

การสร้างแผนภาพการออกแบบงานสปริงด้วยแบบจำลองจากวิธีพลังงาน

วัชรพงษ์ ประดั่งทะโล¹ สนต์ิพีร์ เออมมณี^{2*} และ สุรเชษฐ์ ชูติมา³
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี บางมด ทุ่งครุ กรุงเทพฯ 10140

บทคัดย่อ

บทความนี้กล่าวถึงการทำนายพฤติกรรมการเปลี่ยนรูปและหลักการการออกแบบงานสปริงที่ผลิตมาจากวัสดุไอโซทรอปิกเมื่อรับภาระกดในแนวแกน โดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของงานสปริงจากวิธีพลังงานศักย์ทั้งหมดต่ำที่สุดภายใต้ระบบแกนทรงกรวย และพิจารณาถึงความไม่เป็นเชิงเส้นเชิงเรขาคณิตในสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัดเนื่องจากสปริงสามารถมีระยะยุบตัวมากเมื่อเทียบกับความหนา พฤติกรรมการตอบสนองของงานสปริงภายใต้ภาระแรงที่มากกระทำได้จากผลเฉลยที่ได้จากการแก้สมการพลังงานด้วยระเบียบวิธีริตส์ แผนภาพการออกแบบและความเสียหายของงานสปริงที่ได้รับการพัฒนาและนำเสนอสามารถใช้เป็นแนวทางในการเลือกขนาดงานสปริงในการใช้งานได้อย่างเหมาะสมเมื่อทราบแรงกดสูงสุดที่ยอมรับได้และ/หรือทราบค่านิจสปริงเริ่มต้น

คำสำคัญ : งานสปริง / วิธีพลังงาน / ระเบียบวิธีริตส์ / แผนภาพการออกแบบ

* Corresponding Author : sontipee.aim@kmutt.ac.th

1 นักศึกษาปริญญาเอก ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์

2 ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์

3 รองศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์

Development of Design Map for Belleville Springs with an Energy Method Model

Watcharapong Patangtalo¹ Sontipee Aimmanee^{2*} and Surachate Chutima³

King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangmod, Thungkru, Bangkok 10140

Abstract

This article discusses the prediction of the deformation behavior and design criteria of an isotropic Belleville spring under axial loading. Because the spring could undergo large deflection relative to the spring thickness, the mathematical model of the Belleville spring is developed with the total minimum potential energy principle in a conical coordinate system by considering geometrical nonlinearities of the strain-displacement relations. The solutions of the response behavior of the Belleville spring under loading are computed by the Ritz method. The design and failure mode maps are created and presented as a guideline to select a suitable spring size when the maximum applied load and/or the required initial spring stiffness is known.

Keywords : Belleville Spring / Energy Method / Ritz Method / Design Maps

* Corresponding Author : sontipee.aim@kmutt.ac.th

¹ Ph.D. Candidate, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering.

² Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering.

³ Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering.

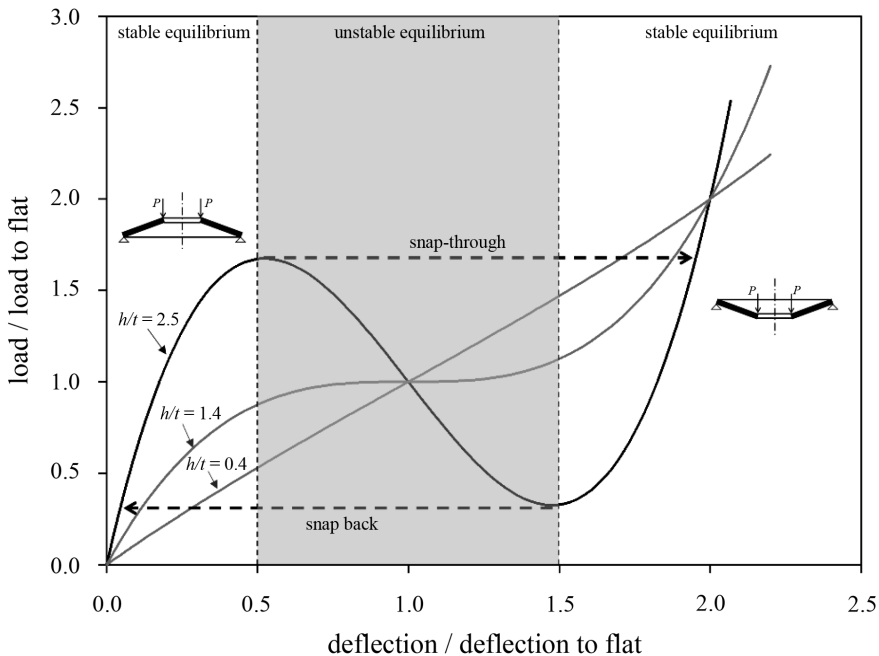
1. บทนำ

งานสปริงหรือสปริงเบลล์เวลล์ (Belleville Spring) เป็นสปริงพิเศษที่มีลักษณะเป็นโครงสร้างเปลือกบางทรงกรวยยอดตัดคล้ายจานคว่ำ การออกแบบรูปร่างลักษณะนี้ทำให้งานสปริงสามารถรับและต้านทานแรงกดในแนวตั้งได้ดี โดยเมื่อได้รับการกด งานสปริงจะเกิดระยะยุบในช่วงยืดหยุ่นเหมือนสปริงชนิดอื่นๆ ทั่วไป แต่จุดเด่นของสปริงชนิดนี้คือค่านิจสปริง (Spring Rate) ที่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ตามระยะยุบที่เพิ่มมากขึ้น โดยค่านิจสปริงอาจมีค่าคงที่ มีค่ามากขึ้น หรือมีค่าลดลงได้

การเปลี่ยนแปลงค่านิจสปริงในรูปที่ 1 แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างพฤติกรรมการยุบตัวของงานสปริงภายใต้แรงกดกับอัตราส่วนความสูงต่อความหนา (h/t) โดยเมื่อ h/t มีค่าน้อยเช่น $h/t = 0.4$ ค่าความชันของกราฟหรือค่านิจสปริงจะมีค่าคงที่และเป็นค่าบวกเสมอ ในขณะที่เมื่อ h/t มีค่าสูงขึ้นเป็น 1.4 ค่าความชันจะแปรเปลี่ยนไปตามระยะกดอย่างเห็นได้ชัด และเมื่อ $h/t = 2.5$ ค่านิจสปริงจะเปลี่ยนแปลงได้มาก โดยมีค่าเท่ากับศูนย์ได้ที่อัตราส่วนระยะยุบ 0.5 และ 1.5 และมีค่าเป็นลบที่อัตราส่วนระยะยุบระหว่าง 0.5 และ 1.5 ซึ่งเมื่อระยะยุบมีค่าเปลี่ยนไปเล็กน้อยในทางที่มีค่านิจสปริงเป็นลบจะเกิดการกระโดดอย่างรวดเร็วจากสภาวะสมดุลตำแหน่ง

หนึ่งไปสู่สภาวะสมดุลอีกตำแหน่ง พฤติกรรมดังกล่าวนี้เรียกว่าการเปลี่ยนรูปร่างกลับทิศขาไปหรือการสแนปทรู (Snap-through) ในกรณีที่มีระยะกดงานสปริงเพิ่มมากขึ้น และเรียกว่าการเปลี่ยนรูปร่างกลับทิศขากลับหรือการสแนปแบค (Snap-back) เมื่อระยะกดมีค่าน้อยลง โดยรูปร่างหลังจากการเปลี่ยนรูปร่างกลับทิศจะแตกต่างจากรูปร่างเริ่มต้นก่อนการกลับทิศอย่างชัดเจนเพราะมีการเปลี่ยนเครื่องหมายของค่าความโค้งของงานสปริงอย่างทันทีทันใด รูปแบบเสถียรภาพของสปริงในลักษณะนี้เรียกว่าเสถียรภาพแบบเมตา (Metastable)

นอกจากนี้เสถียรภาพของสปริงแบบเมตา ยังมีรูปแบบของเสถียรภาพในขณะมีการเปลี่ยนรูปร่างอีกประเภทที่อาจเกิดขึ้นได้หากอัตราส่วนความสูงต่อความหนาของงานสปริงมีค่าสูงขึ้นอีก ได้แก่ ทวิเสถียรภาพ (Bi-stability) ซึ่งงานสปริงจะมีรูปร่างกลับทิศค้างถึงแม้จะลดแรงกดลงจนเป็นศูนย์ และต้องใช้แรงดึงกระทำกับงานสปริงจึงจะสามารถเปลี่ยนรูปร่างกลับสู่สภาวะเริ่มต้นที่ไม่มีระยะยุบตัวได้ ลักษณะการยุบตัวของงานสปริงเหล่านี้สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับงานได้หลากหลายประเภท ยกตัวอย่างเช่น ใช้เป็นสวิตช์ปิด-เปิด ใช้ทำวาล์วน้ำ หรือใช้เป็นแผ่นคลัทช์ ดัดต่อแรงบิดในระบบส่งกำลัง เป็นต้น



รูปที่ 1 ค่านิจสปริงและรูปแบบพฤติกรรมเปลี่ยนรูปร่างกลับทิศของงานสปริง

สมรรถนะของงานสปริงจะขึ้นอยู่กับสมบัติของวัสดุที่นำมาผลิตและขนาดรูปร่างของงานสปริง ซึ่งงานสปริงที่ใช้กันอย่างแพร่หลายจะผลิตจากโลหะเป็นวัสดุหลัก เนื่องจากหาได้ง่ายและมีกระบวนการผลิตที่ไม่ยุ่งยาก การศึกษาสมรรถนะของงานสปริงนั้นมีมาตั้งแต่อดีต โดย Almen และ Laszlo [1] ได้พัฒนาสมการทำนายสมรรถนะของงานสปริงที่ผลิตจากวัสดุไอโซทรอปิกหรือวัสดุที่มีสมบัติเท่ากันทุกทิศทาง และได้กำหนดสมมุติฐานการพัฒนาแบบจำลองไว้ว่างานสปริงจะไม่มีการเสียรูปของหน้าตัดขณะรับแรง การยุบตัวที่เกิดขึ้นจะเกิดจากการหมุนของหน้าตัดสปริงรอบจุดสะเทิน (Neutral Point) เท่านั้น และความเค้นในแนวรัศมี (Radial Stress) ของสปริงต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ ต่อมา Curti และ Orlando [2-3] ได้ปรับปรุงสมการของ Almen และ Laszlo โดยการเปลี่ยนสมมุติฐานของความเค้นในแนวรัศมีให้เป็นความเครียดในแนวรัศมี (Radial Strain) มีค่าเท่ากับศูนย์แทน ภายหลัง Zheng คณะ [4] ได้นำเสนอสมการการออกแบบงานสปริงที่ทำจากวัสดุไอโซทรอปิก โดยการพัฒนาแบบจำลองซึ่งใช้วิธีพลังงานเพื่อคำนวณหาความสัมพันธ์ของแรงกดและระยะยุบ แบบจำลองของ Zheng และคณะกำหนดให้ลักษณะของงานสปริงเป็นแผ่นบางที่มีความไม่สมบูรณ์ทางเรขาคณิตจากรูปร่างที่นูนขึ้นเพื่อเรียนแบบรูปร่างกรวยตัดยอดของงานสปริง Ozaki และ Tsuda [5] ได้ทำการศึกษาผลกระทบของแรงเสียดทานที่เกิดจากการนำงานสปริงมาซ้อนทับกัน โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ส่วนงานวิจัยที่เกี่ยวกับการทดสอบและระเบียบวิธีเชิงตัวเลขด้วยเทคนิคใหม่ๆ ในการคำนวณความเสียหายของวัสดุในสปริงแบบงานที่ทำจากเหล็กได้อธิบายไว้ในเอกสารอ้างอิง [6-7] นอกเหนือจากงานสปริงที่ทำมาจากเหล็ก Maletta และคณะ [8] ได้ทำการศึกษางานสปริงที่ทำมาจากโลหะจำรูป NiTi โดยทำการขึ้นรูปและศึกษาผลการตอบสนองของสปริงต่อแรงและความร้อนเมื่อเกิดการเปลี่ยนแปลงเฟสของวัสดุ Castagnetti และ Dallari [9] ได้นำเสนอการประยุกต์ใช้สปริงงานเพื่อเก็บเกี่ยวพลังงานแม่เหล็กไฟฟ้าที่ได้จากการลั่นสะเทือนโดยใช้แท่งแม่เหล็กถาวรที่มีขดลวดพันล้อมรอบเปลี่ยนพลังงานกลจากลั่นสะเทือนของสปริงไปเป็นพลังงานไฟฟ้า นอกจากนี้ยังมีการศึกษา

พฤติกรรมของงานสปริงในประเทศไทยที่ดำเนินการโดย Inban [10] ซึ่งได้ทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ของค่าระยะยุบตัวและค่าความเค้นที่เกิดขึ้นในสปริงแบบงานจากภาวะที่มากกระทำในแบบต่างๆ ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แต่ไม่ได้คำนึงถึงการเปลี่ยนรูปกลับทิศ

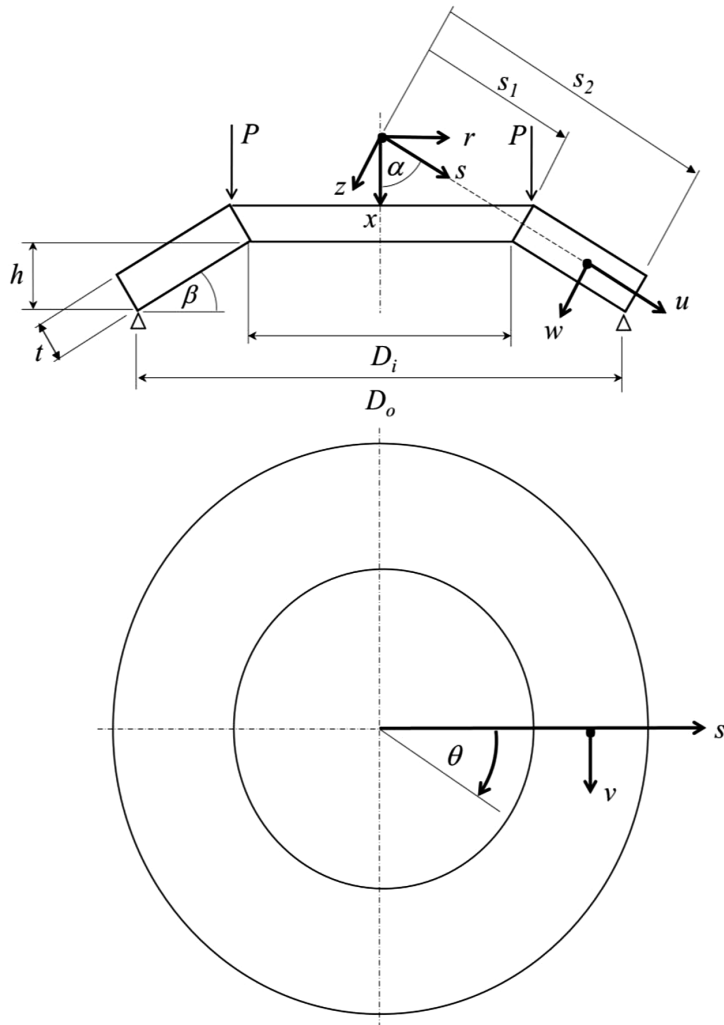
สำหรับการวิจัยเกี่ยวกับงานสปริงที่ผลิตจากวัสดุที่มีสมบัติไม่เท่ากันทุกทิศทางเช่นคอมโพสิตนั้น Dharan และ Bauman [11] ได้นำเสนอการปรับใช้สมการของ Almen และ Laszlo มาทำนายการเปลี่ยนรูปของงานสปริงภายใต้ภาระกด โดยระบุให้งานสปริงคอมโพสิตมีการเรียงชั้นของเส้นใยจนมีสมบัติเสมือนเป็นวัสดุไอโซทรอปิก (Quasi-isotropic) แต่วิธีการนี้ก็ยังมีข้อจำกัดในการป้อนข้อมูลของสมบัติวัสดุคอมโพสิตที่มีความหลากหลายลงไปในการของ Almen และ Laszlo ซึ่งขึ้นอยู่กับสมบัติของวัสดุเพียงแค่ 2 ตัวคือมอดุลัสยืดหยุ่นและอัตราส่วนปัวของ Patangtalo และคณะ [12, 13] จึงได้พัฒนาแบบจำลองที่สามารถทำนายสมรรถนะของงานสปริงทั้งที่ทำมาจากวัสดุไอโซทรอปิกและคอมโพสิต โดยมีสมมุติฐานภายใต้ทฤษฎีโครงสร้างเปลือกบาง (Thin Shell Theory) [14] และคำนึงถึงความไม่เป็นเชิงเส้นทางเรขาคณิตเมื่องานสปริงมีระยะยุบตัวมากๆ (Large Deflection) งานสปริงมีการเปลี่ยนรูปแบบทวิเสถียรภาพ โดยผลเฉลยของคำตอบจะคำนวณได้จากระเบียบวิธีริตซ์ (Ritz Method)

อย่างไรก็ดีการทบทวนผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งหมดข้างต้นแสดงให้เห็นว่าการศึกษาที่ผ่านมายังขาดกระบวนการออกแบบงานสปริงอย่างเป็นระบบ จึงทำให้การเลือกใช้งานสปริงทำได้อย่างลำบากและยุ่งยากเพราะต้องลองสุ่มขนาดสปริงที่มีความหลากหลายเพื่อตรวจสอบการตอบสนองของงานสปริงในทุกกรณี ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงได้พัฒนาวิธีการกำหนดขนาดมิติของงานสปริงในรูปของแผนภาพสำหรับการออกแบบ โดยให้ผู้ออกแบบระบุตัวแปรต้นที่ควรทราบค่า ได้แก่ขนาดรูปร่างภายนอกของงานสปริง (Exterior Dimensions) ค่านิจสปริงที่ต้องการใช้งาน และ/หรือ ความสามารถในการรับแรงกดได้สูงสุด ซึ่งความสัมพันธ์ของแผนภาพจะนำไปสู่ในการเลือกขนาดที่ไม่ทราบค่าอย่างเหมาะสม โดยผู้ออกแบบสามารถกำหนดลักษณะความเสียหายเมื่อสปริงได้รับการสูงสุดได้

2. การทำนายพฤติกรรมของจานสปริง

การคำนวณหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการกระจัดของจานสปริงและความเค้นที่เกิดขึ้นจะใช้ระเบียบวิธีพลังงานศักย์ต่ำที่สุดและการประมาณคำตอบด้วยวิธีริตส์

ตามที่ได้อภิปรายโดยละเอียดในเอกสารอ้างอิง [12-13] ซึ่งขั้นตอนในการคำนวณดังกล่าวจะนำเสนอในบทความนี้โดยย่อเพื่อความสมบูรณ์ของแนวคิดในการสร้างแผนภาพการออกแบบ



รูปที่ 2 จานสปริงในระบบพีกัดทรงกรวย

รูปที่ 2 แสดงแบบของจานสปริงในระบบพีกัดทรงกรวยและตัวแปรของมิติที่เกี่ยวข้อง เมื่อสปริงเกิดระยะยุบสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นดฉาก (Normal

Strain, \square) ความเค้นเฉือน (Shear Strain, γ) และค่าความโค้ง (Curvature, κ) ของระนาบกึ่งกลางที่ $z = 0$ กับระยะกระจัดของจานสปริงสามารถเขียนได้ดังนี้ [15]

$$\begin{aligned} \varepsilon_s^o &= \frac{\partial u^o}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^o}{\partial s} \right)^2 \\ \varepsilon_\theta^o &= \frac{u^o - w^o \cot \alpha}{s} + \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial v^o}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial w^o}{\partial \theta} \right)^2 \\ \gamma_{s\theta}^o &= \frac{\partial v^o}{\partial s} - \frac{v^o}{s} + \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial u^o}{\partial s} + \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial w^o}{\partial s} \frac{\partial w^o}{\partial \theta} \\ \kappa_s^o &= -\frac{\partial^2 w^o}{\partial s^2} \\ \kappa_\theta^o &= -\frac{1}{s} \frac{\partial w^o}{\partial s} - \frac{1}{s^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w^o}{\partial \theta^2} \\ \kappa_{s\theta}^o &= -\frac{2}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial w^o}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \tag{1}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} t \tag{3}$$

$$[B] = 0$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \frac{t^3}{12}$$

โดย u^o v^o และ w^o คือระยะกระจัดของระนาบกึ่งกลางในแนวรัศมี (s) แนวเส้นรอบวง (θ) และแนวความหนา (z) ตามลำดับ สมการที่ (1) ได้รวมความไม่เป็นเชิงเส้นของทางเรขาคณิตตามวิธีการของวอนคาร์มานในพจน์ที่เขียนเส้นใต้ไว้ด้วย เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างแรงและระยะขยับในรูปที่ 1 สามารถมีพฤติกรรมที่ไม่เป็นเชิงเส้นทางเรขาคณิตได้

ความสัมพันธ์ระหว่างแรงลัพธ์ (N) และโมเมนต์ลัพธ์ (M) กับความเครียดและความโค้งของระนาบกึ่งกลางสามารถหาได้จากสมการที่ (2) [16]

$$\begin{bmatrix} \{N_s, N_\theta, N_{s\theta}\}^T \\ \{M_s, M_\theta, M_{s\theta}\}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\varepsilon_s^o, \varepsilon_\theta^o, \gamma_{s\theta}^o\}^T \\ \{\kappa_s^o, \kappa_\theta^o, \kappa_{s\theta}^o\}^T \end{bmatrix} \tag{2}$$

ซึ่งเอลิเมนต์ของเมทริกซ์เอบีดี ได้แก่ เมทริกซ์ความแข็งดึงการยืด (Extensional Stiffness Matrix, $[A]$) เมทริกซ์ความแข็งดึงการยืดยึดคู่ควบกับการดัด (Extension - bending Coupling Matrix, $[B]$) และเมทริกซ์ความแข็งดึงการดัด (Bending Stiffness Matrix, $[D]$) ของจานสปริง ถ้าวัสดุที่ใช้ทำสปริงเป็นวัสดุไอโซทรอปิกเมทริกซ์เอบีดีสามารถเขียนอยู่ในรูปที่แสดงในสมการที่ (3)

โดยที่ E คือมอดุลัสยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity) G คือมอดุลัสเฉือน (Shear Modulus) ν คืออัตราส่วนปัวซอง (Poisson's Ratio) และ t คือความหนา (Thickness) ของจานสปริง

กำหนดให้ระยะขยับของระนาบกึ่งกลางของจานสปริงในการประมาณการกระจัดด้วยวิธีริตส์เป็นฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function) ที่มีจำนวนพจน์ดังนี้

$$\begin{aligned} u^o(s) &= c_1 + c_2 s + c_3 s^2 + c_4 s^3 + c_5 s^4 + c_6 s^5 \\ v^o(s) &= 0 \\ w^o(s) &= c_7 + c_8 s + c_9 s^2 \end{aligned} \tag{4}$$

โดยกำหนดให้ $v^o(s)$ มีค่าเท่ากับศูนย์ เนื่องจากเงื่อนไขค่าขอบเขตและแรงที่กระทำกับจานสปริงสมมาตรรอบแกน x จึงไม่มีระยะกระจัดในแนวแกน θ การกำหนดให้เทอม $u^o(s)$ และ $w^o(s)$ มีกำลังพหุนามของตัวแปร s สูงสุดเป็น 5 และ 2 ตามลำดับ เนื่องจากการตรวจสอบการวิเคราะห์การลู่เข้า (Convergence Analysis) ของจำนวนตัวแปรบ่งชี้ว่าเมื่อเพิ่มจำนวนตัวแปรให้มีค่ามากกว่านี้ก็ไม่ทำให้คำตอบของปัญหาเปลี่ยนแปลงไป

ตัวแปร c_1, c_2, \dots, c_9 แสดงถึงองศาอิสระของการเคลื่อนที่ของงานสปริงเมื่อมีการกระทำ ดังนั้นในการคำนวณหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงกดและระยะยุบต้องทำการหาค่าตัวแปรทั้ง 9 ตัวนี้

สมการของพลังงานความเครียด (Strain Energy : E_s) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลคูณของแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ในสมการที่ (2) กับความเครียดและค่าความโค้งในสมการที่ (1) และหาปริพันธ์ตลอดโดเมนของงานสปริง

$$E_s = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (N_s \varepsilon_s^o + N_\theta \varepsilon_\theta^o + N_{s\theta} \gamma_{s\theta}^o + M_s \kappa_s^o + M_\theta \kappa_\theta^o + M_{s\theta} \kappa_{s\theta}^o) s \sin \alpha ds d\theta \quad (5)$$

สมการที่ (5) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปร c_1, c_2, \dots, c_9 ได้หลังจากที่แทนค่าแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ให้อยู่ในรูปความเครียดและค่าความโค้งตามสมการที่ (2) หรือ (3) และแทนค่าความเครียดและค่าความโค้งทั้งหมดในรูปของการกระจัดและตัวแปรทั้ง 9 ตัวด้วยสมการที่ (1) และ (4)

สถานะของจุดรองรับและการเปลี่ยนรูปของงานสปริงสามารถนำมากำหนดเป็นเงื่อนไขค่าขอบเขต (Boundary Condition) ทั้งหมดสองตำแหน่งคือ งานสปริงไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวตั้งที่ขอบด้านล่าง ($s = s_2$) และงานสปริงมีระยะกระจัดในแนวตั้งเท่ากับ δ ที่ขอบด้านบน ($s = s_1$)

$$u^o(s_2) \cos \alpha + w^o(s_2) \sin \alpha = 0 \quad (6)$$

$$u^o(s_1) \cos \alpha + w^o(s_1) \sin \alpha = \delta$$

การหาผลเฉลยของปัญหาทำได้จากการแก้ระบบสมการเพื่อหาค่าตัวแปรที่ทำให้พลังงานในสมการที่ (5) มีค่าต่ำสุดเพื่อหาสถานะสมดุลเสถียรของการเปลี่ยนรูปของงานสปริง (Minimum Potential Energy Principle) ระบบสมการเหล่านี้เกิดขึ้นจากการหาอนุพันธ์ของพลังงานเทียบกับตัวแปรที่ไม่ทราบค่าทั้ง 9 ตัวดังนี้

$$\frac{\partial E_s}{\partial c_i} = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, 9 \quad (7)$$

แรงกดที่กระทำกับงานสปริงในแนวแกนตั้งสามารถคำนวณหาได้ด้วยการหาอนุพันธ์ของพลังงานความเครียดเทียบกับระยะยุบในแนวตั้งที่ขอบด้านบนของงานสปริงตามทฤษฎีคาสติเกลียโน (Castigliano's Theorem) ในสมการที่ (8)

$$P = \frac{\partial E_s}{\partial \delta} \quad (8)$$

อย่างไรก็ดีทฤษฎีที่บรรยายไว้ข้างต้นแสดงให้เห็นว่าพฤติกรรมของงานสปริงจะขึ้นอยู่กับตัวแปรที่เกี่ยวข้องหลายตัว ดังนั้นเพื่อหลีกเลี่ยงอิทธิพลของขนาดมิติที่ขึ้นกับหน่วยของการวัดและความกระชับในการอภิปรายผลตัวแปรทางเรขาคณิตที่เกี่ยวข้องสามารถนำมาจัดรูปใหม่เป็นตัวแปรไร้มิติได้โดยการรวมพจน์ของขนาดความสูงขนาดความหนา ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางในและนอกเป็นอัตราส่วน h/D_o , h/t และ D_i/D_o

นอกจากนี้แรงกดและค่านิจสปริงสามารถนำมาแปลงเป็นพจน์ของแรงไร้มิติ (P_{design}) และค่านิจสปริงไร้มิติ (k_{design}) ดังนี้

$$P_{design} = \frac{(1-\nu^2)P}{E h^2} \quad (9)$$

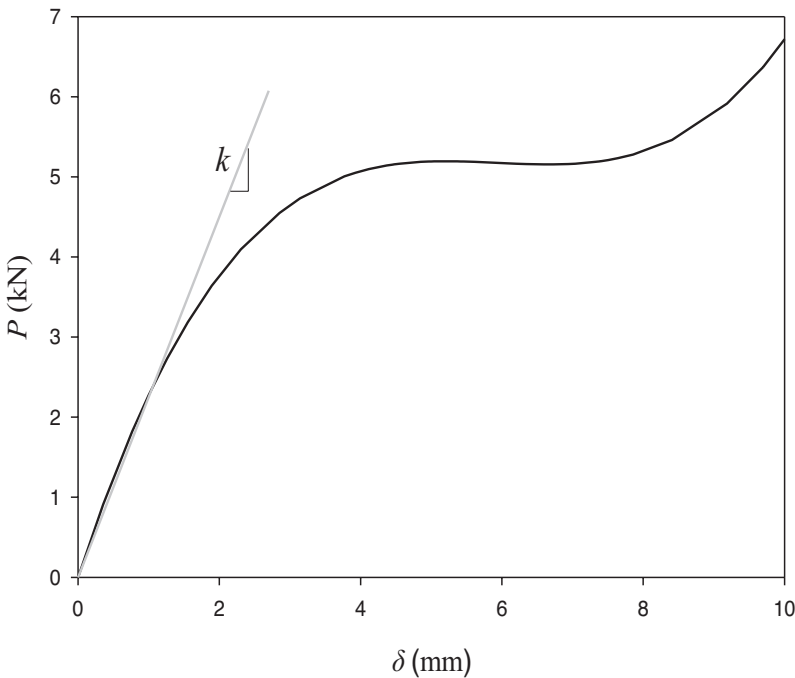
$$k_{design} = \frac{(1-\nu^2)k}{E h} \quad (10)$$

ค่านิจสปริง k ในสมการที่ (10) คือความชันของกราฟระหว่างแรงกดและระยะยุบตัวในช่วงที่มีความสัมพันธ์เป็นเชิงเส้น ซึ่งสามารถหาได้จากอนุพันธ์ของแรงกดต่อระยะยุบที่ระยะยุบเท่ากับศูนย์ดังสมการที่ (11)

$$k = \left. \frac{dP}{d\delta} \right|_{\delta=0} \quad (11)$$

รูปที่ 3 แสดงตัวอย่างความสัมพันธ์ระหว่างแรงกดและอัตราส่วนระยะยุบของจานสปริงไฮดรอปิก ที่คำนวณด้วยวิธีพลังงานศักย์ทั้งหมดต่ำที่สุด โดยจานสปริงมีสมบัติวัสดุตามตารางที่ 1 และมีขนาดอัตราส่วน D_i/D_o เท่ากับ 0.5 อัตราส่วน h/D_o เท่ากับ 0.02 และ h/t เท่ากับ 1.5 จากรูปแสดงให้เห็นได้ว่าพฤติกรรมการเปลี่ยนรูปของจานสปริงมีความสัมพันธ์ระหว่างแรงกดและระยะยุบที่ไม่เป็นเชิงเส้นอย่างเห็นได้ชัด โดยผลการคำนวณแสดงถึงจุดที่ค่านิจสปริงเท่ากับศูนย์สองตำแหน่ง ได้แก่ จุดวิกฤติบน (Upper Critical Point) และจุดวิกฤติล่าง (Lower Critical Point) ซึ่งมีค่า δ เท่ากับ 5 mm และ 7 mm ตามลำดับ ช่วง

ระหว่างจุดวิกฤติบนและจุดวิกฤติล่างที่มีค่านิจสปริงเป็นลบ บ่งบอกว่าช่วงระยะยุบนี้จานสปริงจะมีสถานะสมดุลแบบไม่เสถียร ดังนั้นเมื่อจานสปริงได้รับแรงกดมากขึ้นจนถึงจุดวิกฤติบนจะเกิดการสแนปทรู โดยที่จานสปริงจะเกิดการเปลี่ยนตำแหน่งอย่างรวดเร็วจาก δ เท่ากับ 5 mm ไปสู่ตำแหน่งใหม่ที่ δ เท่ากับ 7.6 mm โดยแรงกดยังมีค่าคงที่ ในทางกลับกันเมื่อลดแรงกดลงจนถึงจุดวิกฤติล่าง จานสปริงจะสแนปกลับจากตำแหน่ง δ/h เท่ากับ 7 mm มาที่ตำแหน่ง δ/h เท่ากับ 4.4 mm หลังจากนั้นเมื่อลดแรงกดลงจานสปริงก็กลับสู่สภาพเริ่มต้นในที่สุด



รูปที่ 3 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกดและระยะยุบจานสปริง

3. การสร้างแผนภาพการออกแบบจานสปริง

ในการสร้างแผนภาพการออกแบบตัวแปรเริ่มต้นที่ผู้ออกแบบต้องกำหนดคือขนาดที่มีความเหมาะสมกับพื้นที่ใช้งาน (Operating Space) หรือขนาดภายนอกโดยประมาณ (Estimated Exterior Dimension) ได้แก่ความสูง (h) และเส้นผ่าศูนย์กลางนอก (D_o) ของจานสปริง ซึ่งในบางครั้งเส้นผ่าศูนย์กลางใน (D_i) ของจานสปริงก็อาจมีขีดจำกัดจากขนาดของแกนหรือเพลลาเพื่อกำกับ

การเคลื่อนที่ให้จานสปริงอยู่ร่วมแนวศูนย์ (Alignment) โดยปกติอัตราส่วน h/D_o ที่เหมาะสมกับการนำมาใช้ผลิตจานสปริงจะมีค่าอยู่ระหว่าง 0.01 ถึง 0.10 โดยช่วงพิสัยดังกล่าวอ้างอิงจากจานสปริงที่มีการผลิตในปัจจุบัน นอกจากนี้เมื่อพิจารณาจานสปริงที่มีใช้อยู่ในอุตสาหกรรมจะมีค่าอัตราส่วน D_i/D_o อยู่ระหว่าง 0.35 – 0.65 ด้วย หลังจากได้กำหนดอัตราส่วน h/D_o และ D_i/D_o ในเบื้องต้นแล้วการเลือกขนาดความหนาของสปริง (t) ที่

เหมาะสม สามารถดำเนินการได้เป็น 2 แนวทาง แนวทางแรกคือการระบุค่านิจสปริง (Spring Rate) หรือความแข็งดิ่งที่ต้องการ หรือแนวทางที่สองคือการกำหนดความสามารถในการรับแรงได้สูงสุด (Maximum Load) เพื่อให้เหมาะกับการใช้งานหรือเพื่อป้องกันการเกิดความเสียหายกับสปริง ดังนั้นแผนภาพในการออกแบบจะประกอบด้วยกราฟความสัมพันธ์ของค่านิจสปริงและ/หรือ แรงคดสูงสุดเปรียบเทียบกับอัตราส่วนไร้มิติของความสูงต่อความหนา h/t

การสร้างแผนภาพการออกแบบงานสปริงจะพิจารณาเกณฑ์ความเสียหายที่สามารถเกิดขึ้นต่องานสปริงทั้งหมด ซึ่งถ้าเกณฑ์ความเสียหายใดสอดคล้องกับค่าภาระที่ต่ำที่สุดเป็นลำดับแรกย่อมแสดงว่างานสปริงจะเสียหายในรูปแบบนั้นก่อน ในงานวิจัยนี้ใช้เกณฑ์การพิจารณาทั้งหมดสองเกณฑ์คือ ความเสียหายที่เกิดจากการสแนปทิวโดยใช้แรงวิกฤติบนเป็นตัวกำหนด และความเสียหายที่เกิดจากความต้านแรงครากโดยใช้ความเค้นวอนมิสกับเครื่องหมาย (Signed Von Mises Stress) ซึ่งหาได้จากสมการที่ (12) เป็นตัวกำหนด

$$\sigma' = \pm \sqrt{\sigma_s^2 - \sigma_s \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 + 3\tau_{s\theta}^2} \quad (12)$$

ตารางที่ 1 สมบัติวัสดุที่ใช้ในการวิเคราะห์

E (GPa)	G (GPa)	ν	S_y (MPa)
206.90	79.60	0.30	1379

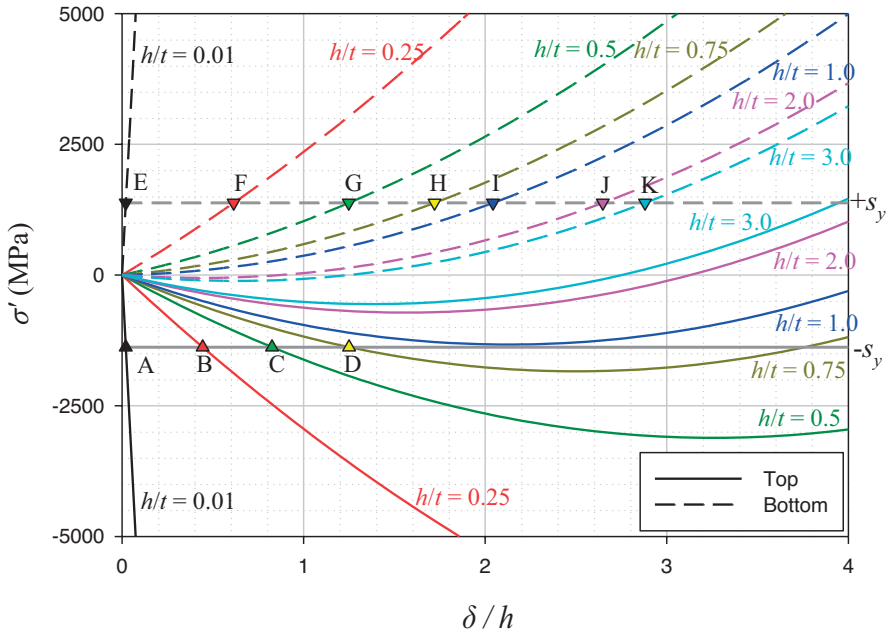
ตัวอย่างกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นวอนมิสกับเครื่องหมายและระยะยุบไร้มิติของงานสปริงที่อัตราส่วน h/t ต่างๆ เมื่ออัตราส่วน D_i/D_o เท่ากับ 0.5 และอัตราส่วน h/D_o เท่ากับ 0.02 แสดงไว้ในรูปที่ 4 โดยเส้นทึบและเส้นประหมายถึงความเค้นที่ผิวด้านบนและผิวด้านล่างของเส้นรอบวงด้านในตามลำดับ เส้นขีดแนวนอนแสดงถึงความต้านแรงครากของวัสดุที่ใช้ทำสปริงในด้านดึง ($+S_y$) และด้านอัด ($-S_y$) จุดตัดระหว่างเส้นกราฟของความเค้นกับเส้นขีดของความต้านแรงในแนวนอนบ่งบอกถึงระยะยุบที่ความเค้นเท่ากับความต้าน

โดยที่เครื่องหมายบวกหรือลบด้านหน้าของสัญลักษณ์ของรอกที่ 2 แสดงถึงเครื่องหมายของความเค้นหลัก (Principle Stress) ที่มีขนาดสูงที่สุดเมื่อเทียบกับความเค้นหลักในแนวแกนอื่นที่ตำแหน่งนั้น ส่วนความเค้นฉาก (σ) และความเค้นเฉือน (τ) ในสมการที่ (12) สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

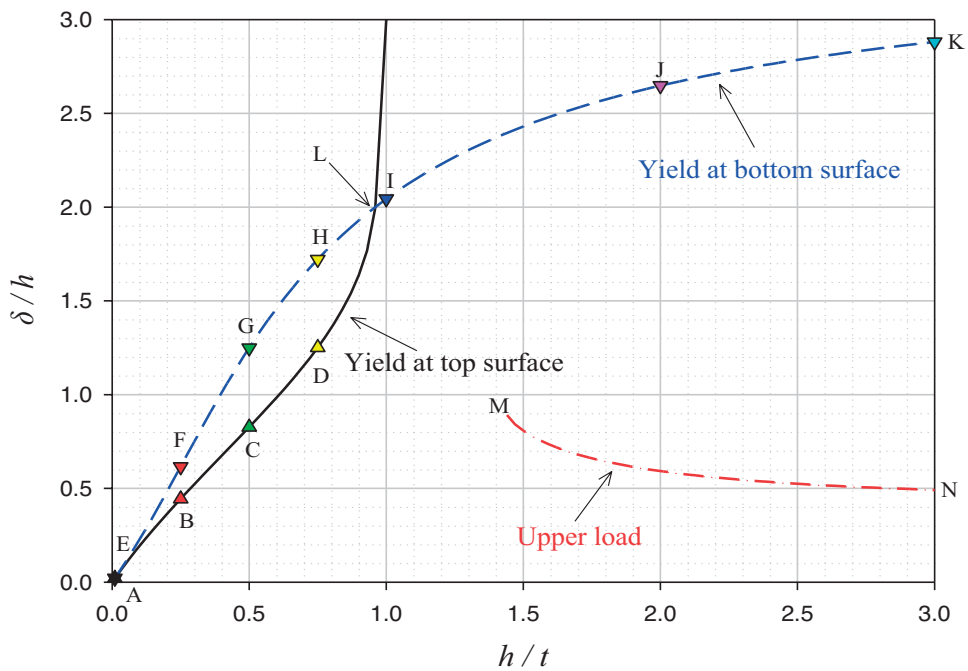
$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_s^o + z\kappa_s^o) + \frac{\nu E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + z\kappa_\theta^o) \\ \sigma_\theta &= \frac{\nu E}{1-\nu^2} (\epsilon_s^o + z\kappa_s^o) + \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + z\kappa_\theta^o) \quad (13) \\ \tau_{s\theta} &= G(\gamma_{s\theta}^o + z\kappa_{s\theta}^o) \end{aligned}$$

การวิเคราะห์ความเค้นที่เกิดในงานสปริงโลหะเบื้องต้นพบว่าความเค้นวอนมิสกำกับเครื่องหมายสูงสุดจะเกิดขึ้นที่เส้นรอบวงด้านใน และเนื่องจากงานสปริงมีลักษณะการรับภาระแบบโมเมนต์ดัดโดยมีระนาบกึ่งกลางเป็นระนาบสะเทิน ดังนั้นจุดวิกฤติจึงอยู่ที่ผิวบน ($z = -t/2$) หรือผิวล่าง ($z = t/2$) ความต้านแรงครากของวัสดุที่ใช้ทำงานสปริงแสดงไว้ในตารางที่ 1

แรงครากของวัสดุ จุดตัดเหล่านี้ (จุด A ถึง K) ซึ่งให้เห็นว่าความเสียหายจากความเค้นที่ผิวด้านบนจะเกิดขึ้นที่ h/t ต่ำกว่า 1.00 เพียงเล็กน้อย (เนื่องจากเส้นทึบ h/t มากกว่า 1.00 ไม่ตัดกับเส้นของ $-S_y$) ส่วนความเสียหายจากความเค้นของผิวด้านล่างจะพบทุกอัตราส่วน h/t (เส้นประทุกเส้นตัดกับเส้นของ $+S_y$) จุดตัดระหว่างเส้นกราฟความเค้นและความต้านแรงครากในรูปที่ 4 จะนำไปกำหนดตำแหน่งลงในกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะยุบที่งานสปริงเกิดความเสียหายกับอัตราส่วน h/t ดังปรากฏในรูปที่ 5



รูปที่ 4 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นวอนมัสกับเครื่องหมายและระยะยุบไร้มิติที่อัตราส่วน h/t ต่างๆ

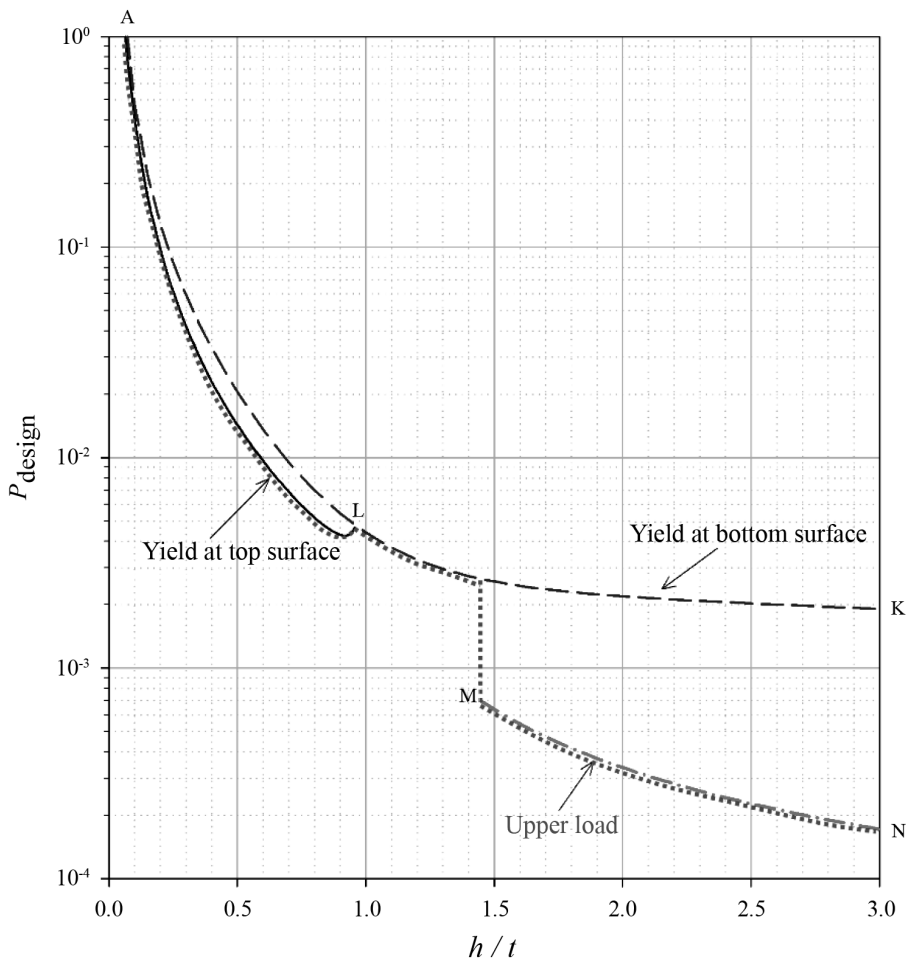


รูปที่ 5 ความสัมพันธ์ระหว่างระยะยุบที่งานสปริงเกิดความเสียหายและอัตราส่วน h/t

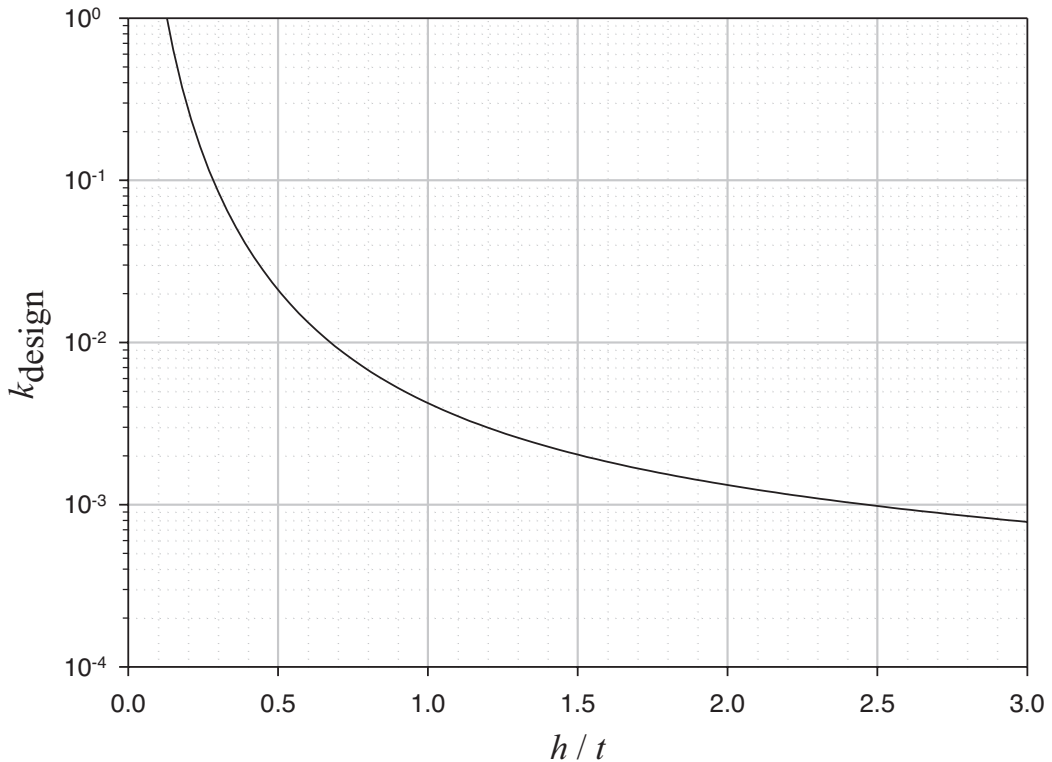
รูปที่ 5 ยังแสดงรูปแบบความเสียหายที่เกิดขึ้นกับงานสปริงที่ h/t ต่างๆ เมื่อระยะยุบไร้มิติมีค่ามากขึ้น เส้นทึบแสดงถึงระยะยุบของงานสปริงขณะที่ผิวด้านบนที่ตำแหน่งเส้นรอบวงในมีความเค้นเท่ากับความต้านแรงคราก เส้นประเป็นระยะยุบที่เกิดความเสียหายจากความเค้นครากที่ตำแหน่งเส้นรอบวงในของผิวด้านล่าง และเส้นประ-จุดเป็นระยะยุบของจุดวิกฤติบน ซึ่งข้อมูลของกราฟในรูปนี้บ่งชี้ว่างานสปริงที่มีอัตราส่วน h/t ระหว่าง 0 ถึง 0.95 จะเสียหายจากความเค้นที่ผิวด้านบนก่อนเสมอ เนื่องจากตำแหน่งระยะยุบของกราฟเส้นทึบสีดำ (จากจุด A ถึงจุด L) อยู่ต่ำกว่ากราฟเส้นประสีน้ำเงิน (จากจุด E ถึงจุด L) หลังจากนั้นเมื่ออัตราส่วน h/t มีค่าสูงกว่า 0.95 งานสปริงจะเกิดความเสียหายที่ผิวด้านล่างจากการครากแทน ซึ่งเป็นไปตามกราฟเส้นประสีน้ำเงินที่อยู่ต่ำกว่าเส้นทึบสีดำ อย่างไรก็ตามในขณะใช้งาน

งานสปริงต้องการการหลีกเลี่ยงพฤติกรรมการสแนปทริกก็สามารถกำหนดให้ระยะยุบที่ทำให้เกิดจุดวิกฤติบนตรงตำแหน่งเส้นประ-จุดสีแดงเป็นความเสียหายของสปริงได้ โดยอัตราส่วน h/t ที่จะเกิดการสแนปทริกจะสูงกว่า 1.45 เป็นต้นไป (จากจุด M ถึงจุด N) ซึ่งสอดคล้องกับพฤติกรรมการสแนปทริกที่ได้อธิบายไว้ตอนต้น

ระยะกดงานสปริงที่เหนียวนำไปให้เกิดความเสียหายรูปแบบต่างๆ ในรูปที่ 5 สามารถนำมาคำนวณแรงกดสูงสุดในพจน์ของแรงไร้มิติและสร้างแผนภาพการออกแบบได้ในรูปที่ 6 เมื่อพิจารณาภาพรวมของความเสียหายที่เกิดจากความเค้นทั้งผิวบนและผิวล่างรวมถึงการป้องกันไม่ให้งานสปริงมีพฤติกรรมการสแนปทริกจะเห็นได้ว่าแรงกดสูงสุดที่สัมพันธ์กับอัตราส่วน h/t จะเป็นไปตามกราฟเส้นประสีเขียว (A-L-M-N) ซึ่งเป็นเส้นแรงกดที่มีค่าน้อยที่สุดจากเกณฑ์ความเสียหายทั้งหมด



รูปที่ 6 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงสูงสุดของเกณฑ์ความเสียหายต่างๆ และอัตราส่วน h/t



รูปที่ 7 ความสัมพันธ์ระหว่างค่านิจสปริงและอัตราส่วน h/t

การสร้างแผนภาพการออกแบบที่ใช้ค่านิจสปริงเป็นตัวกำหนดสามารถดำเนินการได้โดยใช้สมการที่ (10)-(11) ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างค่าความแข็งตึงของจานสปริงที่อัตราส่วน h/t ต่างๆ รูปที่ 7 แสดงถึงแผนภาพการออกแบบที่ผู้ออกแบบกำหนดความแข็งตึงของสปริงเมื่ออัตราส่วน D_1/D_0 เท่ากับ 0.5 และอัตราส่วน h/D_0 เท่ากับ 0.02

วิธีการใช้แผนภาพสำหรับการออกแบบทั้งสองชนิดสามารถเลือกใช้อันใดอันหนึ่งหรือใช้ควบคู่กันได้ทั้งสองแผนภาพก็ได้ เริ่มต้นผู้ออกแบบต้องเลือกอัตราส่วน h/D_0 และ D_1/D_0 เช่นกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0.02 และ 0.50 หากผู้ออกแบบต้องการกำหนดค่านิจสปริงสำหรับการใช้งาน เช่นถ้ากำหนดค่านิจสปริงไว้มีมติให้เท่ากับ 0.002 ก็จะสามารถคำนวณอัตราส่วน h/t ได้เท่ากับ 1.5 ตามกราฟในรูปที่ 7 แต่ถ้าพิจารณารูปที่ 6 ร่วมด้วยจะเห็นว่าจานสปริงที่มีอัตราส่วน h/t เท่ากับ 1.5 จะมีแรงกดไว้มีมติต่ำสุดเท่ากับ 5.5×10^{-4} ซึ่งเป็นแรงที่จานสปริงเริ่มมีการสแนปทู่ (ลากในแนวตั้งไปตัดกราฟเส้นประ-จุดที่อยู่

ต่ำที่สุด) อย่างไรก็ตาม หากผู้ออกแบบยอมให้จานสปริงมีพฤติกรรมการสแนปทู่ จานสปริงนี้จะสามารถรับแรงไว้มีมติได้สูงขึ้นและมีค่าเท่ากับ 1.8×10^{-3} และจะมีความเสียหายจากความเค้นครากที่ผิวด้านล่างแทน (ลากไปตัดกราฟเส้นประสีน้ำเงิน)

4. สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยฉบับนี้ศึกษาถึงพฤติกรรมการเปลี่ยนรูปของจานสปริงเมื่อได้รับแรงกดด้วยวิธีพลังงาน รวมถึงการคำนวณหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงกดต่อระยะยุบและความเค้นต่อระยะยุบของจานสปริง ผลการคำนวณเหล่านี้ได้นำไปสร้างเป็นแผนภาพการออกแบบจานสปริงซึ่งสามารถประยุกต์ใช้ในการออกแบบจานสปริงได้หลากหลายขนาด เพราะตัวแปรที่ใช้ศึกษาเป็นตัวแปรไว้มีมติ อีกทั้งยังสามารถใช้แผนภาพนี้ช่วยประเมินรูปแบบความเสียหายของจานสปริงแต่ละขนาดได้ ทำให้ลดการสิ้นเปลืองในการทดสอบและลดระยะเวลาในการเลือกจานสปริงมาใช้งานอย่างเหมาะสม

5. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยฉบับนี้จะสำเร็จไปไม่ได้หากปราศจากทุนวิจัยที่ผู้วิจัยลำดับที่หนึ่งได้รับการสนับสนุน ทุนวิจัยเหล่านี้ ได้แก่ ทุนสนับสนุนจากกองทุนสนับสนุนการวิจัย โครงการปริญญาเอกกาญจนาภิเษก (คปก.อุตสาหกรรม) สัญญาเลขที่ PHD/0143/2551 ทุนสนับสนุนการวิจัยระดับบัณฑิตศึกษา มูลนิธิการศึกษาเซลล์ 100 ปี ประจำปีการศึกษา 2555 และทุนเพชรพระจอมเกล้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ปีการศึกษา 2553

6. เอกสารอ้างอิง

1. Almen, J.O. and Laszlo, A., 1936, "The Uniform-section Disk Spring," *Transaction of the ASME*, 58, pp. 305-314.
2. Curti, G. and Orlando, M., 1979, "New Calculation Method for Disc Springs," *Wire*, 30, pp. 17-22.
3. Curti, G. and Orlando, M., 1980, "Experimental Investigation with a New Design Calculation for Disc Springs," *Wire*, 31, pp. 26-29.
4. Zheng, E., Jia, F. and Zhou, X., 2014, "Energy-Based Method for Nonlinear Characteristics Analysis of Belleville Springs," *Journal of Thin-Walled Structures*, 79, pp. 52-61.
5. Ozaki, S. and Tsuda, K., 2012, "Analyses of Static and Dynamic Behavior of Coned Disk Spring : Effects of Friction Boundaries," *Journal of Thin-Walled Structure*, 59, pp. 132-143.
6. Bouzid, A. and Nechache, A., 2010, "The Modelling of Bolted Flange Joints used with Disc Springs and Tube and Tube Spacers to Reduce Relaxation," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 87, pp. 730-736.
7. Atxaga, G. and Pelayo, A., 2006, "Failure Analysis of a Set of Stainless Steel Disc Spring," *Eng. Failure Analysis*, 16, pp. 226-234.
8. Maletta, C., Filice, L. and Furgiele, F., 2012, "NiTi Belleville Washers : Design, Manufacturing

and Testing," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 24 (6), pp. 695-703

9. Castagnetti, D. and Dallari, F., 2016, "Design and Experimental Assessment of an Electromagnetic Energy Harvester based on Slotted Disc Springs," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, 9 August 2016.

10. Inban, S., 1985, Investigation of Stress and Deflection in Belleville Spring by Using Finite Element Method, Master of Engineering Thesis, Mechanical Engineering Program, Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology Thonburi. (In Thai)

11. Dharan, C.K.H. and Bauman, J.A., 2007, "Composite Disc Springs," *Science Direct Composite Part A : Applied Science and Manufacturing*, 38, pp. 2511-2516.

12. Patangtalo, W., Hyer M.W. and Aimmanee, S., 2016, "On the Non-Axisymmetric Behavior of Quasi-Isotropic Woven Fiber Reinforced Composite Belleville Springs," *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 35 (4), pp. 334-344.

13. Patangtalo, W., Aimmanee S. and Chutima, S., 2016, "A Unified Analysis of Isotropic and Composite Belleville Springs," *Thin-Walled Structures*, 109, pp. 285-295.

14. Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Kieger, S., 1959, Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Higher Education.

15. Hu, W. and Tsun-kuei, W., 1990, "A Donnell Type Theory for Finite Deflection of Stiffened Thin Conical Shells Composed of Composite Materials," *Applied Mathematics and Mechanics*, 11 (9).

16. Hyer, W., 2009, Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials, DEStech Publications, Lancaster.

