

การประยุกต์ใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์สำหรับศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะ ของเสายื่นภายใต้แรงกระทำที่ปลาย

สุรัชย์ ทรัพย์เพิ่ม¹ และ บุญชัย ผึ้งไผ่งาม^{2*}

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ถ.รังสิต-นครนายก (คลองหก) อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12110

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอผลเฉลยโดยประมาณในรูปแบบปิดของเสายื่นที่อยู่ภายใต้แรงกระทำแบบจุดที่ปลายเสา ซึ่งได้คำนึงถึงความไร้เชิงเส้นทางเรขาคณิตอันเนื่องมาจากการโก่งตัวมากของเสา สมการครอบคลุมปัญหาเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบไร้เชิงเส้นซึ่งสร้างขึ้นโดยอาศัยสมการสมดุล ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และความโค้ง และความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต ระบบสมการอนุพันธ์สามารถจัดให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันแปลงได้โดยใช้วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ หลังจากนั้นสามารถแสดงสมการของมุมลาดเอียง การเคลื่อนตัวในแนวราบ และการเคลื่อนตัวในแนวตั้งได้โดยอาศัยกระบวนการผกผันของการแปลงฟังก์ชัน ผลเฉลยของปัญหาสามารถคำนวณได้โดยการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา โดยจากการคำนวณซึ่งควบคุมให้มีค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่า 10^{-10} พบว่าปัจจัยที่มีผลกระทบต่อค่าความถูกต้องมีอยู่ด้วยกันสองปัจจัย คือ จำนวนเทอมที่ใช้ในการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน sine และ cosine และจำนวนเทอมที่ใช้ในการคำนวณด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ ซึ่งในบทความนี้ได้ใช้จำนวนเทอมในการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์สำหรับฟังก์ชัน sine และ cosine จำนวน 3 เทอม และใช้จำนวนเทอมในการคำนวณด้วยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์จำนวน 17 เทอม การใช้วิธีการดังกล่าวทำให้สามารถแสดงสมการที่ใช้อธิบายรูปร่างสมดุลของเสายื่นในรูปแบบปิดอย่างง่ายได้ และพบว่าผลการคำนวณโดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ให้ผลสอดคล้องกันเป็นอย่างดีเมื่อเปรียบเทียบกับผลการคำนวณโดยใช้วิธีการยิงเป้า และวิธีอีลิปติกอินทิกรัล เมื่อมุมที่ปลายเสาอยู่ในช่วงระหว่าง 0 ถึง 100 องศา

คำสำคัญ : การแปลงเชิงอนุพันธ์ / เสายื่น / การโก่งตัวมาก / หลังการโก่งเดาะ

* Corresponding Author : boonchai_p@rmutt.ac.th

¹ นักศึกษาระดับปริญญาโท ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์

² อาจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์

Application of Differential Transformation Method to Study Postbuckling Behavior of Cantilever Column under End Loading

Surachai Supperm¹ and Boonchai Phungpaingam^{2*}

Rajamangala University of Technology Thanyaburi, Rangsit-Nakhonnayok Rd. (Klong6),
Thanyaburi, Pathum Thani 12110

Abstract

This paper presents approximate closed-form solutions of a problem dealing with cantilever column subjected to a concentrated load at the tip where the geometric nonlinearity due to the large deflection is taken into account. A set of nonlinear governing differential equations is formulated from equilibrium equations, moment-curvature relation, and geometric relations. The differential transformation method (DTM) is employed to transform the differential equations into transformed functions. Afterwards, the expressions for the slope, horizontal displacement, and vertical displacement can be obtained by using the inverse process of the transformation. The results of the problems can be computed by imposing the boundary conditions. From the computation by controlling the relative error $\leq 10^{-10}$, there are 2 factors that affect the accuracy of the results. One is the number of the considered terms in the Taylor's series of sine and cosine functions. The others is the number of terms used in the DTM. In this paper, the first three terms in the Taylor's series of functions sine and cosine are taken into account while 17 terms are used in the calculation by DTM. By using this approach, it is possible to derive simple expressions to describe the equilibrium configurations of the column. Ranging from 0° to 100° of the end slope, the results from DTM are in good agreement with those obtained from the shooting method and elliptic integral method.

Keywords : Differential Transformation Method / Cantilever Column / Large Deflection / Postbuckling

* Corresponding Author : boonchai__p@rmutt.ac.th

¹ Master of Engineering Student, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering.

² Lecturer, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering.

1. บทนำ

พฤติกรรมการแอ่นตัวมากของโครงสร้างที่มีความขรุขระมาก จัดเป็นปัญหาที่มีสมการครอบคลุมปัญหาอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบไร้เชิงเส้น ซึ่งมีการศึกษาเพื่อนำไปใช้ในการแก้ไขปัญหาที่โครงสร้างสามารถแอ่นตัวได้มาก อาทิเช่น การศึกษาสภาวะสมดุลของสายยืดโยงใต้ทะเลที่มีอิทธิพลมาจากกระแสและน้ำหนักของตัวเอง [1] การศึกษาแรงดึงวิกฤตที่ปลายด้านบนของท่อลำเสียงของไหลในทะเลลึก [2] และเมื่อโครงสร้างขรุขระที่อยู่ภายใต้แรงอัด ซึ่งส่วนใหญ่จะพบกับปัญหาเกี่ยวกับการโก่งเดาะ นอกจากนี้พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะเป็นสิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาเช่นกัน อาทิเช่น การศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสายืดหยุ่น [3, 4] ซึ่งได้ศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสาที่มีจุดรองรับแบบยืดหยุ่นทั้งสองด้านโดยวิธีอิลิปติกอินทิกรัล [3] และเสาที่มีจุดรองรับแบบสปริงหยุ่นทั้งสองด้านโดยวิธียิงเป้า [4] จากงานวิจัยที่ผ่านมาหลายวิธีที่สามารถวิเคราะห์หาผลเฉลยได้ ที่พบได้บ่อยมีอยู่ด้วยกัน 3 วิธีด้วยกันคือ วิธีอิลิปติกอินทิกรัล [3] วิธียิงเป้า [2, 4] และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [2, 5] โดยที่วิธีอิลิปติกอินทิกรัลเป็นวิธีที่ให้ผลแบบแม่นยำในรูปแบบปิด แต่อย่างไรก็ตามมีข้อจำกัดบางอย่างที่ทำให้ไม่สามารถใช้วิธีอิลิปติกอินทิกรัลได้ เช่น ในกรณีที่มีน้ำหนักบรรทุกแบบแผ่กระจายกระทำกับโครงสร้าง นอกจากนั้นผลเฉลยในรูปของอิลิปติกอินทิกรัลนั้นจำเป็นต้องใช้ฟังก์ชันพิเศษ (อิลิปติกฟังก์ชัน) ซึ่งอาจไม่สะดวกในการนำไปใช้งาน ในขณะที่หากไม่สามารถใช้วิธีอิลิปติกอินทิกรัลในการแก้ไขปัญหายังคงมีวิธีการเชิงตัวเลขที่นิยมใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาแบบค่าขอบเขตสองจุด (Two-point boundary value problem) คือวิธียิงเป้า และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ มีงานวิจัยอีกจำนวนหนึ่งได้นำเสนอวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของโครงสร้างเสา-คาน ด้วยวิธีการประมาณค่าจากผลการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ที่จัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังหรือโพลีโนเมียล [6-8] ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้อยู่ในรูปของผลเฉลยโดยประมาณในรูปแบบปิด โดยค่าความถูกต้องของผลเฉลยจะขึ้นอยู่กับจำนวนเทอมที่นำมาพิจารณาในการคำนวณ แต่อย่างไรก็ตามวิธีการดังกล่าวยังต้องอาศัยเทคนิคการอินทิเกรตและการดิฟเฟอเรนเชียล นอกจากนี้ในจำนวนวิธีการ

ประมาณค่าคำตอบยังมีอีกวิธีหนึ่งที่น่าสนใจคือ วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential Transformation Method) หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าวิธี DTM มีนักวิจัยจำนวนหนึ่งได้นำวิธีการนี้การศึกษาปัญหาของความถี่ธรรมชาติของคานยื่น [9] และน้ำหนักบรรทุกวิกฤตของเสาในแบบต่างๆ [10-12] และต่อมาได้มีการประยุกต์ใช้วิธี DTM ในศึกษาการโก่งตัวมากของคาน อาทิเช่น งานวิจัยของ Salehi และคณะ [13] ซึ่งได้ศึกษาการแอ่นตัวมากของคานยื่นโดยพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกแบบจุดกับการแอ่นตัวที่ปลายคานยื่น โดยมีการเปรียบเทียบผลกับวิธี Variational Iteration Method

งานวิจัยด้วยวิธี DTM เหล่านี้มีวัตถุประสงค์คล้ายคลึงกันคือการอธิบายพฤติกรรมก่อนและหลังการโก่งเดาะด้วยการแสดงความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปของสมการแบบประมาณในรูปแบบปิดอย่างง่าย ซึ่งมีความสะดวกในการนำไปใช้งาน โดยที่ในงานวิจัยนี้ได้นำวิธี DTM ไปประยุกต์ใช้เพื่อศึกษาปัญหาของการโก่งตัวมากของเสายื่นภายใต้แรงกระทำแบบจุดที่ปลายเสา ซึ่งแบบจำลองของปัญหาในลักษณะดังกล่าวมีการนำไปใช้อย่างแพร่หลายในอุตสาหกรรมชิ้นส่วนอิเล็กทรอนิกส์ขนาดเล็ก อาทิเช่นในส่วนของ Micro-Electromechanical Systems (MEMS) ซึ่งโครงสร้างที่เป็นเสายื่นจะพบได้มากในอุปกรณ์เซนเซอร์ต่างๆ โดยส่วนใหญ่แล้ว อุปกรณ์เซนเซอร์เหล่านี้ใช้สำหรับการตรวจวัดที่ละเอียดอ่อนซึ่งเหมาะกับการใช้ทฤษฎีการแอ่นตัวทั่วไปที่เป็นการแอ่นตัวน้อยได้ แต่ในบางกรณีเช่นอุปกรณ์ในการจับยึดเลนส์ขนาดเล็กในแนวตั้ง ซึ่งทำการศึกษา โดยการนำเสายื่นขนาดเล็ก (Microcantilever) มาประยุกต์ใช้เป็นอุปกรณ์จับยึด ในกรณีนี้เสายื่นสามารถแอ่นตัวได้มากโดยที่มุมที่ปลายเสาสามารถเอียงได้สูงสุดถึง 90 องศา [14] การนำเสนอผลเฉลยโดยประมาณในรูปแบบปิดโดยวิธี DTM นี้จะทำให้การทำนายพฤติกรรมการแอ่นตัวมากและพฤติกรรมภายหลังการโก่งเดาะของเสาเป็นไปได้อย่างสะดวก อันเนื่องมาจากการที่ไม่จำเป็นต้องใช้ฟังก์ชันพิเศษ เช่น อิลิปติกฟังก์ชัน เป็นต้น ในขณะที่ความถูกต้องของผลเฉลยก็ยังคงให้ผลที่ใกล้เคียงกับอิลิปติกอินทิกรัลและวิธียิงเป้า ภายในช่วงของการเคลื่อนตัวโดยวัดจากมุมลาดเอียงที่ปลายที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง 100 องศา ซึ่งเพียงพอต่อการนำไปประยุกต์ใช้ในอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ขนาดเล็ก MEMS [14]

2. สมการการแปลงเชิงอนุพันธ์

วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential Transformation Method) เป็นวิธีการกึ่งวิเคราะห์ (Semi-analytical Method) ที่มีพื้นฐานมาจากอนุกรมเทย์เลอร์ ใช้การแปลงส่วนของสมการเชิงอนุพันธ์เป็นฟังก์ชันขยายของอนุกรม จัดอยู่ในรูปของสมการพีชคณิต ที่อาศัยเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาในการสร้างระบบสมการเพื่อหาผลเฉลยของคำตอบ ประโยชน์ที่ได้รับจากการใช้กระบวนการนี้คือสามารถหาผลเฉลยโดยประมาณในรูปแบบปิด (Approximate Closed-form Solution) ของปัญหาได้ วิธี DTM ถูกนำเสนอครั้งแรกโดย Pukhov [15] ชาวรัสเซีย ในปี 1982 ศึกษาเกี่ยวกับด้านวงจรไฟฟ้า ต่อมาในปี 1986 นักวิจัยชาวจีน Zhou [16] ได้นำมาศึกษาปัญหาด้านวงจรไฟฟ้าแบบไร้เชิงเส้นที่มีสมการอยู่ในรูปของอนุพันธ์ย่อย หลังจากนั้นก็มีผู้นำวิธี DTM มาประยุกต์ใช้ในสาขาอื่นๆ อีกเช่น ปัญหาด้านการถ่ายเทความร้อน [17-19] ซึ่งพบว่าเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมาก โดยให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลโดยวิธีแม่นยำ นอกเหนือจากนั้นวิธี DTM ยังนำไปประยุกต์ใช้ได้กับปัญหาด้านเสถียรภาพของชิ้นส่วนเสาและคาน [10-13] และปัญหาด้านการสั่นสะเทือนของคาน [9, 20] เป็นต้น ซึ่งพื้นฐานวิธี DTM เริ่มต้นจากฟังก์ชันการประมาณค่าของอนุกรมเทย์เลอร์ดังต่อไปนี้

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (1)$$

ถ้า $x_0 = 0$ อนุกรมเทย์เลอร์ในสมการที่ (1) จะเรียกว่าอนุกรมแมคลอริน ดังแสดงในสมการที่ (2)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (2)$$

เมื่อกำหนดให้

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (3)$$

และจะเรียก $F(k)$ ว่าเป็นฟังก์ชันแปลง (Transformed Function) ดังนั้นสมการที่ (2) สามารถเขียนใหม่ได้ในรูปต่อไปนี้

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k F(k) \quad (4)$$

สมการที่ (4) แสดงการผกผันของฟังก์ชัน $F(k)$ ใดๆ โดยการใช้วิธี DTM สามารถหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ได้โดยไม่ต้องอาศัยเทคนิคการอินทิเกรต และสามารถให้คำตอบแบบประมาณในรูปแบบปิดได้ ซึ่งการแปลงฟังก์ชันพื้นฐานจะดำเนินการตามหลักการทางคณิตศาสตร์และสามารถสรุปได้ดังตารางที่ 1

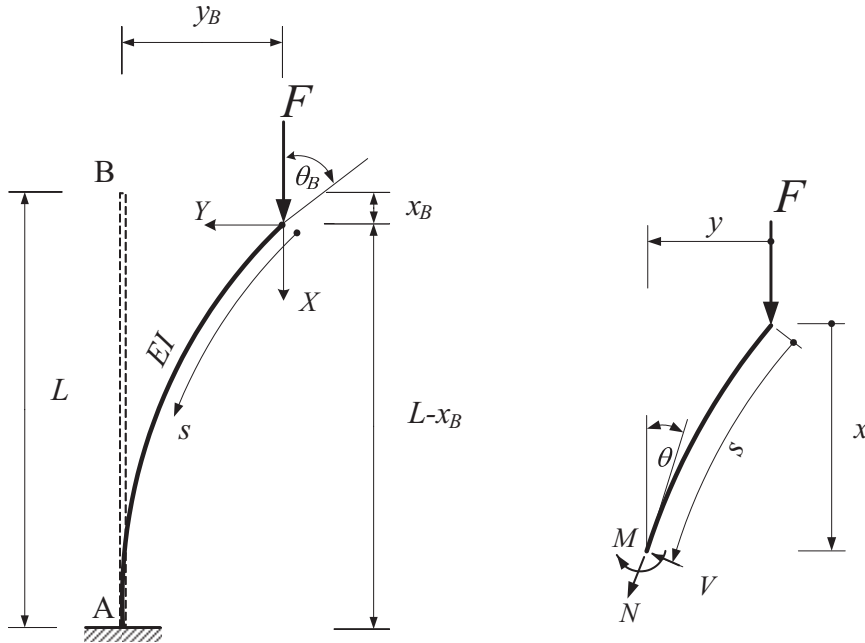
ตารางที่ 1 แสดงการแปลงฟังก์ชัน

Original function	Transformed function
$f(x) = g(x) \mp h(x)$	$F(k) = G(k) \mp H(k)$
$f(x) = \alpha g(x)$	$F(k) = \alpha G(k), \alpha \in \mathbb{R}$
$f(x) = g(x)h(x)$	$F(k) = \sum_{l=0}^k G(l)H(k-l)$
$f(x) = \frac{d}{dx} g(x)$	$F(k) = (k+1)G(k+1)$
$f(x) = \frac{d^2}{dx^2} g(x)$	$F(k) = (k+1)(k+2)G(k+2)$
$f(x) = \frac{d^n}{dx^n} g(x)$	$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} G(k+n)$
$f(x) = x^n$	$F(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 0, & \text{if } k \neq n \\ 1, & \text{if } k = n \end{cases}$
$f(x) = f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$	$F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} F_1(k_1)F_2(k_2-k_1) \dots F_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})F_n(k-k_{n-1})$

3. ลักษณะปัญหาและสมการครอบคลุมปัญหา

จากรูปที่ 1 ก) พิจารณาเสาเอ็นที่มีขนาดสม่ำเสมอยาว L มีค่าความแข็งแกร่งต่อการดัดเท่ากับ EI ที่ปลายเสาด้าน A ถูกยึดตรึงเข้ากับจุดรองรับที่ฐานซึ่งเป็นจุดรองรับแบบ

ยึดแน่น และที่ปลายเสาด้าน B เป็นปลายอิสระมีแรงอัดในแนวตั้ง F มากกระทำซึ่งทำให้เสามีโอกาสเกิดการโก่งเดาะได้ เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตและความสัมพันธ์ของโมเมนต์ของชิ้นส่วนย่อยเสา ดังแสดงในรูปที่ 1 ข) จะได้สมการดังนี้



ก) รูปร่างของเสาเอ็นก่อน (เส้นประ) และหลังการเสียรูป (เส้นทึบ)

ข) ชิ้นส่วนย่อยของเสา

รูปที่ 1 เสาเอ็นที่มีแรงกระทำที่ปลาย

$$M = -Fy \quad (5)$$

เมื่อ M คือ โมเมนต์ดัด

F คือ แรงกระทำที่ปลาย

L คือ ช่วงความยาวเสา

x_B คือ ระยะจากจุด B ถึงแรงกระทำที่ปลาย ในแกน X

y_B คือ ระยะจากจุด B ถึงแรงกระทำที่ปลาย ในแกน Y

x คือ ระยะจากแรงกระทำที่ปลายถึงตำแหน่งใดๆ ในแกน X

y คือ ระยะจากแรงกระทำที่ปลายถึงตำแหน่งใดๆ ในแกน Y

θ คือ ค่ามุมลาดเอียง ณ ตำแหน่งใดๆ ตามความยาวส่วนโค้ง s

ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งตามทฤษฎีคานของออย์เลอร์-แบร์นูลลี (Euler-Bernoulli Beam Theory) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI} = \frac{-Fy}{EI} \quad (6)$$

ทำการดิฟเฟอเรนเชียลสมการที่ (6) เทียบตัวแปร s ตลอดความยาวเสา จะได้

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \mu \frac{dy}{ds} = 0 \quad (7)$$

เมื่อ

$$\mu = \frac{F}{EI} \quad (8)$$

และจากความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของชิ้นส่วนย่อยเสา ซึ่งสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (9)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (10)$$

เพื่อให้สามารถเขียนสมการต่างๆ ให้อยู่ในรูปทั่วไป ซึ่งง่ายต่อการคำนวณจำเป็นต้องทำการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปไร้หน่วยเสียก่อนดังนั้นสมการที่ (7), (9), (10) จะเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \bar{\mu} \sin \theta = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \cos \theta \quad (12)$$

$$\frac{d\bar{y}}{ds} = \sin \theta \quad (13)$$

เมื่อ

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{L}, \bar{s} = \frac{s}{L}, \bar{\mu} = \mu L^2 \quad (14a-d)$$

สำหรับฟังก์ชัน sine และ cosine เมื่อทำการแปลงให้อยู่ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์จำนวน 3 เทอม ซึ่งครอบคลุมพฤติกรรมการไร้เชิงเส้นในช่วงเริ่มต้นได้ดี การพิจารณาใช้จำนวนเทอมที่มากกว่า 3 เทอมอาจทำได้และให้ผลเฉลยที่ถูกต้องมากยิ่งขึ้น แต่ต้องคำนึงถึงภาระในการคำนวณที่จะมากขึ้นตามจำนวนเทอมที่เพิ่มขึ้น ในงานวิจัยนี้ได้เลือก

ใช้การกระจายอนุกรมของฟังก์ชัน sine และ cosine จำนวน 3 เทอมซึ่งมีความเหมาะสมในการครอบคลุมพฤติกรรมการไร้เชิงเส้นของเสายึดได้ในระดับหนึ่ง และมีภาระในการคำนวณที่ไม่มากเกินไป ดังนั้น สมการที่ (11)-(13) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \bar{\mu} \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \right) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \quad (16)$$

$$\frac{d\bar{y}}{ds} = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \quad (17)$$

ในการหาผลเฉลยของคำตอบนอกเหนือไปจากสมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายการโก่งเดาะของเสาแล้วยังต้องอาศัยเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ดังนี้

$$\theta(\bar{s}=0) = \theta_B; \theta'(\bar{s}=0) = 0; \quad (18a-b)$$

$$\bar{x}(\bar{s}=0) = 0; \bar{y}(\bar{s}=0) = 0; \quad (18c-d)$$

$$\theta(\bar{s}=1) = 0; \bar{x}(\bar{s}=1) = 1 - \bar{x}_B; \quad (19a-b)$$

$$\bar{y}(\bar{s}=1) = \bar{y}_B \quad (19c)$$

โดยในการคำนวณจะกำหนดให้ $C_1 = \theta_B$, $C_2 = \bar{x}_B$ และ $C_3 = -\bar{y}_B$

4. วิธีการคำนวณ

4.1 การแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยวิธี DTM

จากสมการที่ (15)-(17) โดยอาศัยตารางการแปลงเชิงอนุพันธ์ในตารางที่ 1 สมการที่ (15) (16) และ (17) สามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันแปลงตามลำดับได้ดังนี้

$$\Theta(k+2) = \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[\begin{aligned} & -\bar{\mu} \Theta(k) + \frac{\bar{\mu}}{3!} \left(\sum_{k_1=0}^k \Theta(k-k_1) \left(\sum_{k_2=0}^{k_1} \Theta(k_1-k_2) \Theta(k_2) \right) \right) \\ & - \frac{\bar{\mu}}{5!} \left(\sum_{k_1=0}^k \Theta(k-k_1) \left(\sum_{k_2=0}^{k_1} \Theta(k_1-k_2) \left(\sum_{k_3=0}^{k_2} \Theta(k_2-k_3) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left(\sum_{k_4=0}^{k_3} \Theta(k_3-k_4) \Theta(k_4) \right) \right) \right) \right) \end{aligned} \right] \quad (20)$$

$$X(k+1) = \frac{1}{(k+1)} \left[\begin{aligned} & \delta(k) - \frac{1}{2!} \left(\sum_{k_1=0}^k \Theta(k-k_1) \Theta(k_1) \right) \\ & + \frac{1}{4!} \left(\sum_{k_1=0}^k \Theta(k-k_1) \left(\sum_{k_2=0}^{k_1} \Theta(k_1-k_2) \left(\sum_{k_3=0}^{k_2} \Theta(k_2-k_3) \Theta(k_3) \right) \right) \right) \end{aligned} \right] \quad (21)$$

$$Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)} \left[\begin{aligned} & \Theta(k) - \frac{1}{3!} \left(\sum_{k_1=0}^k \Theta(k-k_1) \left(\sum_{k_2=0}^{k_1} \Theta(k_1-k_2) \Theta(k_2) \right) \right) \\ & + \frac{1}{5!} \left(\sum_{k_1=0}^k \Theta(k-k_1) \left(\sum_{k_2=0}^{k_1} \Theta(k_1-k_2) \left(\sum_{k_3=0}^{k_2} \Theta(k_2-k_3) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left(\sum_{k_4=0}^{k_3} \Theta(k_3-k_4) \Theta(k_4) \right) \right) \right) \right) \end{aligned} \right] \quad (22)$$

โดยที่ $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n_k$ เมื่อ $k = 0$; $F(0) = f(x)|_{x=0}$ (26a)

$k_1 = 0, 1, 2, 3, \dots, k$

$k_{2,3,4} = 0, 1, 2, 3, \dots, k_{1,2,3}$

$n_k =$ จำนวนเทอมของฟังก์ชันแปลงในวิธี

$k = 1$; $F(1) = \frac{df(x)}{dx}|_{x=0}$ (26b)

DTM

$\Theta(k+2) =$ ฟังก์ชันแปลงมุลลาดเอียงในลำดับเทอมที่ $k+2$

$X(k+1) =$ ฟังก์ชันแปลงระยะเคลื่อนตัวทางแกน X ในลำดับเทอมที่ $k+1$

$Y(k+1) =$ ฟังก์ชันแปลงระยะเคลื่อนตัวทางแกน Y ในลำดับเทอมที่ $k+1$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตในสมการที่ (19) สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันแปลงได้เช่นกัน โดยสมการที่ (19a,b,c) สามารถเขียนใหม่ตามลำดับได้ดังนี้

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Theta(k) = 0 \quad (23)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} X(k) = 1 - \bar{x}_B \quad (24)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} Y(k) = \bar{y}_B \quad (25)$$

จากสมการที่ (3) สมการฟังก์ชันแปลง $F(k)$ ในลำดับที่ $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n_k$ ใดๆ มีลักษณะดังนี้

ดังนั้นการกระจายเทอมที่ 1 หรือ 2 ของสมการที่ (23)-(25) สามารถเขียนได้โดยอาศัยสมการที่ (26) ดังแสดงต่อไปนี้

สมการมุลลาดเอียง ฟังก์ชันแปลงของมุลลาดเอียง Θ สามารถแสดงได้ โดยมีเทอมที่ 1 และ 2 ได้จากเงื่อนไขขอบเขต (18a-b) คือ

เมื่อ $k = 0$ จะได้

$$\Theta(0) = C_1 = \theta_B \quad (27a)$$

เมื่อ $k = 1$ จะได้

$$\Theta(1) = \frac{d\theta}{d\bar{s}} \Big|_{\bar{s}=0} = 0 \quad (27b)$$

ตั้งแต่เทอมที่ 3 เป็นต้นไปสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (20) ดังนี้

$$\Theta(2) = -\frac{1}{240} \bar{\mu} C_1 (-20C_1^2 + C_1^4 + 120) \quad (27c)$$

$$\Theta(4) = \frac{1}{69120} \bar{\mu}^2 C_1 - 1920 C_1^2 + 384 C_1^4 - 32 C_1^6 + C_1^8 + 2880 \quad (27d)$$

$$\Theta(6) = -\frac{1}{248832000} \bar{\mu}^3 C_1 (-1440000 C_1^2 + 694080 C_1^4 - 140160 C_1^6 + 14520 C_1^8 - 772 C_1^{10} + 17 C_1^{12} + 345600) \quad (27e)$$

เทอมที่เป็นเลขคี่จะมีค่าเป็นศูนย์

สมการระยะเคลื่อนตัวทางแกน X ฟังก์ชันแปลงของระยะเคลื่อนตัวทางแกน X สามารถเขียนได้ โดยเทอมที่ 1 ได้จากเงื่อนไขขอบเขต (18c) คือ เมื่อ $k=0$ จะได้

$$X(0) = 0 \quad (28a)$$

ตั้งแต่เทอมที่ 2 เป็นต้นไปสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (21) ดังนี้

$$X(1) = 1 - \frac{1}{2} C_1^2 + \frac{1}{24} C_1^4 \quad (28b)$$

$$X(3) = \frac{1}{6} \bar{\mu} C_1^2 - \frac{1}{18} \bar{\mu} C_1^4 + \frac{13}{2160} \bar{\mu} C_1^6 - \frac{1}{4320} \bar{\mu} C_1^8 \quad (28c)$$

$$X(5) = -\frac{1}{30} \bar{\mu}^2 C_1^2 + \frac{1}{36} \bar{\mu}^2 C_1^4 - \frac{79}{10800} \bar{\mu}^2 C_1^6 + \frac{13}{14400} \bar{\mu}^2 C_1^8 - \frac{71}{1296000} \bar{\mu}^2 C_1^{10} + \frac{7}{5184000} \bar{\mu}^2 C_1^{12} \quad (28d)$$

$$X(7) = \frac{1}{315} \bar{\mu}^3 C_1^2 - \frac{59}{7560} \bar{\mu}^3 C_1^4 + \frac{911}{226800} \bar{\mu}^3 C_1^6 - \frac{109}{113400} \bar{\mu}^3 C_1^8 + \frac{697}{5443200} \bar{\mu}^3 C_1^{10} - \frac{359}{36288000} \bar{\mu}^3 C_1^{12} + \frac{137}{326592000} \bar{\mu}^3 C_1^{14} - \frac{1}{130636800} \bar{\mu}^3 C_1^{16} \quad (28e)$$

เทอมที่เป็นเลขคู่จะมีค่าเป็นศูนย์

สมการระยะเคลื่อนตัวทางแกน Y ฟังก์ชันแปลงของระยะเคลื่อนตัวทางแกน Y สามารถเขียนได้โดยเทอมแรกได้จากเงื่อนไขขอบเขต (18d) มีรายละเอียดเทอมต่างๆ ดังนี้ เมื่อ $k=0$ จะได้

$$Y(0) = 0 \quad (29a)$$

ตั้งแต่เทอมที่ 2 เป็นต้นไปสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (22) ดังนี้

$$Y(1) = C_1 - \frac{1}{6} C_1^3 + \frac{1}{120} C_1^5 \quad (29b)$$

$$Y(3) = -\frac{1}{6} \bar{\mu} C_1 + \frac{1}{9} \bar{\mu} C_1^3 - \frac{1}{45} \bar{\mu} C_1^5 + \frac{1}{540} \bar{\mu} C_1^7 - \frac{1}{17280} \bar{\mu} C_1^9 \quad (29c)$$

$$Y(5) = \frac{1}{120} \bar{\mu}^2 C_1 - \frac{5}{144} \bar{\mu}^2 C_1^3 + \frac{241}{14400} \bar{\mu}^2 C_1^5 - \frac{73}{21600} \bar{\mu}^2 C_1^7 + \frac{121}{345600} \bar{\mu}^2 C_1^9 - \frac{193}{10368000} \bar{\mu}^2 C_1^{11} + \frac{17}{41472000} \bar{\mu}^2 C_1^{13} \quad (29d)$$

$$\begin{aligned}
Y(7) = & -\frac{1}{5040} \bar{\mu}^3 C_1 + \frac{13}{1890} \bar{\mu}^3 C_1^3 \\
& -\frac{32}{4725} \bar{\mu}^3 C_1^5 + \frac{11}{4320} \bar{\mu}^3 C_1^7 \\
& -\frac{3673}{7257600} \bar{\mu}^3 C_1^9 + \frac{67}{1134000} \bar{\mu}^3 C_1^{11} \\
& -\frac{1}{243000} \bar{\mu}^3 C_1^{13} \\
& +\frac{209}{1306368000} \bar{\mu}^3 C_1^{15} \\
& -\frac{113}{41803776000} \bar{\mu}^3 C_1^{17} \quad (29e)
\end{aligned}$$

เทอมที่เป็นเลขคู่จะมีค่าเป็นศูนย์

$$\begin{aligned}
& C_1 + \left(-\frac{1}{240} \bar{\mu} C_1 (-20C_1^2 + C_1^4 + 120) \right) \\
& + \left(\frac{1}{69120} \bar{\mu}^2 C_1 (-1920C_1^2 + 384C_1^4 - 32C_1^6 + C_1^8 + 2880) \right) \\
& + \left(-\frac{1}{248832000} \bar{\mu}^3 C_1 \left(-1440000C_1^2 + 694080C_1^4 - 140160C_1^6 + 14520C_1^8 \right) \right. \\
& \quad \left. -772C_1^{10} + 17C_1^{12} + 345600 \right) \\
& + \dots = 0 \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_2 + \left(1 - \frac{1}{2} C_1^2 + \frac{1}{24} C_1^4 \right) \\
& + \left(\frac{1}{6} \bar{\mu} C_1^2 - \frac{1}{18} \bar{\mu} C_1^4 + \frac{13}{2160} \bar{\mu} C_1^6 - \frac{1}{4320} \bar{\mu} C_1^8 \right) \\
& + \left(-\frac{1}{30} \bar{\mu}^2 C_1^2 + \frac{1}{36} \bar{\mu}^2 C_1^4 - \frac{79}{10800} \bar{\mu}^2 C_1^6 + \frac{13}{14400} \bar{\mu}^2 C_1^8 - \frac{71}{1296000} \bar{\mu}^2 C_1^{10} + \frac{7}{5184000} \bar{\mu}^2 C_1^{12} \right) \\
& + \left(\frac{1}{315} \bar{\mu}^3 C_1^2 - \frac{59}{7560} \bar{\mu}^3 C_1^4 + \frac{911}{226800} \bar{\mu}^3 C_1^6 - \frac{109}{113400} \bar{\mu}^3 C_1^8 + \frac{697}{5443200} \bar{\mu}^3 C_1^{10} \right. \\
& \quad \left. -\frac{359}{36288000} \bar{\mu}^3 C_1^{12} + \frac{137}{326592000} \bar{\mu}^3 C_1^{14} - \frac{1}{130636800} \bar{\mu}^3 C_1^{16} \right) \\
& + \dots = 1 \quad (31)
\end{aligned}$$

การศึกษามูลค่าเฉลี่ยของเสายี่นหลังจากเกิดการโค้งเตาะเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกจะอาศัยเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายเสาด้าน A ซึ่งเป็นฐานรองรับแบบยึดแน่น โดยมีค่ามุมลาดเอียงเท่ากับศูนย์ ใช้สมการที่ (23) รวบรวมเทอมต่างๆ จากสมการที่ (27) เข้าด้วยกันดังแสดงในสมการที่ (30)

สำหรับการศึกษาระยะการเคลื่อนตัวทางแกน X ใช้สมการที่ (24) รวบรวมเทอมต่างๆ จากสมการที่ (28) เข้าด้วยกันดังแสดงในสมการที่ (31)

ทำนองเดียวกัน การศึกษาระยะการเคลื่อนตัวทางแกน Y ใช้สมการที่ (25) รวบรวมเทอมต่างๆ จากสมการที่ (29) เข้าด้วยกันดังแสดงในสมการที่ (32)

$$\begin{aligned}
& C_3 + \left(C_1 - \frac{1}{6}C_1^3 + \frac{1}{120}C_1^5 \right) \\
& + \left(-\frac{1}{6}\bar{\mu}C_1 + \frac{1}{9}\bar{\mu}C_1^3 - \frac{1}{45}\bar{\mu}C_1^5 + \frac{1}{540}\bar{\mu}C_1^7 - \frac{1}{17280}\bar{\mu}C_1^9 \right) \\
& + \left(\frac{1}{120}\bar{\mu}^2C_1 - \frac{5}{144}\bar{\mu}^2C_1^3 + \frac{241}{14400}\bar{\mu}^2C_1^5 - \frac{73}{21600}\bar{\mu}^2C_1^7 + \frac{121}{345600}\bar{\mu}^2C_1^9 - \frac{193}{10368000}\bar{\mu}^2C_1^{11} \right) \\
& \quad \left. + \frac{17}{41472000}\bar{\mu}^2C_1^{13} \right) \\
& + \left(-\frac{1}{5040}\bar{\mu}^3C_1 + \frac{13}{1890}\bar{\mu}^3C_1^3 - \frac{32}{4725}\bar{\mu}^3C_1^5 + \frac{11}{4320}\bar{\mu}^3C_1^7 - \frac{3673}{7257600}\bar{\mu}^3C_1^9 + \frac{67}{1134000}\bar{\mu}^3C_1^{11} \right) \\
& \quad \left. + \frac{1}{243000}\bar{\mu}^3C_1^{13} + \frac{209}{1306368000}\bar{\mu}^3C_1^{15} - \frac{113}{41803776000}\bar{\mu}^3C_1^{17} \right) \\
& + \dots = 0 \tag{32}
\end{aligned}$$

4.2 ขั้นตอนการคำนวณ

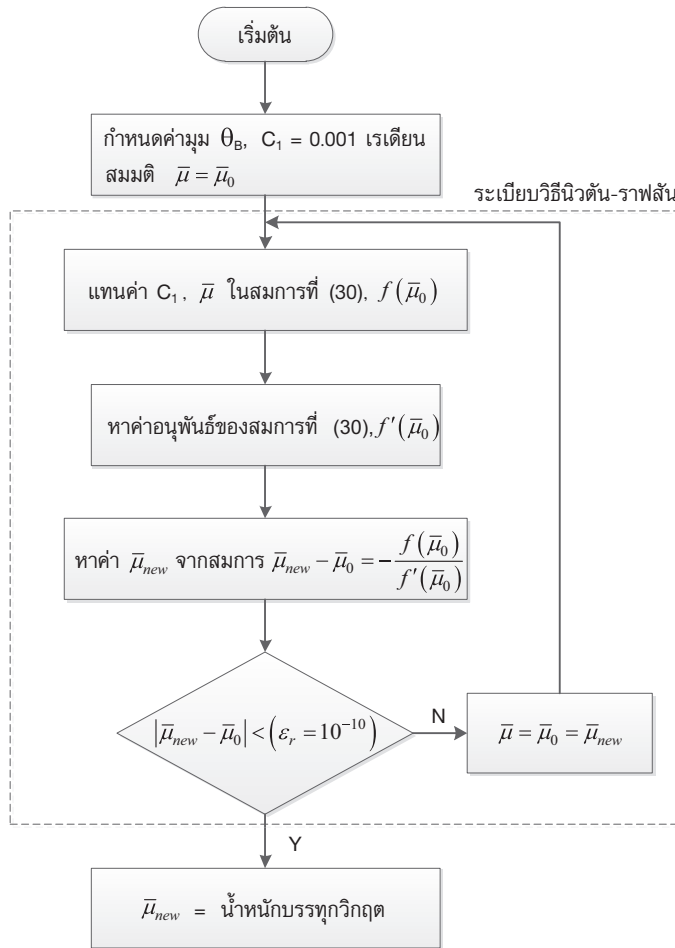
ขั้นตอนและวิธีการคำนวณเพื่อศึกษาตัวแปร ในสมการที่ (30)-(32) โดยใช้ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson) ดังนี้

4.2.1 การคำนวณหาค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต

จากสมการที่ (30) มีตัวแปรไม่ทราบค่า 2 ตัว คือ $\bar{\mu}$ และ C_1 ก่อนการโก่งเดาะของเสา $C_1 = 0$ ในการ

คำนวณเพื่อหาค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตของเสาสามารถกระทำได้โดยการกำหนดค่า C_1 ที่เข้าใกล้ศูนย์ลงในสมการที่ (30)

ในที่นี้กำหนดให้ $C_1 = 0.001$ จากนั้นสมมติค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตเริ่มต้นลงในสมการที่ (30) และใช้ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสันเพื่อปรับแก้ค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต โดยกำหนดให้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ $\varepsilon = 10^{-10}$ แสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 2 แสดงขั้นตอนการคำนวณจำนวนหน้าบรรทุกฤฤฤ

4.2.2 การคำนวณมุมลาดเอียง

กำหนดมุมลาดเอียงที่ปลายเสา C_1 จากนั้นใช้ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน เพื่อคำนวณค่า $\bar{\mu}$ ที่สอดคล้องกัน จากสมการที่ (30) ด้วยจำนวนเทอมของฟังก์ชันแปลงเท่ากับที่ได้จากหัวข้อ 4.2.1 จากนั้นนำค่า $\bar{\mu}$ และ C_1 แทนลงในสมการที่ (27) และรวบรวมเทอมต่างๆ ของฟังก์ชันแปลงโดยใช้การแปลงผกผันในสมการที่ (4) สุดท้ายจะได้สมการมุมลาดเอียงตลอดความยาวเสาที่สอดคล้องกับมุมลาดเอียง C_1

4.2.3 การคำนวณระยะเคลื่อนตัวทางแกน X

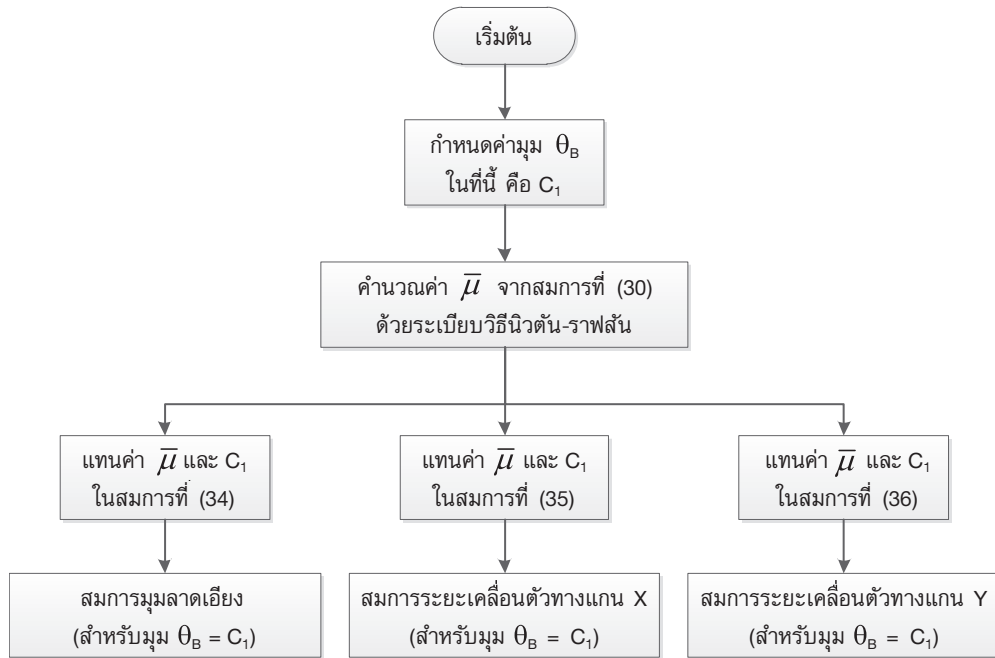
จากผลการคำนวณ $\bar{\mu}$ และ C_1 จากขั้นตอนที่ 4.2.2 สามารถคำนวณค่า C_2 ได้จากสมการที่ (31) และใช้

การแปลงผกผันในสมการที่ (4) รวบรวมเทอมต่างๆ ของฟังก์ชันแปลงในสมการที่ (28) จะได้สมการระยะเคลื่อนตัวทางแกน X ตลอดความยาวเสาเช่นเดียวกัน

4.2.4 การคำนวณระยะเคลื่อนตัวทางแกน Y

จากผลของ $\bar{\mu}$ และ C_1 ในขั้นตอนที่ 4.2.2 จากนั้นแทนลงในสมการที่ (32) จะสามารถคำนวณค่า C_3 ได้ และใช้การแปลงผกผันในสมการที่ (4) รวบรวมเทอมต่างๆ ของฟังก์ชันแปลงในสมการที่ (29) จะได้สมการระยะเคลื่อนตัวทางแกน Y ตลอดความยาวเสาเช่นเดียวกัน

ขั้นตอนการคำนวณแสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3 แสดงขั้นตอนการคำนวณมุมลาดเอียงและระยะเคลื่อนตัว

5. ผลและการวิเคราะห์ผล

5.1 คำนวณน้ำหนักบรรทุกวิกฤตของเสา

ในส่วนของผลและการวิเคราะห์ผลเป็นการนำผลการคำนวณที่ได้จากวิธี DTM ไปทำการเปรียบเทียบ

กับผลคำตอบด้วยวิธีอินทิกรัลอิลิปติกอินทิกรัล (Elliptical Integral Method, EIM) ซึ่งปรากฏอยู่ในตำราของ Timoshenko และ Gere [21] และผลการคำนวณด้วยวิธียิงเป้า (Shooting Method, SM) และได้นำผลมาแสดงไว้ในตารางที่ 2

ตารางที่ 2 เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์น้ำหนักบรรทุกวิกฤตของเสา

Number of terms	$\bar{\mu}$			Relative error
	EIM [21]	SM	DTM ⁽³⁾ (17)	
3			2.0000003333	2.00000E-00
5			2.5358984981	2.67949E-01
7			2.4646046852	2.81138E-02
9			2.4674791152	1.16628E-03
11	2.4674011002	2.4674011005	2.4673999522	3.20825E-05
13			2.4674014281	5.98145E-07
15			2.4674014085	7.92911E-09
17			2.4674014086	6.48576E-11
19			2.4674014087	6.88973E-13

จากตารางที่ 2 ผลการเปรียบเทียบจะเห็นได้ว่าวิธี DTM ให้ผลลัพธ์ได้อย่างถูกต้องเป็นอย่างดี การคำนวณค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตที่ทำให้เสาเกิดการโก่งเดาะพบว่าผลรวมของจำนวนเทอมฟังก์ชันแปลงวิธี DTM

ต้องใช้จำนวน 17 เทอม จึงทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มีค่าน้อยกว่า $\epsilon_r = 10^{-10}$ และน้ำหนักบรรทุกวิกฤตที่ได้เท่ากับ 2.4674014086 มีค่าเข้าใกล้ค่าแม่นยำตรงซึ่งมีค่าเท่ากับ $\pi^2 / 4$ นอกจากนี้ยังแสดงให้เห็นว่าจำนวน

เทอมที่นำมาใช้ในการคำนวณหากมีไม่มากพอจะทำให้ผลที่ได้มีความคลาดเคลื่อนสูง แต่ถ้าหากเพิ่มจำนวนเทอมให้มากขึ้นผลคำตอบที่คำนวณได้จะลู่เข้าหาผลเฉลยแน่นอนตรงโดยมีสมการสำหรับการคำนวณค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตที่ได้

จากการศึกษานี้ (ใช้ 17 เทอม) โดยกำหนดให้มุลลาดเอียงที่ปลายมีค่าน้อยมากในที่นี้กำหนดให้ $C_1 = 0.001$ ในสมการที่ (30) ซึ่งภายหลังจากการกำหนดค่า $C_1 = 0.001$ แล้วสามารถเขียนแสดงไว้ในสมการที่ (33)

$$0.001 - 0.0004999999167\bar{\mu} + 0.00004166663889\bar{\mu}^2 - 0.000001388883102\bar{\mu}^3 + 2.480072751 \times 10^{-8}\bar{\mu}^4 - 2.7548826991 \times 10^{-10}\bar{\mu}^5 + 2.0818956501 \times 10^{-12}\bar{\mu}^6 - 1.1184988121 \times 10^{-14}\bar{\mu}^7 + 3.7079423831 \times 10^{-17}\bar{\mu}^8 = 0 \quad (33)$$

5.2 พฤติกรรมหลังการโค้งเคาะ

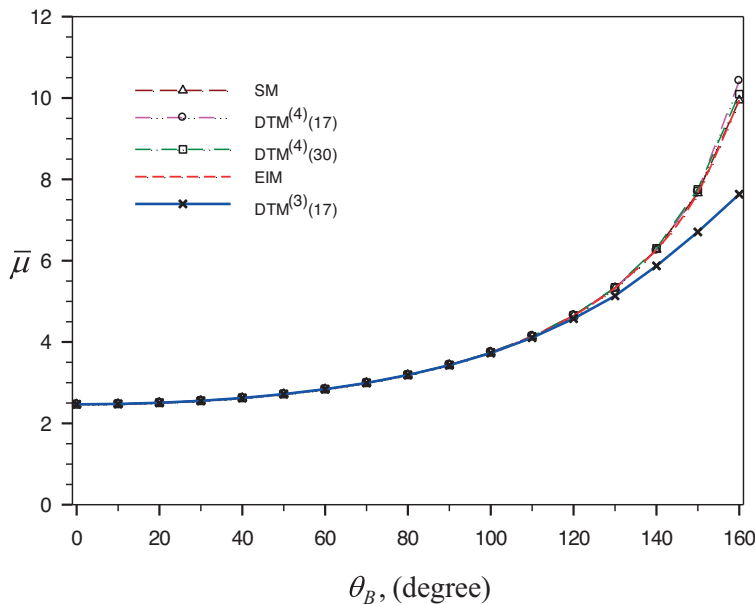
การศึกษาพฤติกรรมของเสายืนหลังจากเกิดการโค้งเคาะแบ่งออกเป็น 2 กรณี

5.2.1 ความสัมพันธ์ของมุลลาดเอียงกับน้ำหนัก

บรรทุก

ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\bar{\mu}$ กับมุล

ลาดเอียงที่ปลายของเสา θ_B ที่มีจำนวนเทอมของฟังก์ชันแปลง 17 เทอม ดังแสดงไว้ในสมการที่ (30) เมื่อนำมาเขียนรูปแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{\mu}$ และ θ_B แสดงในรูปที่ 4



รูปที่ 4 เปรียบเทียบค่าน้ำหนักบรรทุกกับมุลลาดเอียง

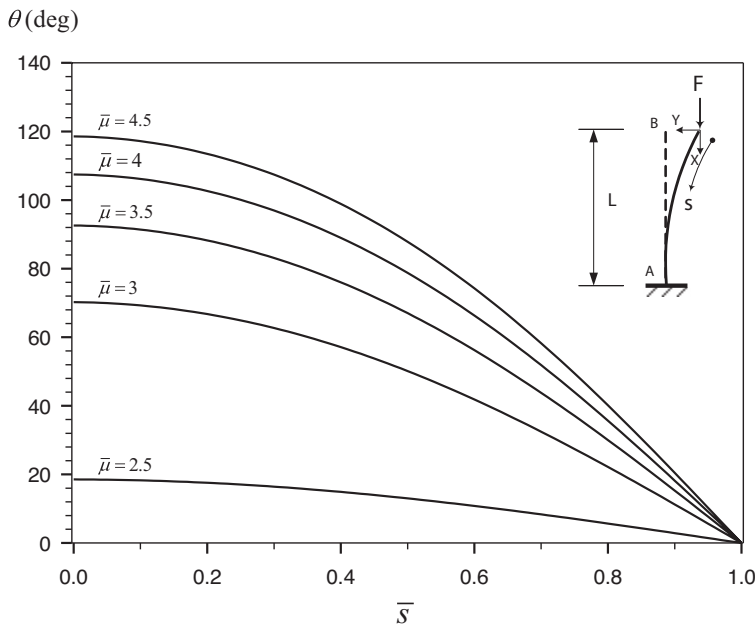
ผลการวิเคราะห์ในรูปที่ 4 ซึ่งได้ทำการเปรียบเทียบผลของน้ำหนักบรรทุก $\bar{\mu}$ กับมุลลาดเอียงที่ปลาย θ_B ด้วยวิธี DTM ในรูปแบบต่างๆ กับวิธี EIM [21] และวิธี SM โดยรูปแบบของ DTM กำหนดได้ตั้งสัญลักษณ์ต่อไปนี้ $DTM^{(m)}(n_k)$ โดยที่ m คือจำนวนเทอมในการกระจาย

อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน sine และ cosine ในขณะที่ n_k คือจำนวนเทอมที่ใช้ในการคำนวณด้วยวิธี DTM ซึ่งพบว่า การคำนวณด้วยวิธี DTM ให้คำตอบค่าของน้ำหนักบรรทุก $\bar{\mu}$ กับมุลลาดเอียง θ_B ที่สอดคล้องกันดีและเมื่อเปรียบเทียบผลคำนวณวิธี DTM แบบ $DTM^{(3)}(17)$

(อนุกรมเทย์เลอร์ จำนวน 3 เทอม, จำนวนเทอมที่ใช้ในวิธี DTM 17 เทอม) กับวิธี EIM [21] และวิธี SM พบว่ามีค่าใกล้เคียงกันมากจนถึงค่ามุม θ_B ประมาณ 100 องศา หลังจากนั้นการคำนวณด้วยวิธี DTM จะทำให้น้ำหนักบรรทุก $\bar{\mu}$ เริ่มลู่ออกอย่างชัดเจน เมื่อเปรียบเทียบผลคำนวณแบบ DTM⁽⁴⁾(17) และ DTM⁽⁴⁾(30) ค่าของ $\bar{\mu}$ และ θ_B มีความถูกต้องและใกล้เคียงกับวิธี EIM และ SM มากกว่าการคำนวณแบบ DTM⁽³⁾(17) แต่อย่างไรก็ตามการคำนวณด้วยวิธี DTM แบบ DTM⁽⁴⁾(17) และ DTM⁽⁴⁾

(30) จะมีภาระในการคำนวณมากกว่าแบบ DTM⁽³⁾(17) ซึ่งไม่เหมาะสมต่อการนำไปใช้งาน ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงได้นำเสนอสมการมุมลาดเอียงแบบ DTM⁽³⁾(17) สามารถเขียนได้ดังแสดงในสมการที่ (34)

รูปที่ 5 แสดงให้เห็นมุมลาดเอียงตลอดความยาวเสาที่มีน้ำหนักบรรทุก $\bar{\mu} = 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5$ กระทำ ซึ่งมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี กล่าวคือ เมื่อมีน้ำหนักบรรทุกกระทำมากมุมลาดเอียงที่ปลายก็มีมากขึ้น



รูปที่ 5 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกกับมุมลาดเอียง

5.2.2 ความสัมพันธ์ระยะเคลื่อนตัวของเสาทางแกน X และแกน Y

เมื่อทำการแทนค่า $\bar{\mu}$ และ C_1 ในสมการที่ (28) และ (29) และใช้สมการที่ (4) คำนวณหาคำตอบระยะ

เคลื่อนตัวของเสา ซึ่งจะได้สมการระยะเคลื่อนตัวของเสาทางแกน X แสดงในสมการที่ (35) และสมการระยะเคลื่อนตัวของเสาทางแกน Y แสดงในสมการที่ (36) ตามลำดับ

$$\theta(\bar{s}) = C_1 + \left(-\frac{\bar{\mu}C_1}{240}(-20C_1^2 + C_1^4 + 120) \right) \bar{s}^2 + \left(\frac{\bar{\mu}^2 C_1}{69120}(-1920C_1^2 + 384C_1^4 - 32C_1^6 + C_1^8 + 2880) \right) \bar{s}^4 + \left(-\frac{\bar{\mu}^3 C_1}{248832000}(-1440000C_1^2 + 694080C_1^4 - 140160C_1^6 + 14520C_1^8 - 772C_1^{10} + 17C_1^{12} + 345600) \right) \bar{s}^6 + \dots \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}(\bar{s}) = & C_2 + \left(1 - \frac{1}{2}C_1^2 + \frac{1}{24}C_1^4\right)\bar{s} + \left(\frac{1}{6}\bar{\mu}C_1^2 - \frac{1}{18}\bar{\mu}C_1^4 + \frac{13}{2160}\bar{\mu}C_1^6 - \frac{1}{4320}\bar{\mu}C_1^8\right)\bar{s}^3 + \left(-\frac{1}{30}\bar{\mu}^2C_1^2 + \frac{1}{36}\bar{\mu}^2C_1^4 - \frac{79}{10800}\bar{\mu}^2C_1^6 \right. \\ & + \frac{13}{14400}\bar{\mu}^2C_1^8 - \frac{71}{1296000}\bar{\mu}^2C_1^{10} + \frac{7}{5184000}\bar{\mu}^2C_1^{12}\left.\right)\bar{s}^5 + \left(\frac{1}{315}\bar{\mu}^3C_1^2 - \frac{59}{7560}\bar{\mu}^3C_1^4 + \frac{911}{226800}\bar{\mu}^3C_1^6 - \frac{109}{113400}\bar{\mu}^3C_1^8 \right. \\ & + \frac{697}{5443200}\bar{\mu}^3C_1^{10} - \frac{359}{36288000}\bar{\mu}^3C_1^{12} + \frac{137}{326592000}\bar{\mu}^3C_1^{14} - \frac{1}{130636800}\bar{\mu}^3C_1^{16}\left.\right)\bar{s}^7 + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}(\bar{s}) = & C_3 + \left(C_1 - \frac{1}{6}C_1^3 + \frac{1}{120}C_1^5\right)\bar{s} + \left(-\frac{1}{6}\bar{\mu}C_1 + \frac{1}{9}\bar{\mu}C_1^3 - \frac{1}{45}\bar{\mu}C_1^5 + \frac{1}{540}\bar{\mu}C_1^7 - \frac{1}{17280}\bar{\mu}C_1^9\right)\bar{s}^3 + \left(\frac{1}{120}\bar{\mu}^2C_1 - \frac{5}{144}\bar{\mu}^2C_1^3 \right. \\ & + \frac{241}{14400}\bar{\mu}^2C_1^5 - \frac{73}{21600}\bar{\mu}^2C_1^7 + \frac{121}{345600}\bar{\mu}^2C_1^9 - \frac{193}{10368000}\bar{\mu}^2C_1^{11} + \frac{17}{41472000}\bar{\mu}^2C_1^{13}\left.\right)\bar{s}^5 + \left(-\frac{1}{5040}\bar{\mu}^3C_1 \right. \\ & + \frac{13}{1890}\bar{\mu}^3C_1^3 - \frac{32}{4725}\bar{\mu}^3C_1^5 + \frac{11}{4320}\bar{\mu}^3C_1^7 - \frac{3673}{7257600}\bar{\mu}^3C_1^9 + \frac{67}{1134000}\bar{\mu}^3C_1^{11} - \frac{1}{243000}\bar{\mu}^3C_1^{13} + \frac{209}{1306368000}\bar{\mu}^3C_1^{15} \\ & \left. - \frac{113}{41803776000}\bar{\mu}^3C_1^{17}\right)\bar{s}^7 + \dots \end{aligned} \quad (36)$$

ตารางที่ 3 เปรียบเทียบผลการเคลื่อนตัวของเสา (ที่จุดปลายเสา) ทางแกน X และแกน Y

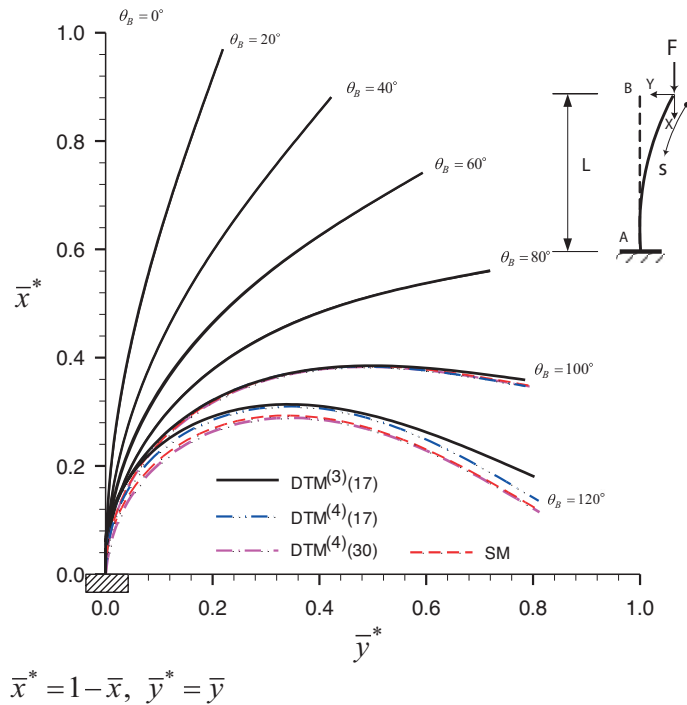
θ_B (deg)	$\bar{x}^*(\bar{s}=0)$			$\bar{y}^*(\bar{s}=0)$		
	DTM ⁽³⁾ (17)	EIM [21]	SM	DTM ⁽³⁾ (17)	EIM [21]	SM
0	0	0	0	0	0	0
20	0.96973	0.970	0.96973	0.21941	0.220	0.21941
40	0.88129	0.881	0.88120	0.42226	0.422	0.42224
60	0.74141	0.741	0.74101	0.59366	0.593	0.59320
80	0.56084	0.560	0.55939	0.71967	0.719	0.71949
100	0.35897	0.349	0.34898	0.78537	0.792	0.79153
120	0.18012	0.123	0.12315	0.80263	0.803	0.80317

$$\bar{x}^*(\bar{s}=0) = 1 - \bar{x}(\bar{s}=0), \quad \bar{y}^*(\bar{s}=0) = \bar{y}(\bar{s}=0)$$

จากตารางที่ 3 แสดงผลการคำนวณระยะการเคลื่อนตัวของปลายเสา B ที่สอดคล้องกับมุมลาดเอียง $\theta_B = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 120^\circ$ จากผลในตารางที่ 3 พบว่าวิธี DTM ที่ใช้การแปลงฟังก์ชัน sine และ cosine ในอนุกรมเทย์เลอร์ จำนวน 3 เทอมและ ใช้จำนวนเทอมฟังก์ชันแปลงวิธี DTM จำนวน 17 เทอม (DTM⁽³⁾(17)) ให้คำตอบสอดคล้องกับวิธี EIM และ วิธี SM โดยเฉพาะในช่วงมุม $\theta_B = 0^\circ$ ถึง 100° เมื่อ $\theta_B \geq 100^\circ$ ค่าการเคลื่อนตัวเริ่มมีความแตกต่าง และเห็นความแตกต่างได้อย่างชัดเจนที่มุม $\theta_B = 120^\circ$

รูปที่ 6 แสดงผลการคำนวณรูปร่างสมดุของการเคลื่อนตัวของเสาทางแกน X และแกน Y ตลอดความยาวเสา โดยการเคลื่อนตัวทางแกน X และแกน Y แสดงอยู่ในรูปของ ค่า \bar{x}^* และ \bar{y}^* ตามลำดับ พบว่าการคำนวณด้วยวิธี DTM แบบ DTM⁽⁴⁾(17) และ DTM⁽⁴⁾(30) ให้ผลคำตอบใกล้เคียงกับวิธี SM มากที่สุดซึ่งเป็นผลมาจากการเพิ่มจำนวนเทอมในการคำนวณ DTM

แต่ในขณะเดียวกันการเพิ่มจำนวนเทอมมีผลต่อความสะดวกในการใช้งานที่ลดลงเช่นกัน



รูปที่ 6 ความสัมพันธ์ระหว่าง \bar{x}^* กับ \bar{y}^*

6. สรุปผลการศึกษา

การศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของเสาเอ็นภายใต้แรงกระทำที่ปลาย ซึ่งปัญหาสามารถเขียนได้ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์และใช้วิธี Differential Transformation Method (DTM) สามารถสรุปได้ดังนี้

1. ผลการคำนวณน้ำหนักบรรทุกวิกฤตของเสาเอ็นที่ทำให้เสากเกิดการโก่งเดาะจากวิธี DTM มีความสอดคล้องกับผลการคำนวณโดยวิธีอีลิปติกอินทิกรัลและวิธียิงเป้าเป็นอย่างมาก โดยเฉพาะเมื่อจำนวนเทอมของฟังก์ชันแปลงในวิธี DTM มีจำนวนเทอมตั้งแต่ 17 เทอมเป็นต้นไป

2. ผลการคำนวณระยะเคลื่อนตัวของเสาเอ็นทั้งแกน X และแกน Y มีความสอดคล้องกับผลการคำนวณโดยวิธียิงเป้าเช่นเดียวกับการคำนวณหาค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตของเสา โดยเฉพาะในช่วงที่มุมลาดเอียงที่ปลายเสามีค่าน้อยกว่า 100 องศา

3. การเพิ่มจำนวนเทอมของอนุกรมเทย์เลอร์และจำนวนเทอมที่ใช้ในการคำนวณด้วยวิธี DTM มีผลทำให้ผลเฉลยมีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นแต่ในขณะเดียวกันภาระในการคำนวณจะเพิ่มมากขึ้นเช่นกัน

7. เอกสารอ้างอิง

1. Yaemchinda, P. and Chucheepsakul, S., 2014, "Static Analysis of Deep Water Mooring Lines using Elastic Rod Model," *KMUTT Research and Development Journal*, 37 (3), pp. 313-329. (In Thai)
2. Klaycham, K., Athisakul, C. and Chucheepsakul, S., 2014, "Finite Element Method for Critical Top Tension Analysis of Neutrally Buoyant Raiser," *KMUTT Research and Development Journal*, 37 (4), pp. 429-446. (In Thai)
3. Kuznetsov, V.V. and Levyakov, S.V., 2002, "Complete Solution of the Stability Problem for Elastica of Euler's Column," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 37 (6), pp. 1003-1009.
4. Phungpaingam, B. and Chucheepsakul, S., 2005, "Post-Buckling of an Elastic Column with Various Rotational End Restraints," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*,

5 (1), pp. 113-123.

5. Venkateswara, G.R. and Raju, P.C., 1977, "Post-Buckling of Uniform Cantilever Column Gerakin Finite Element Solution," *Engineering Fracture Mechanics*, 9 (1), pp. 1-4.

6. Lee, K., 2009, "Post-Buckling of Uniform Cantilever Column Under a Combined Load," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 36 (5), pp. 813-816.

7. Wang, J., Chen, J. and Liao, S., 2008, "An Explicit Solution of the Large Deformation of a Cantilever Beam Under Point Load at the Free Tip," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 212 (2), pp. 320-330.

8. Tolou, N. and Herder, J.L., 2009, "A Semianalytical Approach to Large Deflections in Compliant Beams under Point Load," *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 910896, 13 p.

9. Shin, Y.J. and Yun, J.H., 2006, "Transverse Vibration of a Uniform Euler Bernoulli Beam Under Varying Axial Force using Differential Transformation Method," *Journal of Mechanical Science and Technology*, 20 (2), pp. 191-196.

10. Chai, Y.H. and Wang, C.M., 2006, "An Application of Differential Transformation to Stability Analysis of Heavy Columns," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 6 (3), pp. 317-332.

11. Catal, S., 2014, "Buckling Analysis of Semi-Rigid Connected and Partially Embedded Pile in Elastic Soil using Differential Transform Method," *Structural Engineering and Mechanics*, An International Journal, 52 (5), pp. 971-995.

12. Phungpaingam, B., 2016, "Application of Differential Transformation Method to Determine Buckling Load of an Elastic Column with Various Rotational Restraints," *Proceedings of the 21st National Convention on Civil Engineering*, 28-30

June 2016, Songkhla, Thailand, 6 p. (In Thai)

13. Salehi, P., Yaghoobi, H. and Torabi, M., 2012, "Application of the Differential Transformation Method and Variational Iteration Method to Large Deformation of Cantilever Beams Under Point Load," *Journal of Mechanical Science and Technology*, 26 (9), pp. 2879-2887.

14. Boyle, P., Richard, R.A. Syms and Moore, D.F., 2002, "Packaging Solutions for MEMS/MOEMS using Thin Films as Mechanical Components," *Proceeding SPIE 4755, Design, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS*, 19 April 2002, France, 12 p.

15. Pukhov, G.E., 1982, "Differential Transforms and Circuit Theory," *Circuit Theory and Applications*, 10 (3), pp. 265-276.

16. Zhou, J.K., 1986, *Differential Transformation and Its Application for Electrical Circuits*, Huazhong University Press, Wuhan, China (In Chinese).

17. Chen, C.L. and Liu, Y.C., 1998, "Differential Transformation Technique for Steady Nonlinear Heat Conduction Problems," *Applied Mathematics and Computation*, 95 (2-3), pp. 155-164.

18. Joneidi, A.A., Ganji, D.D. and Babaelahi, M., 2009, "Differential Transformation Method to Determine Fin Efficiency of Convective Straight Fins with Temperature Dependent Thermal Conductivity," *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 36 (7), pp. 757-762.

19. Yaghoobi, H. and Torabi, M., 2011, "The Application of Differential Transformation Method to Nonlinear Equations Arising in Heat Transfer," *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 38 (6), pp. 815-820.

20. Shin, Y.J. and Yun, J.H., 2006, "Transverse Vibration of a Uniform Euler-Bernoulli Beam under Varying Axial Force using Differential Transformation Method," *Journal of Mechanical Science and*

Technology, 20 (2), pp. 191-196.

Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York,

21. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., 1961,

pp. 76-81.