้านข้างของท่อขนส่งในทะเลลึกอันเนื่องมาจากความดันและอุณหภูมิที่สูง โดยมุ่งเน้นศึกษากาโร่งเตาะทางด้านข้างของท่อขนส่งที่วางตัวบนพื้นทะเลโดยตรง (ไม่มีค้ำ) โดยด้านล่างของท่อขนส่งมีการจมตัวลงไปในพื้นทะเลเนื่องจากน้ำหนักของท่อเอง โดยพบว่าความเสียหายของท่อที่เกิดจากการโก่งเตาะนั้นเกิดขึ้นจากขาดการจัดการปัญหาอย่างถูกต้องในขั้นตอนของการออกแบบท่อ โดยเฉพาะความเสียหายที่เกิดจากความล้า (fatigue) เนื่องจากการเดินของท่อหรือการเคลื่อนที่ช้าตามแนวแกนของท่อจากรอบการเปิดและปิดการขนส่งไฮโดรคาร์บอนในท่อ เพื่อจัดการกับปัญหาดังกล่าว Atkins ซึ่งเป็นบริษัทที่ปรึกษางานวิศวกรรมจึงได้ริเริ่มโครงการกองทุนอุตสาหกรรม (Joint Industry Project (JIP)) ที่มีชื่อว่า Safebuck เพื่อศึกษาวิจัยปัจจัยที่เกี่ยวข้องทั้งหมดที่ต้องนำมาพิจารณาในการออกแบบท่อขนส่งในทะเลลึกและกำหนดแนวทางพร้อมเครื่องมือใหม่ๆ เพื่อใช้ในการออกแบบท่อขนส่ง โดย Safebuck ได้ทำการศึกษวิจัยในเรื่องดังต่อไปนี้ 1. ความล้าที่ความถี่ต่ำและความเค้นสูงขณะเกิดการโก่งเตาะทางด้านข้างของท่อขนส่งที่อยู่ในสภาวะแวดล้อมที่มีการกัดกร่อน 2. การโก่งเตาะทางด้านข้างของท่อขนส่งที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางน้อย 3. ปฏิสัมพันธ์ของท่อขนส่งกับดินพื้นทะเลในขณะเกิดการโก่งเตาะทางด้านข้าง

Liu และคณะ [7] ได้ทำการศึกษากาโร่งเตาะทางด้านข้างของท่อขนส่งที่มีความเที่ยงตรงโดยแบ่งการโก่งเตาะทางด้านข้างเป็นสองประเภทคือ การโก่งเตาะทางด้านข้างอันดับที่ต่ำ (โหมดที่ 1 และ 2) และการโก่งเตาะทางด้านข้างอันดับที่สูง (โหมดที่ 3 และ 4) โดยการโก่งเตาะทางด้านข้างอันดับที่สูงเกิดขึ้นได้ง่ายกว่าเนื่องจากแรงเสียดทานทางด้านข้างมีค่าไม่เพียงพอที่จะต้านทานการเสีรูปของท่อซึ่งเป็นเหตุให้ท่อเกิดการเสีรูปเป็นคลื่นการเสีรูป

ขนาดเล็กต่อเนื่องด้วยคลื่นการเสีรูปขนาดใหญ่ซึ่งเป็นรูปร่างการโก่งเตาะทางด้านข้างอันดับที่สูงนั่นเอง ด้วยเหตุดังกล่าวการศึกษาจึงมุ่งเน้นไปที่การโก่งเตาะทางด้านข้างอันดับที่สูงโดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (สมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 4) เพื่อหาค่าแรงวิกฤตที่ทำให้เกิดการโก่งเตาะ โดยคำตอบที่ได้ทั้งหมดที่ 3 และ 4 มีค่าเช่นเดียวกันกับ Hobbs [3] นอกจากนี้ยังได้แสดงค่าความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของการโก่งเตาะกับความยาวของท่อในช่วงที่เกิดการเสีรูป โดยโหมดที่ 3 และ 4 นั้นความยาวของท่อในช่วงที่เกิดการเสีรูปมีค่าเท่ากับ 2.6 และ 1.6 เท่าของความยาวของการโก่งเตาะตามลำดับ

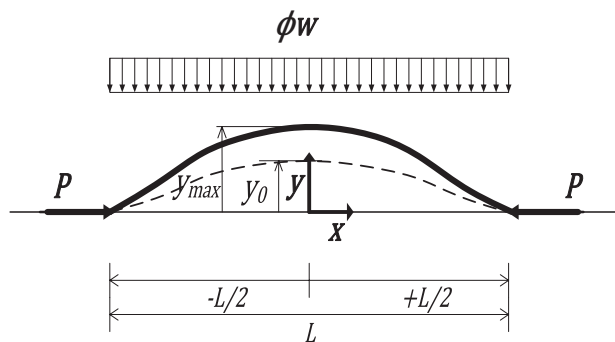
จากงานวิจัยที่เกี่ยวข้องข้างต้นจะเห็นได้ว่ายังขาดการศึกษาเกี่ยวกับการโก่งเตาะทางด้านข้างของโครงสร้างท่อเมื่อท่อมีความโค้งงอทางด้านข้างเริ่มต้น ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงเป็นที่มาของงานวิจัยนี้

3. ระเบียบวิธีวิจัย

ในส่วนนี้จะอธิบายถึงระเบียบวิธีวิจัยเพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการโก่งเตาะทางด้านข้างเมื่อท่อมีความโค้งงอเริ่มต้นโดยการสร้างสมการอนุพันธ์เชิงเส้นของการโก่งเตาะ และหลังจากนั้นก็หาคำตอบของสมการเพื่อหาค่าแรงวิกฤตที่ทำให้เกิดการโก่งเตาะทางด้านข้าง นอกจากนี้แล้วยังแสดงวิธีการหาค่าแรงวิกฤตโดยใช้ซอฟต์แวร์ MATHCAD [1] และใช้ซอฟต์แวร์ SAP2000 [2] เพื่อเปรียบเทียบผล ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

3.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการโก่งเตาะทางด้านข้างของท่อที่มีความโค้งงอเริ่มต้นในโหมดที่ 1

ในตอนแรกท่อมีความโค้งงอทางด้านข้างเริ่มต้นเท่ากับ (y_0) ซึ่งมีลักษณะเป็นเส้นโคไซน์ (Cosine Curves) เมื่อแรงอัดตามแนวแกนมีค่าเพิ่มขึ้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิและความดันที่เพิ่มขึ้นจนกระทั่งแรงตามแนวแกนมีค่าเท่ากับแรงวิกฤต (P_{cr}) ท่อก็จะเกิดการโก่งเตาะโดยมีทิศทางการโก่งเตาะไปในทิศทางเดียวกันกับทิศทางการโค้งงอทางด้านข้างเริ่มต้นและมีทิศทางตรงกันข้ามกับแรงเสียดทานในแนวราบดังแสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3 การโก่งเดาะทางด้านข้างเมื่อท่อดึงมีความโค้งงอเริ่มต้นในโหมดที่ 1

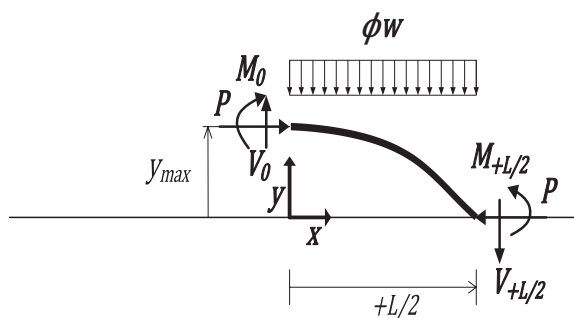
สำหรับ y ที่ $-L/2 \leq x \leq +L/2$

$$R = 1/(d^2y/dx^2 - d^2y_0/dx^2)$$

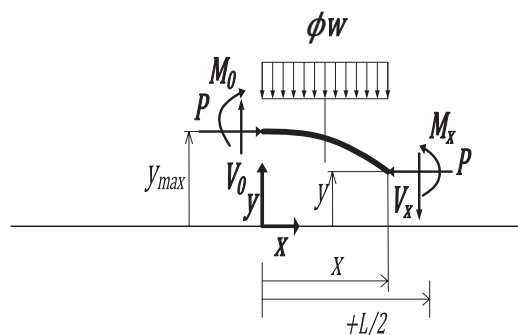
จากทฤษฎีการดัดของคาน รัศมีความโค้งของเส้นโค้ง จะได้

อีลาสติกเมื่อท่อดึงเกิดการโก่งเดาะ ณ จุด x ใดๆ คือ

$$EI(d^2y/dx^2 - d^2y_0/dx^2) = M_x \quad (1)$$



รูปที่ 4 รูปตัดเพื่อหาค่าแรงภายใน ที่กระทำกับท่อดึงเมื่อท่อดึงเกิดการโก่งเดาะ



รูปที่ 5 รูปตัดเพื่อหาค่าแรงภายใน ที่กระทำกับท่อดึงเมื่อท่อดึงเกิดการโก่งเดาะ

โดยการเขียนสมการของแรงที่กระทำกับท่อดังรูปที่ 4 และ 5 จะสามารถหาแรงภายในที่กระทำกับท่อได้ดังนี้

$$\text{ที่ } x = +L/2 \quad M_{+L/2} = 0 \quad (2)$$

$$\text{ที่ } x = -L/2 \quad M_{-L/2} = 0 \quad (3)$$

$$\text{ที่ } x = 0 \quad M_0 = \phi w L^2/8 - P_{cr} y_{max} \quad (4)$$

$$\text{ที่ } x \text{ ใดๆ} \quad (5)$$

ดังนั้นจะได้สมการอนุพันธ์เชิงเส้นของการโก่งเดาะคือ

$$(d^2 y/dx^2 - d^2 y_0/dx^2) + n^2 y + m(4x^2 - L^2)/8 = 0 \quad (6)$$

$$y_0 = Y_0(1 + \cos 2\pi x/L) \quad (7)$$

$$m = \phi w/EI \quad (8)$$

$$n^2 = P/EI \quad (9)$$

พารามิเตอร์ต่างๆ ในสมการที่ (1) - (9) มีดังต่อไปนี้

ϕ คือสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทาน

w คือน้ำหนักจมของท่อขนส่ง

P คือแรงอัดตามแนวแกนที่กระทำกับท่อขนส่งในส่วนที่เกิดการโก่งเดาะ

E คือค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของท่อขนส่ง (Young's Modulus)

I คือโมเมนต์ที่สองของพื้นที่หน้าตัดท่อขนส่ง

y คือการเสียรูปในแนวด้านข้างของท่อขนส่ง

y_0 คือความโค้งงอเริ่มต้นของท่อขนส่ง

x คือตำแหน่งใดๆ ในแนวนอนของท่อขนส่ง

L คือความยาวช่วงของการโก่งเดาะ

โดยใช้ Operator D ($D^2 = d^2()/dx^2$) กับสมการที่ (6) จะได้

$$(D^2 + n^2)y + f(x) = 0 \quad (10)$$

$$f(x) = -d^2 y_0/dx^2 + m(4x^2 - L^2)/8 \quad (11)$$

$$d^2 y_0/dx^2 = -Y_0(4\pi^2/L^2) \cos 2\pi x/L \quad (12)$$

ดังนั้น

$$f(x) = Y_0(4\pi^2/L^2) \cos 2\pi x/L + m(4x^2 - L^2)/8 \quad (13)$$

คำตอบทั่วไปสำหรับสมการที่ (10) เมื่อ $f(x) = 0$

$$\text{หรือ } (D^2 + n^2)y = 0 \quad (14)$$

$$\text{คือ } y_c = A_1 \cos nx + A_2 \sin nx \quad (15)$$

ให้คำตอบเฉพาะของสมการที่ (10) คือ

$$y_p = Ax^2 + B + C_1 \cos 2\pi x/L + C_2 \sin 2\pi x/L \quad (16)$$

ดังนั้น

$$(D^2 + n^2)y = d^2 y_p/dx^2 + n^2 y_p \quad (17)$$

$$d^2 y_p/dx^2 = 2A - C_1(2\pi/L)^2 \cos 2\pi x/L - C_2(2\pi/L)^2 \sin 2\pi x/L \quad (18)$$

จากสมการที่ (10) จะได้

$$(D^2 + n^2)y = -f(x) \quad (19)$$

ดังนั้น

$$-f(x) = d^2 y_p/dx^2 + n^2 y_p \quad (20)$$

แทนค่า $f(x)$ จากสมการที่ (13) ในสมการที่ (20) จะได้

$$\begin{aligned} -[Y_0(4\pi^2/L^2) \cos 2\pi x/L + m(4x^2 - L^2)/8] = \\ + 2A - C_1(2\pi/L)^2 \cos 2\pi x/L \\ - C_2(2\pi/L)^2 \sin 2\pi x/L + n^2[Ax^2 + B + \\ C_1 \cos 2\pi x/L + C_2 \sin 2\pi x/L] \end{aligned}$$

พิจารณาเทอมของสมการทางด้านซ้ายต่อเทอมของสมการทางด้านขวาจะได้

$$n^2 A = -m/2 \text{ จะได้ } A = -m/2n^2 \quad (21)$$

$$2A + n^2 B = mL^2/8 \text{ จะได้}$$

$$B = mL^2/8n^2 + m/n^4 \quad (22)$$

$$n^2 C_2 - C_2(2\pi/L)^2 = 0 \text{ จะได้ } C_2 = 0 \quad (23)$$

$$n^2 C_1 - C_1(2\pi/L)^2 = -Y_0(4\pi^2/L^2) \text{ จะได้}$$

$$C_1 = -Y_0(4\pi^2/L^2)/(n^2 - (2\pi/L)^2) \quad (24)$$

โดยคำตอบทั่วไปของสมการ (10) คือ จะได้

$$y = A_1 \cos nx + A_2 \sin nx + Ax^2 + B + C_1 \cos 2\pi x/L + C_2 \sin 2\pi x/L \quad (25)$$

หาค่าสัมประสิทธิ์ของสมการโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$\text{ที่ } x = +L/2, y(x) = 0$$

$$0 = A_1 \cos nL/2 + A_2 \sin nL/2 + m/n^4 + 4\pi^2 Y_0/((nL)^2 - (2\pi)^2) \quad (26)$$

$$\text{ที่ } x = -L/2, y(x) = 0$$

$$0 = A_1 \cos nL/2 - A_2 \sin nL/2 + m/n^4 + 4\pi^2 Y_0/((nL)^2 - (2\pi)^2) \quad (27)$$

ค่า A_1 หาจากการรวมสมการ (26) กับ (27) จะได้

$$A_1 = -[m/n^4 + 4\pi^2 Y_0/((nL)^2 - (2\pi)^2)]/\cos nL/2 \quad (28)$$

ค่า A_2 หาจากการเอาสมการ (26) ตั้งแล้วลบด้วยสมการ (27) จะได้

$$A_2 = 0 \quad (29)$$

แทนค่า A_1 และ A_2 ในสมการที่ (25) จะได้คำตอบทั่วไป

ของสมการคือ

$$y = (m/n^4) [-(\alpha n^4/m + 1) \cos nx / \cos nL/2 - n^2 x^2/2 + n^2 L^2/8 + 1 - (n^4/m) \alpha \cos 2\pi x/L] \quad (30)$$

โดยที่

$$\alpha = 4\pi^2 Y_0 / ((nL)^2 - (2\pi)^2) \quad (31)$$

หาค่าแรงวิกฤตโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$\text{ที่ } x = +L/2 \text{ และ } -L/2, dy/dx = 0 \quad (32)$$

จะได้

$$dy/dx = (m/n^4) [n(\alpha n^4/m + 1) \sin nx / \cos nL/2 - n^2 x + (n^4/m) (2\pi/L) \alpha \sin 2\pi x/L] \quad (33)$$

ที่ $x = +L/2$ จะได้

$$0 = (m/n^4) [n(\alpha n^4/m + 1) \tan nL/2 - n^2 L/2] \quad (34)$$

ที่ $x = -L/2$ จะได้

$$0 = (m/n^4) [-n(\alpha n^4/m + 1) \tan nL/2 + n^2 L/2] \quad (35)$$

จากสมการที่ (34) และ (35) จะได้

$$(\alpha n^4/m + 1) \tan nL/2 = nL/2 \quad (36)$$

และสามารถหาค่าแรงวิกฤต ($P_{cr} = n^2 EI$) ได้โดยการแก้สมการที่ (36) โดยการทดลองแทนค่า n

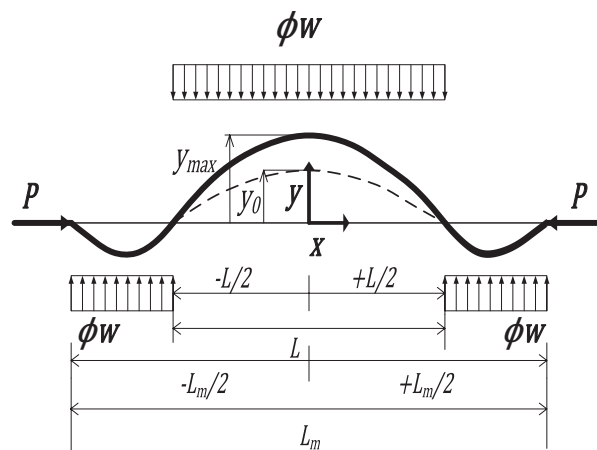
จะเห็นว่าเมื่อท่อมีความโค้งงอทางด้านข้างเริ่มต้นเป็นศูนย์ ($\alpha = 0$) แล้ว สมการที่ (36) จะลดรูปได้ดังนี้

$$\tan nL/2 = nL/2 \quad (37)$$

แก้สมการที่ (37) โดยการพล็อตกราฟหาจุดตัดของสมการในเทอมซ้ายและสมการในเทอมขวาที่ค่า n ต่างๆ (โดยกำหนดให้ค่า $L = 10 \text{ m.}$) จะได้ $n = 0.8986 \text{ m.}^{-1}$ และได้แรงวิกฤต $P_{cr} = 0.807EI$ หรือ $P_{cr} = 80.76 EI/L^2$ เช่นเดียวกันกับ Hobbs [3]

3.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการโก่งเดาะทางด้านข้างของท่อที่มีความโค้งงอเริ่มต้นในโหมดที่ 3

เช่นเดียวกันกับการโก่งเดาะในโหมดที่ 1 ท่อก็จะเกิดการโก่งเดาะ โดยมีทิศทางการโก่งเดาะไปในทิศทางเดียวกันกับทิศทางการโค้งงอทางด้านข้างเริ่มต้นและมีทิศทางตรงกันข้ามกับแรงเสียดทานในแนวราบในช่วงที่มีความยาวเท่ากับ L ดังแสดงในรูปที่ 6



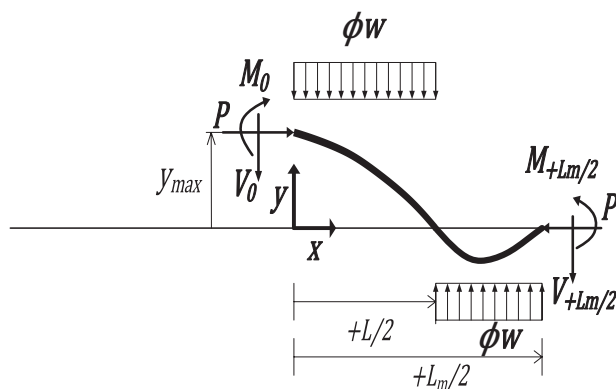
รูปที่ 6 การโก่งเดาะทางด้านข้างเมื่อท่อมีความโค้งงอเริ่มต้นในโหมดที่ 3

สำหรับ y ที่ $-L/2 \leq x \leq +L/2$

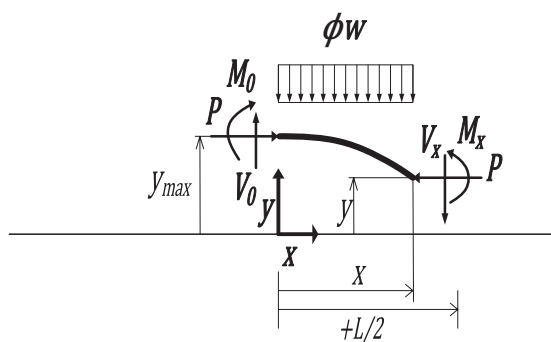
จากทฤษฎีการตัดของคาน รัศมีความโค้งของเส้นโค้งฮิลาสติกเมื่อท่อเกิดการโก่งเดาะ ณ จุด x ใดๆ

คือ $R = 1/(d^2 y/dx^2 - d^2 y_0/dx^2)$

$$\text{จะได้ } EI(d^2 y/dx^2 - d^2 y_0/dx^2) = M_x \quad (38)$$



รูปที่ 7 รูปตัดเพื่อหาค่าแรงภายใน (M_0, V_0) ที่กระทำกับท่อนเมื่อท่อเกิดการโก่งเดาะ



รูปที่ 8 รูปตัดเพื่อหาค่าแรงภายใน (M_x) ที่กระทำกับท่อนเมื่อท่อเกิดการโก่งเดาะ ($x \leq +L/2$)

โดยการเขียนสมการของแรงที่กระทำกับท่อนดังรูปที่ 7 และ

8 จะสามารถหาแรงภายในที่กระทำกับท่อได้ดังนี้

$$\text{ที่ } x = +L/2 \quad M_{+L/2} = 0 \quad (39)$$

$$\text{ที่ } x = -L/2 \quad M_{-L/2} = 0 \quad (40)$$

$$\text{เนื่องจากความสมมาตร ที่ } x = 0 \quad V_0 = 0 \quad (41)$$

$$\text{ที่ } x = 0$$

$$M_0 = \phi w L L_m / 2 - \phi w L^2 / 4 - \phi w L_m^2 / 8 - P_{cr} y_{max} \quad (42)$$

$$\text{ที่ } x \text{ ใดๆ } M_x = M_0 - \phi w x^2 / 2 + P_{cr} (y_{max} - y) \quad (43)$$

ดังนั้นจะได้สมการอนุพันธ์เชิงเส้นของการโก่งเดาะคือ

$$(d^2 y / dx^2 - d^2 y_0 / dx^2) + n^2 y + m(x^2 + L^2 / 2 + L_m^2 / 4 - L L_m) / 2 = 0 \quad (44)$$

$$y_0 = Y_0 (1 + \cos 2\pi x / L) \quad (45)$$

$$m = \phi w / EI \quad (46)$$

$$n^2 = P / EI \quad (47)$$

พารามิเตอร์ต่างๆในสมการที่ (38) - (47) มีดังต่อไปนี้

ϕ คือสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทาน

w คือน้ำหนักจมของท่อขนส่ง

P คือแรงอัดตามแนวแกนที่กระทำกับท่อขนส่งในส่วนที่เกิดการโก่งเดาะ

E คือค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของท่อขนส่ง (Young's Modulus)

I คือโมเมนต์ที่สองของพื้นที่หน้าตัดท่อขนส่ง

y คือการเสียรูปในแนวด้านข้างของท่อขนส่ง

y_0 คือความโค้งเริ่มต้นของท่อขนส่ง

x คือตำแหน่งใดๆในแนวนอนของท่อขนส่ง

L, L_m คือความยาวช่วงของการโก่งเดาะ

โดยใช้ Operator D ($D^2 = d^2()/dx^2$) กับสมการที่ (44) จะได้

$$(D^2 + n^2)y + f(x) = 0 \quad (48)$$

$$f(x) = -d^2y_0/dx^2 + m(x^2 + L^2/2 + L_m^2/4 - LL_m)/2 \quad (49)$$

$$d^2y_0/dx^2 = -Y_0(4\pi^2/L^2) \cos 2\pi x/L \quad (50)$$

ดังนั้น

$$f(x) = Y_0(4\pi^2/L^2) \cos 2\pi x/L + m(x^2 + L^2/2 + L_m^2/4 - LL_m)/2 \quad (51)$$

คำตอบทั่วไปสำหรับสมการที่ (48) เมื่อ $f(x) = 0$

$$\text{หรือ } (D^2 + n^2)y = 0 \quad (52)$$

$$\text{คือ } y_c = A_1 \cos nx + A_2 \sin nx \quad (53)$$

ให้คำตอบเฉพาะของสมการที่ (48) คือ

$$y_p = Ax^2 + B + C_1 \cos 2\pi x/L + C_2 \sin 2\pi x/L \quad (54)$$

ดังนั้น

$$(D^2 + n^2)y = d^2y_p/dx^2 + n^2y_p \quad (55)$$

$$d^2y_p/dx^2 = 2A - C_1(2\pi/L)^2 \cos 2\pi x/L - C_2(2\pi/L)^2 \sin 2\pi x/L \quad (56)$$

จากสมการที่ (48) จะได้

$$(D^2 + n^2)y = -f(x) \quad (57)$$

ดังนั้น

$$-f(x) = d^2y_p/dx^2 + n^2y_p \quad (58)$$

แทนค่า $f(x)$ จากสมการที่ (51) ในสมการที่ (58) จะได้

$$\begin{aligned} -[Y_0(4\pi^2/L^2) \cos 2\pi x/L + m(x^2 + L^2/2 + L_m^2/4 - LL_m)/2] = 2A \\ - C_1(2\pi/L)^2 \cos 2\pi x/L - C_2(2\pi/L)^2 \sin 2\pi x/L + n^2[Ax^2 + B + C_1 \cos 2\pi x/L + C_2 \sin 2\pi x/L] \end{aligned}$$

พิจารณาเทอมของสมการทางด้านซ้ายต่อเทอมของสมการทางด้านขวาจะได้

$$n^2A = -m/2 \text{ จะได้ } A = -m/2n^2 \quad (59)$$

$$2A + n^2B = -m(L^2/2 + L_m^2/4 - LL_m)/2 \text{ จะได้}$$

$$B = -m(L^2/2 + L_m^2/4 - LL_m)/2n^2 + m/n^4 \quad (60)$$

$$n^2C_2 - C_2(2\pi/L)^2 = 0 \text{ จะได้ } C_2 = 0 \quad (61)$$

$$n^2C_1 - C_1(2\pi/L)^2 = -Y_0(4\pi^2/L^2)$$

จะได้

$$C_1 = -Y_0(4\pi^2/L^2)/(n^2 - (2\pi/L)^2) \quad (62)$$

โดยคำตอบทั่วไปของสมการ (48) คือ $y = y_c + y_p$ จะได้

$$y = A_1 \cos nx + A_2 \sin nx + Ax^2 + B + C_1 \cos 2\pi x/L + C_2 \sin 2\pi x/L \quad (63)$$

หาค่าสัมประสิทธิ์ของสมการโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$\text{ที่ } x = +L/2, y(x) = 0$$

$$0 = A_1 \cos nL/2 + A_2 \sin nL/2 + \alpha_1 + \alpha \quad (64)$$

$$\text{ที่ } x = -L/2, y(x) = 0$$

$$0 = A_1 \cos nL/2 - A_2 \sin nL/2 + \alpha_1 + \alpha \quad (65)$$

$$\text{โดยที่ } \alpha = 4\pi^2 Y_0 / ((nL)^2 - (2\pi)^2) \quad (66)$$

$$\alpha_1 = -m(L^2/8n^2 + L^2/4n^2 - 1/n^4) - m(L_m^2/4 - LL_m)/2n^2 \quad (67)$$

ค่า A_1 หาจากการรวมสมการ (64) กับ (65) จะได้

$$A_1 = -[\alpha_1 + \alpha] / \cos nL/2 \quad (68)$$

ค่า A_2 หาจากการเอาสมการ (64) ตั้งแล้วลบด้วยสมการ (65) จะได้

$$A_2 = 0 \quad (69)$$

แทนค่า A_1 และ A_2 ในสมการที่ (63) จะได้คำตอบทั่วไปของสมการคือ

$$y = -m/n^4 [\beta \cos nx / \cos nL/2 + n^2 x^2 / 2 + \gamma - 1 + (n^4/m) \alpha \cos 2\pi x/L] \quad (70)$$

โดยที่

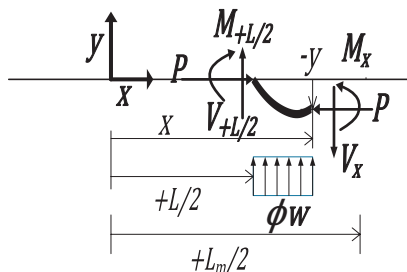
$$\beta = 1 + n^4 \alpha / m - 3n^2 L^2 / 8 - n^2 (L_m^2 / 4 - LL_m) / 2 \quad (71)$$

$$\gamma = n^2 (L^2 / 2 + L_m^2 / 4 - LL_m) / 2 \quad (72)$$

สำหรับ y ที่ $+L/2 \leq x \leq +L_m/2$

จากทฤษฎีการตัดของคาน รัศมีความโค้งของเส้นโค้งอีลาสติกเมื่อท่อกเกิดการโก่งเดาะ ณ จุด x ใดๆ คือ

$$R = 1/(d^2y/dx^2) \text{ จะได้ } EI(d^2y/dx^2) = M_x \quad (73)$$



รูปที่ 9 รูปตัดเพื่อหาค่าแรงภายใน (M_x) ที่กระทำกับท่อเมื่อ
ท่อเกิดการโก่งเดาะ ($x \geq +L/2$)

โดยการเขียนสมดุลของแรงที่กระทำกับท่อดังรูปที่ 9 จะ
สามารถหาแรงภายในที่กระทำกับท่อได้ดังนี้

ที่ x ใดๆ

$$M_x = \phi w(x^2 - 2Lx + LL_m - L_m^2/4)/2 - P_{cr}y \quad (74)$$

ดังนั้นจะได้สมการอนุพันธ์เชิงเส้นของการโก่งเดาะคือ

$$d^2y/dx^2 + n^2y - m(x^2 - 2Lx + LL_m - L_m^2/4)/2 = 0 \quad (75)$$

$$y_0 = Y_0(1 + \cos 2\pi x/L) \quad (76)$$

$$m = \phi w/EI \quad (77)$$

$$n^2 = P/EI \quad (78)$$

พารามิเตอร์ต่างๆ ในสมการที่ (73) - (78) มีดังต่อไปนี้

ϕ คือสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทาน

w คือน้ำหนักจมของท่อขนส่ง

P คือแรงอัดตามแนวแกนที่กระทำกับท่อขนส่งใน
ส่วนที่เกิดการโก่งเดาะ

E คือค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของท่อขนส่ง (Young's
Modulus)

I คือโมเมนต์ที่สองของพื้นที่หน้าตัดท่อขนส่ง

y คือการเสียรูปในแนวด้านข้างของท่อขนส่ง

y_0 คือความโค้งงอเริ่มต้นของท่อขนส่ง

x คือตำแหน่งใดๆในแนวนอนของท่อขนส่ง

L, L_m คือความยาวช่วงของการโก่งเดาะ

โดยใช้ Operator D ($D^2 = d^2()/dx^2$) กับสมการ
ที่ (75) จะได้

$$(D^2 + n^2)y + f(x) = 0 \quad (79)$$

$$f(x) = -m(x^2 - 2Lx + LL_m - L_m^2/4)/2 \quad (80)$$

คำตอบทั่วไปสำหรับสมการที่ (79) เมื่อ $f(x) = 0$

$$\text{หรือ } (D^2 + n^2)y = 0 \quad (81)$$

$$\text{คือ } y_c = A_1 \cos nx + A_2 \sin nx \quad (82)$$

ให้คำตอบเฉพาะของสมการที่ (79)

$$\text{คือ } y_p = Ax^2 + Bx + C_0 + C_1 \cos 2\pi x/L +$$

$$C_2 \sin 2\pi x/L \quad (83)$$

$$\text{ดังนั้น } (D^2 + n^2)y = d^2y_p/dx^2 + n^2y_p \quad (84)$$

$$d^2y_p/dx^2 = 2A - C_1(2\pi/L)^2 \cos 2\pi x/L -$$

$$C_2(2\pi/L)^2 \sin 2\pi x/L \quad (85)$$

จากสมการที่ (79) จะได้

$$(D^2 + n^2)y = -f(x) \quad (86)$$

$$\text{ดังนั้น } -f(x) = d^2y_p/dx^2 + n^2y_p \quad (87)$$

แทนค่า $f(x)$ จากสมการที่ (80) ในสมการที่ (87) จะได้

$$m(x^2 - 2Lx + LL_m - L_m^2/4)/2 =$$

$$2A - C_1(2\pi/L)^2 \cos 2\pi x/L - C_2(2\pi/L)^2$$

$$\sin 2\pi x/L + n^2[Ax^2 + Bx + C_0 +$$

$$C_1 \cos 2\pi x/L + C_2 \sin 2\pi x/L]$$

พิจารณาเทอมของสมการทางด้านซ้ายต่อเทอมของสมการ
ทางด้านขวาจะได้

$$n^2A = m/2 \text{ จะได้ } A = m/2n^2 \quad (88)$$

$$n^2B = -mL \text{ จะได้ } B = -mL/n^2 \quad (89)$$

$$2A + n^2C_0 = m(LL_m/2 - L_m^2/8) \text{ จะได้}$$

$$C_0 = m(LL_m/2 - L_m^2/8 - 1/n^2)/n^2 \text{ จะได้} \quad (90)$$

$$n^2C_2 - C_2(2\pi/L)^2 = 0 \text{ จะได้ } C_2 = 0 \quad (91)$$

$$n^2C_1 - C_1(2\pi/L)^2 = 0 \text{ จะได้ } C_1 = 0 \quad (92)$$

โดยคำตอบทั่วไปของสมการ (79) คือ $y = y_c + y_p$ จะได้

$$y = A_1 \cos nx + A_2 \sin nx + Ax^2 + Bx + C_0 \quad (93)$$

หาค่าสัมประสิทธิ์ของสมการโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$\text{ที่ } x = +L/2, y(x) = 0$$

$$0 = A_1 \cos nL/2 + A_2 \sin nL/2 +$$

$$AL^2/4 + BL/2 + C_0 \quad (94)$$

$$\text{ที่ } x = +L_m/2, y(x) = 0$$

$$0 = A_1 \cos nL_m/2 + A_2 \sin nL_m/2 + AL_m^2/4 + BL_m/2 + C_0 \quad (95)$$

จากสมการ (94) จะได้

$$A_1 = -[A_2 \sin nL/2 + AL^2/4]/\cos nL/2 - [BL/2 + C_0]/\cos nL/2 \quad (96)$$

แทนค่า A_1 ในสมการที่ (95) เพื่อหาค่า A_2 จะได้

$$A_2 = [C_3 (\cos nL_m/2 / \cos nL/2) - C_4]/C_5 \quad (97)$$

โดยที่

$$C_3 = AL^2/4 + BL/2 + C_0 \quad (98)$$

$$C_4 = AL_m^2/4 + BL_m^2/2 + C_0 \quad (99)$$

$$C_5 = \sin nL_m/2 - \tan nL/2 \cos nL_m/2 \quad (100)$$

และจากหลักการสมมาตร สำหรับ y ที่ $-L/2 \geq x \geq -L_m/2$ จะได้

$$y = A_1 \cos nx - A_2 \sin nx + Ax^2 - Bx + C_0 \quad (101)$$

สามารถหาค่าแรงวิกฤต ($P_{cr} = n^2 EI$) ได้โดยการใช้เงื่อนไขความสอดคล้องกันดังนี้

สำหรับ y ที่ $-L/2 \leq x \leq +L/2$ ความชันของเส้นการโก่งเดาะคือ

$$dy/dx = m/n^4 [n \beta \sin nx / \cos nL/2 - n^2 x + (n^4/m) \alpha (2\pi/L) \sin 2\pi x/L] \quad (102)$$

$$\text{ที่ } x = +L/2$$

$$dy/dx = m/n^4 [n \beta \tan nL/2 - n^2 L/2] \quad (103)$$

สำหรับ y ที่ $+L/2 \leq x \leq +L_m/2$ ความชันของเส้นการโก่งเดาะคือ

$$dy/dx = -nA_1 \sin nx + nA_2 \cos nx + 2Ax + B \quad (104)$$

$$\text{ที่ } x = +L/2$$

$$dy/dx = -nA_1 \sin nL/2 + nA_2 \cos nL/2 + AL + B \quad (105)$$

ที่จุดเดียวกันคือที่ $x = +L/2$ จะมีความชันเท่ากัน ดังนั้นสมการที่(103) จะเท่ากับ (105) จะได้

$$m/n^4 [n \beta \tan nL/2 - n^2 L/2] = -nA_1 \sin nL/2 + nA_2 \cos nL/2 + AL + B \quad (106)$$

โดยการจัดสมการที่ (106) ใหม่จะได้

$$-mL/2 n^2 = -nA_1 \sin nL/2 + nA_2 \cos nL/2 + AL + B - A_3 \quad (107)$$

$$\text{โดยที่ } A_3 = m[\alpha n^4/m + 1 + n^2 L^2(k/2 - k^2/8 - 3/8)] (\tan nL/2)/n^3 \quad (108)$$

จากสมการที่ (107) จะสามารถหาค่าแรงวิกฤต ($P_{cr} = n^2 EI$) ได้โดยการแก้สมการหาค่า n โดยการทดลองแทนค่า

3.3 หาค่าแรงวิกฤตของการโก่งเดาะทางด้านข้างของท่อที่มีความโค้งเริ่มต้นในโหมดที่ 1 โดยใช้ซอฟต์แวร์ MATHCAD [1]

การหาค่าแรงวิกฤตเมื่อท่อมีความโค้งทางด้านข้างเริ่มต้นในโหมดที่ 1 สามารถหาค่าได้โดยการแก้สมการหาค่า n ในสมการที่ (36) โดยการทดลองแทนค่า n โดยใช้ตัวอย่างท่อเหล็กที่มีสมบัติดังนี้

1. ท่อเหล็กมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 650 มม. มีผนังท่อหนา 15 มม. มีโมเมนต์ที่สองของพื้นที่ 150,900 ซม.⁴ และมีพื้นที่หน้าตัด 299.2 ซม.²

2. ท่อเหล็กมีค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น 200,000 เมกะปาสคาล และมีน้ำหนักจม 3.80 กิโลนิวตันต่อเมตร

3. ค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานระหว่างท่อเหล็กและพื้นทะเล (ϕ) มีค่าเท่ากับ 0.5

4. ค่าความโค้งทางด้านข้างเริ่มต้นมีค่าเท่ากับ 0.00, 0.02, 0.04 จนถึง 0.20 ม. ($y_0 = 2Y_0$)

5. ความยาวช่วงของการโก่งเดาะมีค่าเท่ากับ 55, 60, 65 จนถึง 95 ม. ($L_0, L_1, \dots, L_8$)

โดยกำหนดค่าตัวแปรและค่าคงที่ดังกล่าวข้างต้นในซอฟต์แวร์ MATHCAD [1] ดังแสดงในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 การกำหนดค่าตัวแปรและค่าคงที่ต่างๆ ในซอฟต์แวร์ MATHCAD [1] เพื่อหาค่าแรงวิกฤตที่ความโค้งเริ่มต้นต่างๆ ของท่อที่มีความยาวช่วงของการโก่งเดาะ 55 เมตร ในโหมดที่ 1

Pipeline property:	
Buckling length (L_0)	55 m
Pipe diameter (d_p)	650 mm
Wall thickness (t_p)	15 mm
Cross-sectional area (A_p)	299.2 cm ²
Moment of inertia (I_p)	150,900 cm ⁴
Young's modulus (E)	200,000 MPa
Submerge weight (w)	3.80 kN/m
Initial imperfection (y_0)	0.00m, 0.02m...0.20m
Seabed conditions:	
Coefcient of friction (ϕ)	0.50

จากสมการที่ (8) ให้ $f = \phi w / EI_p$

จากสมการที่ (31) ให้

$$\alpha(n, Y_0) = 4\pi^2 Y_0 / ((nL_0)^2 - (2\pi)^2)$$

จากเทอมซ้ายของสมการที่ (36) ให้

$$f_1(n, Y_0) = (\alpha(n, Y_0)n^4 / f + 1) \tan nL_0/2$$

จากเทอมขวาของสมการที่ (36) ให้ $f_2(n) = nL_0/2$

หลังจากนั้นแล้วก็แก้สมการโดยการทดลองแทนค่า n ในสมการที่ (36) เพื่อหาค่า n ที่ทำให้ทั้งเทอมซ้ายและขวาของสมการที่ (36) มีค่าเท่ากันดังมีขั้นตอนดังนี้

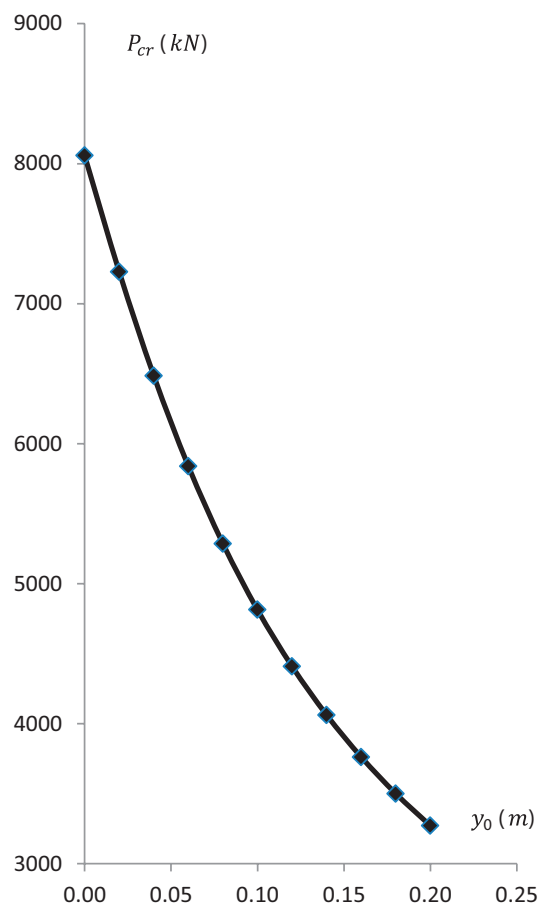
1. กำหนดค่าเริ่มต้น n ให้ $n = 0.16 (1/m)$
2. แทนค่าเริ่มต้น n ในฟังก์ชัน root ของ MATHCAD [1] ดังนี้

$$S(Y_0, n) = \text{root}(f_2(n) - f_1(n, Y_0), n)$$
 ซึ่งฟังก์ชันนี้จะทำการคำนวณวนซ้ำเพื่อหาค่า n ที่ทำให้ $f_2(n) - f_1(n, Y_0) = 0$
3. สามารถหาค่าแรงวิกฤตได้ดังนี้

$$\text{ให้ } n = S(Y_0, n)$$

$$\text{และจาก } P_{cr} = n^2 EI_p$$

จะได้กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงวิกฤตที่หาได้และความโค้งเริ่มต้นต่างๆ ดังรูปที่ 10



รูปที่ 10 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงวิกฤตและความโค้งเริ่มต้นต่างๆของท่อที่มีความยาวช่วงของการโก่งเดาะ 55 เมตร ในโหมดที่ 1

3.4 หาค่าแรงวิกฤตของการโก่งเดาะทางด้านข้างของท่อที่มีความโค้งเริ่มต้นในโหมดที่ 3 โดยใช้ซอฟต์แวร์ MATHCAD [1]

การหาค่าแรงวิกฤตเมื่อท่อมีความโค้งทางด้านข้างเริ่มต้นในโหมดที่ 3 สามารถหาค่าได้โดยการแก้สมการหาค่า n ในสมการที่ (107) โดยการทดลองแทนค่า n โดยใช้ตัวอย่างท่อเหล็กที่มีสมบัติเช่นเดียวกันกับโหมดที่ 1 โดยมีรายละเอียดดังนี้

จากสมการที่ (46) ให้ $f = \delta w / EI_p$

ให้ $k = 2.60$ เมื่อ $L_m = kL$ (ที่มา: Liu, et al. [7])

จากสมการที่ (66) ให้

$$\alpha(n, Y_0) = 4\pi^2 Y_0 / ((nL_0)^2 - (2\pi)^2)$$

จากเทอมขวาของสมการที่ (107) ให้

$$f_1(n, Y_0) = -nA_1(n) \sin nL_0/2 + \\ nA_2(n) \cos nL_0/2 + A(n)L_0 + \\ B(n) - A_3(n, Y_0)$$

จากเทอมซ้ายของสมการที่ (107) ให้

$$f_2(n) = -fL_0/2n^2$$

หลังจากนั้นแล้วก็แก้สมการโดยการทดลองแทนค่า n ในสมการที่ (107) เพื่อหาค่า n ที่ทำให้ทั้งเทอมซ้าย

และขวาของสมการที่ (107) มีค่าเท่ากันดังมีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดค่าเริ่มต้น n ให้ $n = 0.12$ (1/m)

2. แทนค่าเริ่มต้น n ในฟังก์ชัน root ของ MATHCAD [1] ดังนี้

$$S(Y_0, n) = \text{root}(f_2(n) - f_1(n, Y_0), n)$$

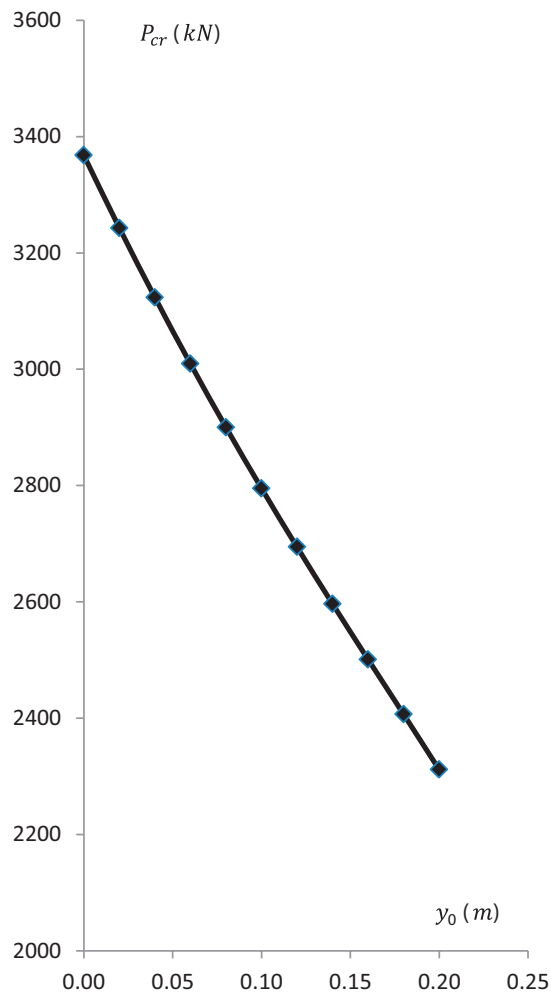
ซึ่งฟังก์ชันนี้จะทำการคำนวณวนซ้ำเพื่อหาค่าที่ทำให้ $f_2(n) - f_1(n, Y_0) = 0$

3. สามารถหาค่าแรงวิกฤตได้ดังนี้

$$\text{ให้ } n = S(Y_0, n)$$

$$\text{และจาก } P_{cr} = n^2 EI_p$$

จะได้กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงวิกฤตที่หาได้และความโค้งงอเริ่มต้นต่างๆ ดังรูปที่ 11



รูปที่ 11 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงวิกฤตและความโค้งงอเริ่มต้นต่างๆ ของท่อที่มีความยาวช่วงของการโก่งเดาะ 55 เมตร ในโหมดที่ 3

3.5 หาค่าแรงวิกฤตของการโก่งเดาะทางด้านข้างของท่อที่มีความโค้งเริ่มต้นในโหมดที่ 1 และ 3 โดยใช้ซอฟต์แวร์ SAP2000 [2]

ในกรณีนี้จะสุ่มเลือกท่อที่มีความยาวช่วงของการโก่งเดาะเท่ากับ 60 ม. มาใช้ในการวิเคราะห์ โดยการแปรเปลี่ยนค่าความโค้งเริ่มต้นเท่ากับ 0.00, 0.02, 0.04 จนถึง 0.20 ม. โดยจะต้องสร้างแบบจำลองไฟไนต์-เอลิเมนต์ของท่อและทำการวิเคราะห์โครงสร้างท่อโดยใช้วิธี Nonlinear Static Analysis (สร้างโมเดลโครงสร้างทั้งหมด 22 โมเดล ตามจำนวนค่าความโค้งเริ่มต้น) โดยมีขั้นตอนการวิเคราะห์โครงสร้างดังนี้

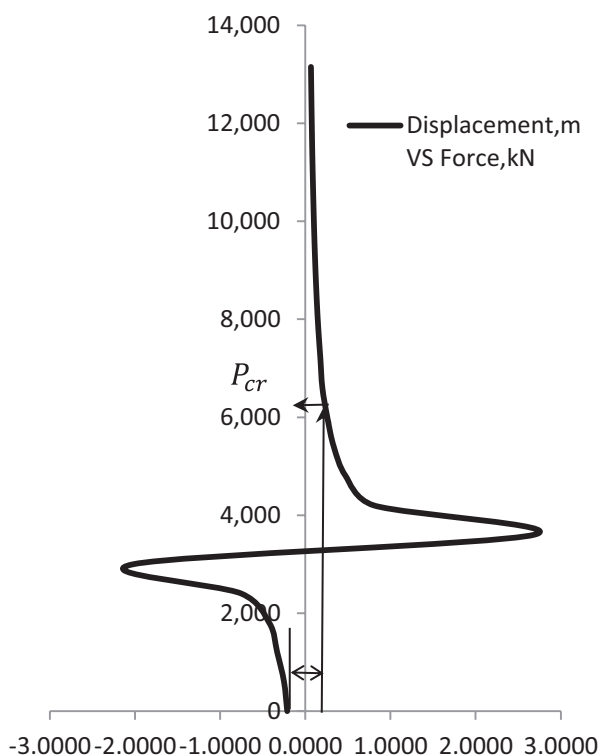
1. สร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของท่อขนส่ง
2. ทำการวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธี Nonlinear Static Analysis ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอนดังนี้

- ทำการวิเคราะห์หาการเสียรูปของท่อเนื่องจากแรงเสียดทานทางด้านข้างที่กระทำต่อท่อโดยใช้วิธี Nonlinear Static Analysis

- นำท่อที่เกิดการเสียรูปแล้วเนื่องจากถูกกระทำด้วยแรงเสียดทานทางด้านข้างไปทำการวิเคราะห์ต่อโดยกำหนดให้มีแรงอัดค่อยๆ เพิ่มขึ้นกระทำกับท่อและวิเคราะห์หาการเสียรูปของท่อโดยใช้วิธี Nonlinear Static Analysis

3. นำค่าการเสียรูปที่จุดกึ่งกลางความยาวท่อและ Reaction ที่ปลายท่อที่ได้จากการวิเคราะห์ ไปหาค่าแรงวิกฤต

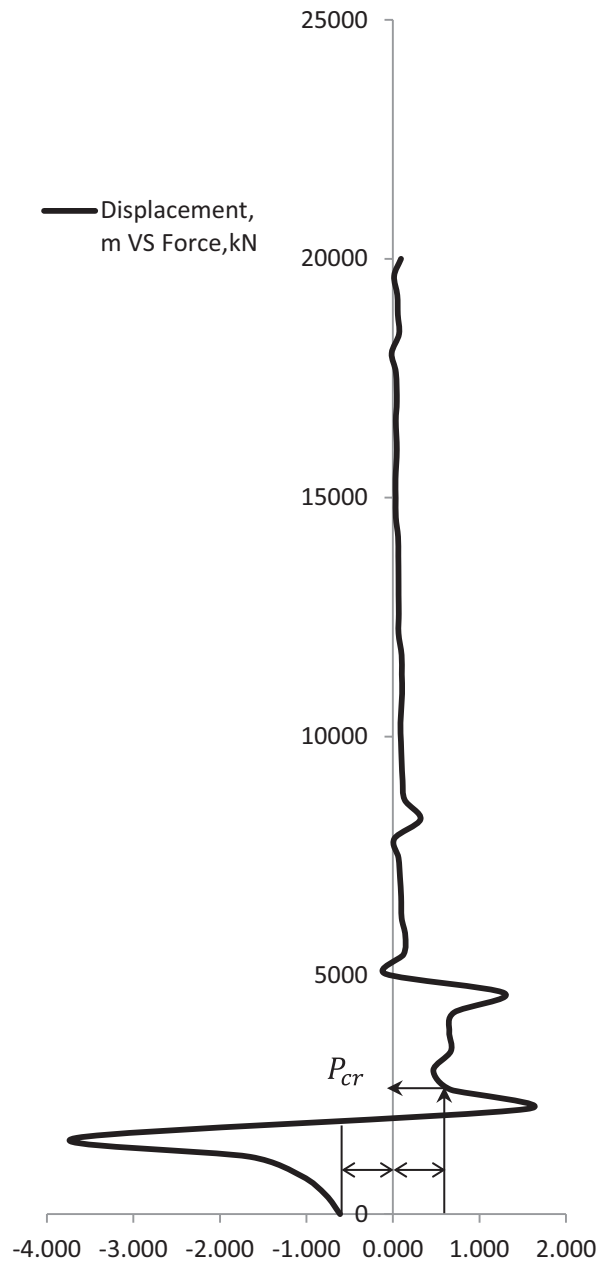
ในที่นี้จะยกตัวอย่างกรณีที่ $y_0 = 0.00$ ม. ดังแสดงในรูปที่ 12 และ 13 ของการโก่งเดาะทางด้านข้างของท่อขนส่งในโหมดที่ 1 และ 3 ตามลำดับ



รูปที่ 12 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าการเสียรูปที่จุดกึ่งกลางความยาวท่อและ Reaction ที่ปลายท่อ และวิธีการหาค่าแรงวิกฤตในโหมดที่ 1 กรณีที่ $y_0 = 0.00$ ม.

จากรูปที่ 12 แรงวิกฤตจะเกิดขึ้นเมื่อการเสียรูปของจุดกึ่งกลางความยาวท่อนมีค่าเท่ากับ 0.212 ม. ซึ่งมี

ขนาดเท่ากับค่าการเสียรูปเริ่มต้นคือ -0.212 ม. แต่มีทิศตรงข้าม [4] สามารถหาค่าแรงวิกฤตได้เท่ากับ 6,473 kN



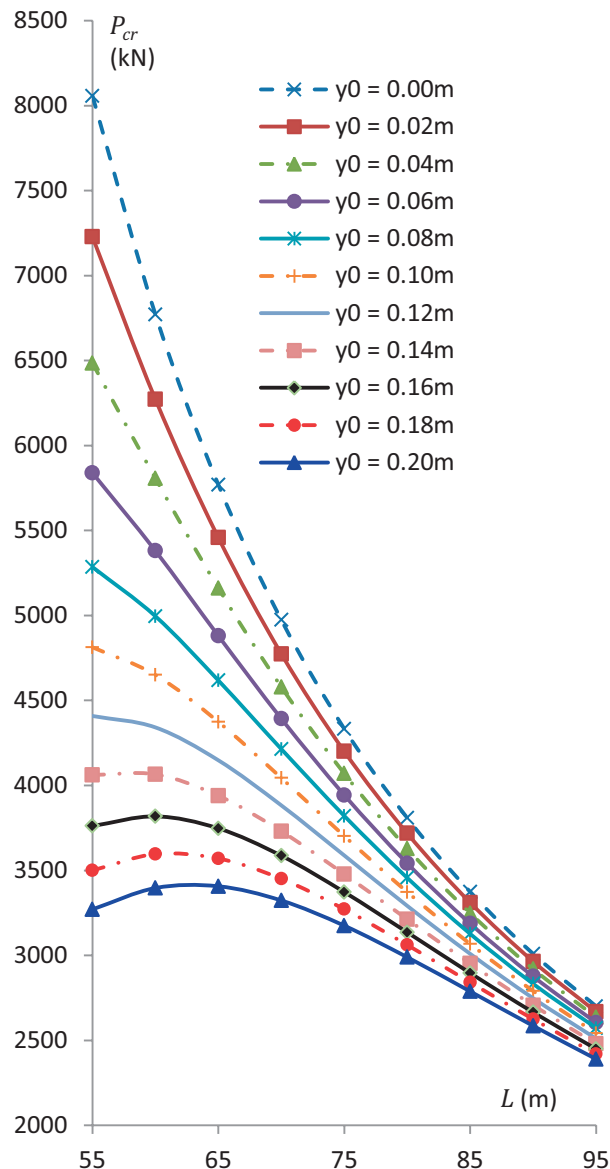
รูปที่ 13 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าการเสียรูปที่จุดกึ่งกลางความยาวท่อนและ Reaction ที่ปลายท่อน และวิธีการหาค่าแรงวิกฤตในโหมดที่ 3 กรณีที่ $y_0 = 0.00$ ม.

จากรูปที่ 13 แรงวิกฤตจะเกิดขึ้นเมื่อการเสียรูปของจุดกึ่งกลางความยาวท่อนี้อาจเท่ากับ 0.611 ม. ซึ่งมีขนาดเท่ากับค่าการเสียรูปเริ่มต้นคือ -0.611 ม. แต่มีทิศตรงข้าม [4] สามารถหาค่าแรงวิกฤตได้เท่ากับ 2,722 kN

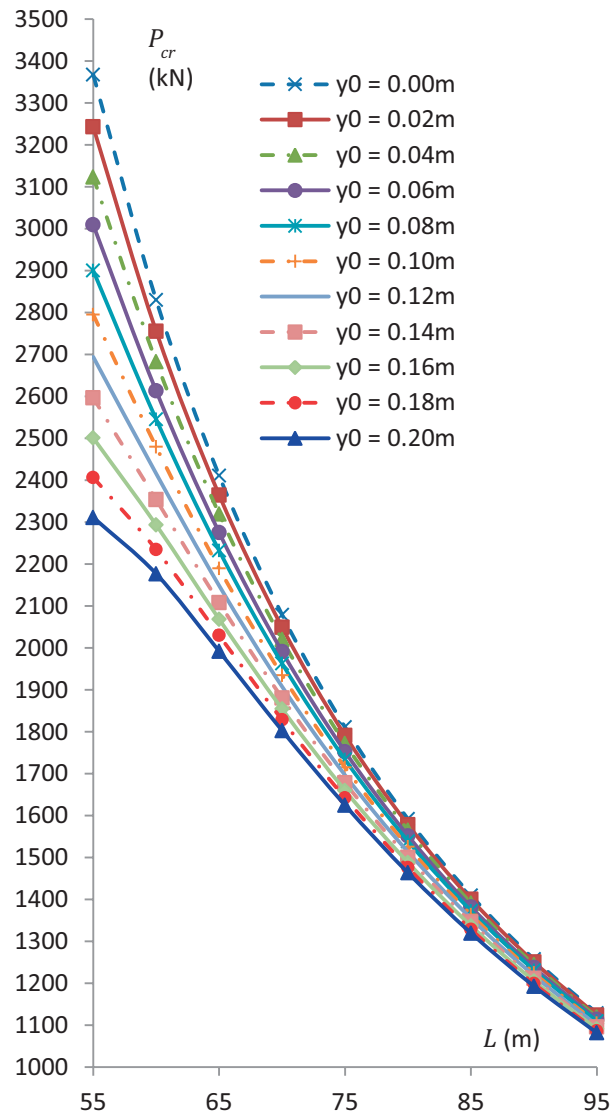
4. ผลการวิจัย

จากกระบวนการและวิธีการวิเคราะห์หาค่าแรงวิกฤตของการโก่งเดาะของท่อนข่ง ดังที่ได้แสดงในตอนต้นนั้น สามารถรวบรวมแสดงผลของการวิจัยได้ดังนี้

4.1 คำตอบที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการโก่งเดาะในโหมดที่ 1& 3 โดยการใช้ซอฟต์แวร์ MATHCAD [1]



รูปที่ 14 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าแรงวิกฤตเมื่อท่อนี้อาจมีความโค้งทางด้านข้างเริ่มต้นที่ค่าต่างๆ กับความยาวของการโก่งเดาะในโหมดที่ 1



รูปที่ 15 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าแรงวิกฤตเมื่อท่อมีความโค้งทางด้านข้างเริ่มต้นที่ค่าต่างๆ กับความยาวของการโก่งเดาะในโหมดที่ 3

จากรูปที่ 14 และ 15 สามารถสรุปได้ดังนี้

1. เมื่อความยาวช่วงของการโก่งเดาะมีค่าน้อย และท่อมีความโค้งเริ่มต้นเพิ่มขึ้น ค่าแรงวิกฤตจะลดน้อยลงมาก ทั้งนี้เป็นผลเนื่องจากอัตราส่วนความโค้งเริ่มต้นต่อความยาวช่วงของการโก่งเดาะ (y_0/L) มีค่าเพิ่มขึ้น
2. เมื่อความยาวช่วงของการโก่งเดาะเพิ่มมากขึ้น และท่อมีความโค้งเริ่มต้นเพิ่มขึ้น ค่าแรงวิกฤตจะลดลง

น้อยกว่าเมื่อเทียบกับความยาวช่วงของการโก่งเดาะที่น้อยกว่า ทั้งนี้เป็นผลเนื่องจากอัตราส่วนความโค้งเริ่มต้นต่อความยาวช่วงของการโก่งเดาะ (y_0/L) มีค่าลดลง

3. แรงวิกฤตของการโก่งเดาะด้านข้างของท่อที่มีความโค้งเริ่มต้นในโหมดที่ 3 มีค่าน้อยกว่าโหมดที่ 1 เนื่องจากแรงต้านหรือแรงเสียดทานด้านข้างในโหมดที่ 3 มีทิศทางตรงข้ามกันดังแสดงในรูปที่ 6 เป็นผลให้ค่าแรงต้านหรือแรงเสียดทานด้านข้างสุทธิของท่อที่เกิดการ

โก่งเดาะในโหมดที่ 3 มีค่าน้อยกว่าโหมดที่ 1 ดังนั้นการโก่งเดาะด้านข้างในโหมดที่ 3 จึงมีโอกาสเกิดขึ้นได้ง่ายกว่าซึ่งผลที่ได้สอดคล้องกับผลการศึกษาของ Hobbs [3] คือโหมดที่ 3 เป็นโหมดที่วิกฤตมากที่สุด

เมื่อเปรียบเทียบผลกระทบจากความโค้งงอเริ่มต้นต่อค่าแรงวิกฤตระหว่างโหมดที่ 1 และโหมดที่ 3 จะเห็นว่าแรงวิกฤตในโหมดที่ 1 มีความไวต่อความโค้งงอเริ่มต้นมากกว่าโหมดที่ 3 โดยเฉพาะในช่วงที่ความยาวช่วงของการโก่งเดาะมีค่าน้อย (55-65 ม.) แต่เมื่อความยาวช่วงของการโก่งเดาะมีค่าเพิ่มขึ้นความโค้งงอเริ่มต้นจะมีผลกระทบต่อแรงวิกฤตทั้งในโหมดที่ 1 และโหมดที่ 3 ลดน้อยลง

4.2 การเปรียบเทียบค่าแรงวิกฤตที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์กับค่าแรงวิกฤตที่ได้จากการวิเคราะห์โดยใช้ซอฟต์แวร์ SAP2000 [2]

ตารางที่ 2 เปรียบเทียบคำตอบที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (MATHCAD [1]) กับคำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์โดยใช้ซอฟต์แวร์ SAP2000 [2] สำหรับการโก่งเดาะด้านข้างเมื่อทอมมีความโค้งงอเริ่มต้น (y_0) ในโหมดที่ 1

y_0 (m)	P_{cr} (kN)			
	Hobbs [3]	MATHCAD [1]	SAP2000 [2]	% ความ แตกต่าง
0.00	6770	6771	6473	4.40
0.02	-	6271	5877	6.28
0.04	-	5806	5531	4.74
0.06	-	5380	5180	3.72
0.08	-	4996	4787	4.18
0.10	-	4650	4561	1.92
0.12	-	4341	4232	2.51
0.14	-	4065	4110	-1.10
0.16	-	3818	3934	-3.03
0.18	-	3596	3593	0.08
0.20	-	3397	3457	-1.77

จากตารางที่ 2 จะเห็นได้ว่าแรงวิกฤตที่หาคำตอบได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (MATHCAD [1]) มีค่าใกล้เคียงกันกับคำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์โดยใช้ซอฟต์แวร์ SAP2000 [2] โดยมีค่าความแตกต่างมากที่สุดเพียง +6.28% และในกรณีที่มีค่าความโค้งงอเริ่มต้นเท่ากับ 0.00 ม. แรงวิกฤตที่หาคำตอบได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ก็มีค่าใกล้เคียงกับค่าแรงวิกฤตโดย Hobbs [3] ($P_{cr} = 80.76EI/L^2$)

ตารางที่ 3 เปรียบเทียบคำตอบที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (MATHCAD [1]) กับคำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์โดยใช้ซอฟต์แวร์ SAP2000 [2] สำหรับการโก่งเดาะด้านข้างเมื่อทอมมีความโค้งงอเริ่มต้น (y_0) ในโหมดที่ 3

y_0 (m)	P_{cr} (kN)			
	Hobbs [3]	MATHCAD [1]	SAP2000 [2]	% ความ แตกต่าง
0.00	2855	2830	2722	3.82
0.02	-	2755	2688	2.42
0.04	-	2683	2615	2.52
0.06	-	2613	2607	0.25
0.08	-	2545	2469	3.01
0.10	-	2479	2461	0.73
0.12	-	2416	2454	-1.57
0.14	-	2354	2383	-1.25
0.16	-	2293	2346	-2.29
0.18	-	2234	2334	-4.47
0.20	-	2177	2325	-6.81

จากตารางที่ 3 จะเห็นได้ว่าแรงวิกฤตที่หาคำตอบได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (MATHCAD [1]) มีค่าใกล้เคียงกันกับคำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์โดยใช้ซอฟต์แวร์ SAP2000 [2] โดยมีค่าความแตกต่างมากที่สุดเพียง -6.81% และในกรณีที่มีค่าความโค้งงอเริ่มต้นเท่ากับ 0.00 ม. แรงวิกฤตที่หาคำตอบได้จากแบบ

จำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีค่าใกล้เคียงกับค่าแรงวิกฤตโดย
Hobbs [3] ($P_{cr} = 34.06EI/L^2$)

4.3 การเปรียบเทียบค่าแรงวิกฤตที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทานมีค่าแปรเปลี่ยน

ตารางที่ 4 เปรียบเทียบค่าแรงวิกฤตเมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทาน (ϕ) มีค่าแปรเปลี่ยน สำหรับการโก่งเดาะด้านข้างเมื่อท่อดึงมีความโค้งงอเริ่มต้น (y_0) และมีความยาวช่วงของการโก่งเดาะ 55 เมตรในโหมดที่ 1

y_0 (m)	P_{cr} (kN)			
	$\phi = 0.40$	$\phi = 0.50$	$\phi = 0.60$	$\phi = 0.70$
0.00	8058	8058	8058	8058
0.02	7033	7228	7361	7457
0.04	6150	6485	6722	6897
0.06	5415	5839	6150	6386
0.08	4813	5285	5644	5925
0.10	4317	4813	5201	5512
0.12	3906	4409	4813	5143
0.14	3562	4062	4472	4813
0.16	3271	3761	4172	4518
0.18	3022	3500	3906	4254
0.20	2807	3271	3670	4016

ตารางที่ 5 เปรียบเทียบค่าแรงวิกฤตเมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทาน (ϕ) มีค่าแปรเปลี่ยน สำหรับการโก่งเดาะด้านข้างเมื่อท่อดึงมีความโค้งงอเริ่มต้น (y_0) และมีความยาวช่วงของการโก่งเดาะ 55 เมตรในโหมดที่ 3

y_0 (m)	P_{cr} (kN)			
	$\phi = 0.40$	$\phi = 0.50$	$\phi = 0.60$	$\phi = 0.70$
0.00	3368	3368	3368	3368
0.02	3212	3243	3263	3278
0.04	3066	3123	3163	3191
0.06	2927	3009	3066	3107
0.08	2795	2900	2972	3025
0.10	2669	2795	2882	2946
0.12	2548	2694	2795	2870
0.14	2430	2596	2711	2795
0.16	2311	2501	2629	2723
0.18	2184	2407	2548	2652
0.20	1950	2311	2469	2583

จากตารางที่ 4 และ 5 จะเห็นได้ว่าแรงวิกฤตของการโก่งเดาะด้านข้างเมื่อท่อมีความโค้งงอเริ่มต้น จะมีค่าเพิ่มมากขึ้นเมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทานเพิ่มขึ้น แต่ในกรณีที่เป้นท่อตรง นั้น ค่าแรงวิกฤตของการโก่งเดาะด้านข้างไม่ได้แปรผันหรือขึ้นตรงกับค่าสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทานซึ่งจะเห็นได้ชัดเจนดังที่ได้แสดงไว้ในสมการที่ (36) และ (37)

5. บทสรุป

เพื่อหาค่าแรงอัดที่ทำให้ท่อเกิดการโก่งเดาะทางด้านข้าง โดยพิจารณาท่อที่มีความโค้งงอเริ่มต้นและวางตัวบนพื้นทะเลที่ราบเรียบ ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการโก่งเดาะจึงถูกสร้างขึ้น โดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้เป็นสมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 2 ของการเสียรูปทางด้านข้างของท่อเมื่อท่อเกิดการโก่งเดาะและทำการหาคำตอบของสมการอนุพันธ์ซึ่งก็คือสมการของการเสียรูปทางด้านข้างของท่อนั้นเอง หลังจากนั้นสามารถวิเคราะห์หาคำตอบแบบแม่นยำตรงของแรงวิกฤตได้โดยการใช้เงื่อนไขขอบเขตของการเสียรูปทางด้านข้างของท่อพร้อมทั้งหาคำตอบเชิงตัวเลขของแรงวิกฤตได้โดยการใช้ซอฟต์แวร์ MATHCAD [1] เพื่อตรวจสอบคำตอบที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซอฟต์แวร์วิเคราะห์โครงสร้าง SAP2000 [2] ได้ถูกนำมาใช้ในการสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของท่อและทำการวิเคราะห์โครงสร้างท่อโดยใช้วิธี Nonlinear Static Analysis จากผลการวิเคราะห์หาค่าแรงวิกฤตของการโก่งเดาะทางด้านข้างของท่อเมื่อท่อมีความโค้งงอเริ่มต้นในโหมดที่ 1 และ 3 นั้น สามารถสรุปผลได้ว่าค่าความโค้งงอเริ่มต้นของท่อที่มีความสัมพันธ์เชิงผกผันกับค่าแรงวิกฤต กล่าวคือเมื่อท่อมีค่าความโค้งงอเริ่มต้นเพิ่มขึ้นค่าแรงวิกฤตจะลดลงนั่นเอง โดยจะสังเกตได้ชัดเจนว่าแรงวิกฤตมีความไวต่อความโค้งงอเริ่มต้นในช่วงที่อัตราส่วนของความโค้งงอเริ่มต้นต่อความยาวช่วงของการโก่งเดาะมีค่ามาก นอกจากนี้

แล้วค่าแรงวิกฤตที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (MATHCAD [1]) และแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ (SAP2000 [2]) มีความแตกต่างกันมากที่สุดเพียง 6.81% ซึ่งทำให้สรุปได้ว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นนั้นมีความเหมาะสมกับการนำมาวิเคราะห์ปัญหาการโก่งเดาะทางด้านข้างของท่อเมื่อท่อมีความโค้งงอเริ่มต้นและค่าแรงวิกฤตที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ก็มีความถูกต้องเพียงพอ

6. เอกสารอ้างอิง

1. MATHCAD-Engineering Calculations Software, 2010, Parametric Technology Corporation, 140 Kendrick Street, Needham, MA 02494 USA.
2. SAP2000-Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures, 1996, Computers and Structures, Berkeley, California.
3. Hobbs, R.E., 1984, "In-Service Buckling of Heated Pipelines," *ASCE Journal of Transportation Engineering*, 110, pp. 175-189.
4. Croll, J.A.G., 1997, "A Simplified Model of Upheaval Thermal Buckling of Subsea Pipelines," *Thin-Walled Structures*, 29 (1-4), pp. 59-78.
5. Peek, R., 2009, "Correction to the Infinite Mode for Lateral Buckling of Pipelines," *ASCE Journal of Transportation Engineering*, 135 (9), pp. 668-669.
6. Bruton, D. and Carr, M., 2010, "JIP Addresses Fatigue/Buckling for Deepwater HP/HT Pipelines," *Offshore*, 70 (6), pp. 74-75.
7. Liu, R., Liu, W., Wu, X. and Yan, S., 2014, "Global Lateral Buckling Analysis of Idealized Subsea Pipelines," *Journal of Central South University*, 21 (1), pp. 416-427.

