

การสันนิษฐานแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายใน

วีรพันธ์ เจียมมีปรีชา^{1*}

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน อ.เมือง จ.นครราชสีมา 30000

และ สมชาย ชูชีพสกุล²

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี แขวงบางมด เขตทุ่งครุ กรุงเทพฯ 10140

บทคัดย่อ

บทความนี้รายงานพฤติกรรมของการสันนิษฐานแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายในภายใต้เงื่อนไขของการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตร การคำนวณหารูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมอาศัยหลักการของรูปแบบสมการพื้นฐานในเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ การศึกษาครั้งนี้ใช้ทฤษฎีเมมเบรนในการสร้างพลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบางเชิงยืดหยุ่น สำหรับฟังก์ชันพลังงานของโครงสร้างเปลือกบางและค่าแรงดันภายในสามารถคำนวณได้จากหลักการของงานเสมือนในเทอมของค่าการเสถียรของโครงสร้างเปลือกบางและเขียนอยู่ในรูปแบบที่เหมาะสม ในการแก้ปัญหาสมการของการเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นที่ขึ้นกับเวลาทำได้โดยการลดรูปให้เป็นปัญหาค่าเจาะจงแบบไม่เป็นเชิงเส้นโดยการนิยามฟังก์ชันที่มีค่าขึ้นอยู่กับเวลาที่จุดวกกลับของการเคลื่อนที่หรือตำแหน่งที่มีค่าแอมพลิจูดสูงสุด ผลลัพธ์เชิงตัวเลขของค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้นร่วมกับเทคนิคการปรับกระบวนการทำซ้ำโดยตรง ค่าความถูกต้องของผลการคำนวณพิจารณาโดยการเปรียบเทียบกับงานวิจัยที่ผ่านมาในอดีต จากนั้นจึงนำเสนอผลของอัตราส่วนแอมพลิจูดที่มีต่อค่าความถี่พื้นฐานแบบไม่เป็นเชิงเส้น นอกจากนี้ ยังได้ตรวจสอบผลของความหนา แรงดันภายใน ค่าโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลว และเงื่อนไขของฐานรองรับที่มีต่อพฤติกรรมของการสันนิษฐานแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายในภายใต้เงื่อนไขของการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรกับการแปรเปลี่ยนค่ามุมที่รองรับส่วนโค้ง

คำสำคัญ : การสันนิษฐานแบบไม่เป็นเชิงเส้น / โครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลม / การจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตร / ทฤษฎีเมมเบรน / ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้น

* Corresponding Author : weeraphan.ji@muti.ac.th

¹ อาจารย์ สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์

² ศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์

Nonlinear Free Vibration of Internally Pressurized Axisymmetric Spherical Shell

Weeraphan Jiammeepreecha^{1*}

Rajamangala University of Technology Isan, Muang, Nakhon Ratchasima 30000

and Somchai Chucheeepsakul²

King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangmod, Thungkru, Bangkok 10140

Abstract

This paper reports the nonlinear free vibration behavior of internally pressurized axisymmetric spherical shell under volume constraint condition. The surface fundamental form in differential geometry is used to define the geometry of the spherical shell. The strain energy of the elastic thin shell is expressed based on the membrane theory. The energy functional of the shell and its internal pressure are derived from the principle of virtual work in terms of the shell displacement, and are written in the appropriate forms. In order to solve the time-dependent non-linear equation of motion, the equation is reduced to be a time-independent non-linear eigenvalue problem by defining the time-dependent function at the reversal point of motion or the point of maximum amplitude. The numerical solutions of natural frequencies and their mode shapes are also obtained by nonlinear finite element method coupled with the modified direct iteration technique. Acceptable agreement is observed in comparison with the published results. Moreover, the effect of amplitude ratio of the nonlinear fundamental frequency ratio is presented. Finally, the influences of thickness, internal pressure, bulk modulus and support condition on the nonlinear free vibration of internally pressurized spherical shell under a volume constraint condition with various opening angles are also investigated.

Keywords : Nonlinear Free Vibration / Axisymmetric Spherical Shell /
Volume Constraint Condition / Membrane Theory /
Nonlinear Finite Element Method

* Corresponding Author : weeraphan.ji@rmuti.ac.th

¹ Lecturer, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering and Architecture.

² Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering.

1. บทนำ

โครงสร้างสำหรับบรรจุของเหลวทั้งชนิดบีบอัดตัวได้และบีบอัดตัวไม่ได้ (compressible and incompressible fluids) ที่นิยมใช้ในปัจจุบันได้แก่ โครงสร้างเปลือกบางหรือผนังบาง (shell or thin-walled structures) ซึ่งโครงสร้างดังกล่าวมีความหนาแน่นน้อยมากเมื่อเทียบกับความยาวของโครงสร้าง และมีรูปร่างหลากหลายขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ในการใช้งาน อาทิ เช่น รูปทรงกลม รูปทรงรี รูปทรงแคปซูล และรูปทรงห้วงยาง เป็นต้น [1-5] อย่างไรก็ตามสำหรับโครงสร้างขนาดใหญ่บรรจุของเหลวที่มีแรงดันภายในสูงนิยมใช้โครงสร้างเปลือกบางที่มีรูปทรงกลม เนื่องจากโครงสร้างดังกล่าวเป็นโครงสร้างที่มีความสมมาตรตามแนวแกน (axisymmetric shell structures) และเมื่อรับแรงดันภายในจะส่งผลให้มีค่าความเค้นและระยะการเสียรูปมีขนาดเท่ากันทั้งในแนวเส้นพิกัดเมอร์ริเดียนและลองจิจูด (meridian and longitude coordinate lines) [6] แตกต่างจากโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงอื่นๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมสามารถนำมาใช้ในการติดตั้งใต้ทั้งบนพื้นดินและในทะเลลึกสำหรับงานทางด้านวิศวกรรมโครงสร้างและวิศวกรรมนอกชายฝั่งทะเล เป็นต้น เช่น โครงสร้างทรงโค้ง (dome structure) ซึ่งโครงสร้างดังกล่าวมีลักษณะเป็นรูปครึ่งทรงกลมที่มีฐานรองรับอยู่ในแนวตำแหน่งระนาบอิกเวเตอร์ (equatorial plane) [7-10] ดังนั้นเมื่อโครงสร้างรับแรงกระทำจากภายนอก เช่น แรงลม แรงแผ่นดินไหว หรือแรงกระทำจากคลื่นทะเล ซึ่งลักษณะของแรงกระทำดังกล่าวเป็นแบบพลศาสตร์ที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา ส่งผลทำให้การออกแบบโครงสร้างจึงมีความจำเป็นที่จะต้องพิจารณาค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างโดยต้องพิจารณาทั้งค่าความถี่ธรรมชาติแบบเชิงเส้นและแบบไม่เป็นเชิงเส้นเนื่องจากผลของการเสียรูปขนาดใหญ่ เพื่อเป็นการป้องกันความเสียหายที่เกิดขึ้นอันเนื่องมาจากปัญหาการสั่นพ้อง (resonance) ทำให้โครงสร้างเกิดความเสียหายจนไม่สามารถใช้งานต่อไปได้

จากการศึกษางานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์การสั่นของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมจะพบว่า Ross [11] และ Kunieda [12] ได้ทำการศึกษาค่าความถี่ธรรมชาติแบบสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบางโดยใช้การวิเคราะห์แบบวิธีประมาณ พบว่ามีค่าตอบใกล้เคียงกันกับงานวิจัยของ Kalnins [13]

ซึ่งใช้ฟังก์ชันลาเจนเดอร์ (Legendre function) ในการวิเคราะห์ปัญหา จากนั้น Ross และ Matthews [14] ได้ใช้วิธีการเดียวกันในการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นแบบสมมาตรตามแนวแกนสำหรับโครงสร้างรูปวงรี นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยของ Chung และ Lee [15] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางโดยใช้ชิ้นส่วนแบบวงแหวน (ring element) ในการจำลองโครงสร้าง ซึ่งงานวิจัยดังกล่าวข้างต้นจะทำการศึกษาเฉพาะผลลัพธ์เชิงตัวเลข ดังนั้น Duffey และคณะ [16] จึงได้ทำการทดสอบการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมโดยพิจารณาผลของความไม่สมบูรณ์ของโครงสร้าง พบว่าผลที่ได้จากการทดสอบมีค่าใกล้เคียงกับผลที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ABAQUS สำหรับการพิจารณาพฤติกรรมการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางที่มีผลของแรงเฉือนเข้ามาเกี่ยวข้องได้ถูกนำเสนอโดย Shin [17] โดยได้ทำการศึกษาการสั่นอิสระที่มีค่าแอมพลิจูดขนาดใหญ่ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมที่มีฐานรองรับอย่างง่ายโดยใช้ทฤษฎีการเสียรูปของแรงเฉือนอันดับหนึ่ง (first order shear deformation theory) ในการคำนวณ จากนั้น Panda และ Singh [18] ได้ทำการศึกษาการสั่นอิสระแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมโดยใช้ทฤษฎีการเสียรูปของแรงเฉือนที่มีระดับขั้นสูง (higher order shear deformation theory) ในการคำนวณ พบว่าผลของการพิจารณาการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนโดยใช้ทฤษฎีการเสียรูปอันดับที่แตกต่างกันจะส่งผลกระทบต่อค่าความถี่ธรรมชาติ นั่นคือเมื่อใช้ทฤษฎีการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนอันดับสูงจะให้ค่าความถี่ธรรมชาติสูงกว่าการใช้ทฤษฎีการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนอันดับหนึ่งในการวิเคราะห์ปัญหา นอกจากนี้วิธีการวิเคราะห์โดยวิธีประมาณและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แล้ว ในปัจจุบันการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางยังมีวิธี Generalized Differential Quadrature (G.Q.D.) ซึ่งได้ถูกพัฒนาโดย Artioli และ Viola [19] และวิธี Pseudospectral ซึ่งได้ถูกพัฒนาโดย Lee [20]

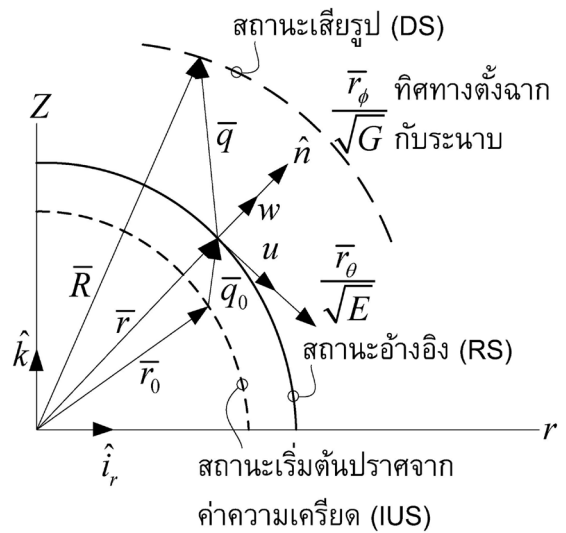
วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้ทำการศึกษาปัญหาการสั่นอิสระแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายในภายใต้เงื่อนไขของการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรโดยอาศัยทฤษฎีเมมเบรน (membrane theory) ในการสร้างพลังงาน

ความเครียดของโครงสร้างเปลือกบางเชิงยืดหยุ่น โครงสร้างเปลือกบางดังกล่าวแบ่งออกเป็น 3 สถานะคือสถานะเริ่มต้นปราศจากค่าความเครียด สถานะอ้างอิง และสถานะหลังการเสียรูป ตามลำดับ โดยพิจารณาค่าการเสียรูปและการหมุนขนาดใหญ่เข้าไปในระบบสมการด้วย การคำนวณหารูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมรับแรงดันภายในอาศัยหลักการของรูปแบบสมการพื้นฐานในเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ [21] หลักการพิจารณาดังกล่าวนี้ได้ถูกนำมาใช้ในการศึกษาพฤติกรรมของการเสียรูปทางสถิติศาสตร์ของโครงสร้างเปลือกบางสำหรับบรรจุของเหลวแรงดันสูงติดตั้งในทะเลลึก จากงานวิจัยของ Jiammeepreecha และคณะ [22-24] และเนื่องจากการพิจารณาเฉพาะการสันแบบสมมาตรตามแนวแกน ดังนั้นเส้นโค้งเมอร์ริเดียนได้นำมาใช้เป็นเส้นโค้งของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมเพื่อทำการศึกษ ซึ่งลักษณะปัญหาดังกล่าวสามารถเขียนเป็นฟังก์ชันพลังงานของโครงสร้างเปลือกบางและค่าแรงดันภายในได้จากหลักการของงานเสมือน (principle of virtual work) [25] ในเทอมของค่าการเสียรูปของโครงสร้างเปลือกบางและเขียนอยู่ในรูปแบบที่เหมาะสม (appropriate form) [26-27] การศึกษานี้ได้ตั้งสมมติฐานว่าความหนาแน่นของมวลของของเหลวที่บรรจุอยู่ภายใน (mass density of internal fluid) มีค่าน้อยมาก ๆ หรือของเหลวที่บรรจุอยู่ภายในมีสภาวะเป็นก๊าซ มีผลทำให้งานเสมือนเนื่องมาจากแรงเฉื่อยของของเหลวที่บรรจุอยู่ภายในมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับงานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อยของโครงสร้างเปลือกบาง ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงไม่พิจารณางานเสมือนเนื่องมาจากแรงเฉื่อยของของเหลวที่บรรจุอยู่ภายใน จุดสนใจของค่าแอมพลิจูดสูงสุดได้นำมาใช้ในการพิจารณาปัญหาค่าเจาะจงแบบไม่เป็นเชิงเส้น [28] ผลลัพธ์เชิงตัวเลขของค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นสามารถคำนวณได้โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้น [29] ร่วมกับเทคนิคการปรับกระบวนการทำซ้ำโดยตรง (modified direct iteration technique)

2. สมการสำหรับแบบจำลองโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม

สำหรับแบบจำลองที่ใช้ศึกษาพฤติกรรมของการสันนิษฐานแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายในภายใต้เงื่อนไข

ของการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตร สามารถแบ่งออกได้เป็น 3 สถานะคือสถานะเริ่มต้นปราศจากค่าความเครียด (initial unstrained state, IUS) เป็นสถานะของโครงสร้างเปลือกบางที่ยังไม่มีการบรรจุของเหลว จากนั้นเมื่อโครงสร้างเปลือกบางดังกล่าวถูกบรรจุด้วยของเหลวที่มีค่าแรงดันภายในคงที่ จะเรียกว่าสถานะอ้างอิง (reference state, RS) สามารถคำนวณหารูปทรงทางเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางได้โดยใช้วิธีการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางแบบดั้งเดิม [30] และสถานะสุดท้ายคือสถานะการเสียรูป (deformed state, DS) ของโครงสร้างเปลือกบางสำหรับบรรจุของเหลวภายใต้แรงกระทำจากภายนอก ดังแสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 1 เวกเตอร์ระบุตำแหน่งของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม

กำหนดให้ค่าพิกัดของพื้นผิวโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลม (spherical shell surface) สามารถนิยามได้จากสมการ

$$X(\theta, \phi) = a \sin \theta \cos \phi \quad (1)$$

$$Y(\theta, \phi) = a \sin \theta \sin \phi \quad (2)$$

$$Z(\theta, \phi) = a \cos \theta \quad (3)$$

โดยที่ θ และ ϕ คือค่าพารามิเตอร์ของพื้นผิว (surface parameters) ที่วัดตามแนวเส้นพิกัดเมอร์ริเดียนและลองจิจูดตามลำดับ กำหนดให้ $\bar{r} = \bar{r}(\theta, \phi)$ เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนพื้นผิวอ้างอิงที่จุด P นิยามได้จากสมการ

$$\bar{r}(\theta, \phi) = X(\theta, \phi)\hat{i} + Y(\theta, \phi)\hat{j} + Z(\theta, \phi)\hat{k} \quad (4)$$

และ $\bar{R} = \bar{R}(\theta, \phi, t)$ เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนพื้นผิวการเสียรูปที่อ้างอิงจากตำแหน่งของเวกเตอร์ระบุตำแหน่ง $\bar{r} = \bar{r}(\theta, \phi)$ สามารถนิยามได้จากสมการ

$$\bar{R}(\theta, \phi, t) = \bar{r}(\theta, \phi) + \bar{q}(\theta, \phi, t) \quad (5)$$

เมื่อ $\bar{q} = \bar{q}(\theta, \phi, t)$ คือเวกเตอร์ของการเคลื่อนที่ขึ้นกับเวลาใดๆ ซึ่งมีค่าดังสมการต่อไปนี้

$$\bar{q}(\theta, \phi, t) = \frac{\bar{r}_\theta}{\sqrt{E}}u + \hat{n}w \quad (6)$$

เมื่อ u และ w คือค่าการเสียรูปตามแนวเส้นเมอร์ริเดียนและแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน ตามลำดับ ในที่นี้ตัวห้อย θ และ ϕ แสดงถึงอนุพันธ์ย่อยตามแนวระบบพิกัดของโครงสร้างเปลือกบาง เนื่องจากเป็นปัญหาเฉพาะการสันแบบสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบาง ดังนั้นค่าการเสียรูปตามแนวเส้นลองจิจูดมีค่าเป็นศูนย์สำหรับค่าความเร็วและค่าความเร่งของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมสามารถคำนวณได้โดยการอนุพันธ์สมการที่ (5) เทียบกับเวลา (t) ดังนี้

$$\bar{V} = \dot{\bar{R}}(\theta, \phi, t) = \frac{\bar{r}_\theta}{\sqrt{E}}\dot{u} + \hat{n}\dot{w} \quad (7)$$

$$\bar{a} = \ddot{\bar{R}}(\theta, \phi, t) = \frac{\bar{r}_\theta}{\sqrt{E}}\ddot{u} + \hat{n}\ddot{w} \quad (8)$$

โดยที่ตัวยก (\cdot) จะแสดงถึงการอนุพันธ์ย่อยเทียบกับเวลา t

จากรูปแบบพื้นฐานอันดับหนึ่ง (first fundamental form) ของหลักการของเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (differential

geometry) [21] สามารถคำนวณส่วนประกอบของเมตริกซ์เทนเซอร์ (metric tensor components) ได้จากสมการ

$$E = \bar{r}_\theta \cdot \bar{r}_\theta = a^2 \quad (9)$$

$$F = \bar{r}_\theta \cdot \bar{r}_\phi = 0 \quad (10)$$

$$G = \bar{r}_\phi \cdot \bar{r}_\phi = a^2 \sin^2 \theta \quad (11)$$

จากรูปที่ 1 ถ้ากำหนดให้ \hat{n} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวตั้งฉากกับแนวเส้นเมอร์ริเดียนที่สถานะอ้างอิง สามารถนิยามได้จากสมการ

$$\hat{n} = \frac{\bar{r}_\theta \times \bar{r}_\phi}{D} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \quad (12)$$

ในที่นี้ $D = \sqrt{EG - F^2} = a^2 \sin \theta \quad (13)$

ดังนั้นรูปแบบพื้นฐานอันดับสอง (second fundamental form) ของพื้นผิวที่สถานะอ้างอิงสามารถนิยามได้ดังสมการต่อไปนี้

$$e = \bar{r}_{\theta\theta} \cdot \hat{n} = -a \quad (14)$$

$$f = \bar{r}_{\theta\phi} \cdot \hat{n} = 0 \quad (15)$$

$$g = \bar{r}_{\phi\phi} \cdot \hat{n} = -a \sin^2 \theta \quad (16)$$

3. ความเครียดกับระยะการเสียรูป

ค่าความเครียดแบบโททอลลากรองจ์ (total Lagrange strains) สามารถคำนวณได้จากการพิจารณาความยาวของชิ้นส่วนใดๆ บนพื้นผิวโครงสร้างเปลือกบางที่สถานะเริ่มต้นปราศจากค่าความเครียด (ds_0) สถานะอ้างอิง (ds) และสถานะการเสียรูป (ds^*) ดังสมการ

$$\varepsilon^L = \frac{1}{2} \frac{(ds^*)^2 - (ds_0)^2}{(ds_0)^2} = \varepsilon_0 \frac{ds^2}{ds_0^2} + \varepsilon \frac{ds^2}{ds_0^2} \quad (17)$$

$$\text{ในที่นี้} \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \frac{(ds)^2 - (ds_0)^2}{(ds)^2} \quad (18)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{(ds^*)^2 - (ds)^2}{(ds)^2} \quad (19)$$

สมการที่ (18) และ (19) สามารถเขียนได้ในเทอมของส่วนประกอบของเมตริกซ์เทนเซอร์ ดังนี้

$$\varepsilon_{0\theta} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) \quad (20)$$

$$\varepsilon_{0\phi} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{G_0}{G} \right) \quad (21)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{E^*}{E} - 1 \right) \quad (22)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{G^*}{G} - 1 \right) \quad (23)$$

กำหนดให้ $A = \sqrt{E}$ และ $B = \sqrt{G}$ ดังนั้นจากสมการที่ (22) และ (23) สามารถเขียนค่าความเครียดที่เพิ่มขึ้นในเทอมของการเสียรูปได้ดังนี้

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{A} u_0 - \frac{e}{A^2} w + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} u_0 - \frac{e}{A^2} w \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{A^2} u + \frac{1}{A} w_0 \right)^2 \quad (24)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{B_\theta}{AB} u - \frac{g}{B^2} w + \frac{1}{2} \left(\frac{B_\theta}{AB} u - \frac{g}{B^2} w \right)^2 \quad (25)$$

กำหนดให้ $\{g\}^T = [u \quad w \quad u_0 \quad w_0]$ ดังนั้นค่าความเครียดในสมการที่ (24) และ (25) สามารถแบ่งออกได้เป็นสองส่วนคือส่วนที่เป็นแบบเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น โดยสามารถเขียนได้ในรูปแบบดัชนี (index form) ดังนี้

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^L + \varepsilon_i^N = L_k^i g_k + \frac{1}{2} H_{kl}^i g_k g_l \quad (26)$$

เมื่อ L_k^i และ H_{kl}^i คือค่าเวกเตอร์และเมตริกซ์สมมาตร ตามลำดับ จากสมการที่ (17) ถึง (19) สามารถเขียนความสัมพันธ์ของค่าความเครียดแบบโทลลารองจี้ได้ดังสมการ

$$\{\varepsilon^L\} = [T](\{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon\}) \quad (27)$$

เมื่อ $[T]$ คือเมตริกซ์ในแนวทแยงระหว่างชิ้นส่วนกับวัสดุ (diagonal material-element matrix) สามารถเขียนได้ดังสมการ

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-2\varepsilon_{0\theta}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-2\varepsilon_{0\phi}} \end{bmatrix} \quad (28)$$

4. พลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบาง

พลังงานความเครียดสำหรับโครงสร้างเปลือกบางที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น (elastic thin shell) สามารถแสดงได้ดังสมการ

$$U = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{2\pi} \{\varepsilon^L\}^T [C'] \{\varepsilon^L\} \sqrt{(1-2\varepsilon_{0\theta})(1-2\varepsilon_{0\phi})} h D d\phi d\theta \quad (29)$$

$$\text{ในที่นี้} \quad [C'] = \frac{E'}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

เมื่อ $[C']$ คือเมตริกซ์คุณสมบัติของโครงสร้างเปลือกบาง

h คือความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง

E' คือโมดูลัสยืดหยุ่น

μ คืออัตราส่วนปัวส์ซอง

จากสมการที่ (29) สามารถเขียนค่าการแปรผันของพลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบาง δU ให้อยู่ในรูปแบบที่เหมาะสม [26] ได้จากสมการ

$$\delta U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta\{g\}^T \left[\{\varepsilon_0\} + \left([\tilde{c}] + [\tilde{k}] + \frac{1}{2}[\tilde{n}_1] + \frac{1}{3}[\tilde{n}_2] \right) \{g\} \right] d\theta \quad (31)$$

$$\text{ในที่นี้} \quad \{\tilde{c}_0\} = \begin{Bmatrix} [L_1] \\ [L_2] \end{Bmatrix}^T [C] \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_{0\theta}\} \\ \{\varepsilon_{0\phi}\} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

$$[\tilde{c}_1] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \varepsilon_{0j} C_{ij} [H_i] \quad (33)$$

$$[\tilde{k}] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 C_{ij} (\{L_i\} \{L_j\}^T) \quad (34)$$

$$[\tilde{n}_1] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 C_{ij} \left[(\{L_i\} \{\hat{g}\}^T) [H_j] + (\{\hat{g}\}^T \{L_i\}) [H_j] + [H_i] (\{\hat{g}\} \{L_j\}^T) \right] \quad (35)$$

$$[\tilde{n}_2] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 C_{ij} \left[[H_i] (\{\hat{g}\} \{\hat{g}\}^T) [H_j] + \frac{1}{2} (\{\hat{g}\}^T [H_j] \{\hat{g}\}) [H_i] \right] \quad (36)$$

5. พลังงานความเครียดของของเหลวที่มีค่าแรง ดันภายในคงที่

การเปลี่ยนแปลงปริมาตรของของเหลวที่มีค่าแรงดันภายในคงที่จากสถานะอ้างอิงไปยังสถานะการเสียรูปสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\Delta V = \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{2\pi} (\bar{R}_\theta \times \bar{R}_\phi \cdot \bar{R} - \bar{r}_\theta \times \bar{r}_\phi \cdot \bar{r}) d\phi d\theta \quad (37)$$

แทนค่าสมการที่ (4) และ (5) ลงในสมการที่ (37) ได้ว่า

$$\Delta V = \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{2\pi} (v_1 + v_2 + v_3) d\phi d\theta \quad (38)$$

$$\text{ในที่นี้} \quad v_1 = \left(B_\theta (\bar{r} \cdot \hat{n}) - \frac{Be}{A^2} (\bar{r} \cdot \bar{r}_\theta) \right) u + \left(-\frac{Ag}{B} (\bar{r} \cdot \hat{n}) - \frac{Be}{A} (\bar{r} \cdot \hat{n}) + AB \right) w \\ + (B(\bar{r} \cdot \hat{n})) u_\theta + \left(-\frac{B}{A} (\bar{r} \cdot \bar{r}_\theta) \right) w_\theta \quad (39)$$

$$v_2 = \left(-\frac{B_\theta e}{A^3} (\bar{r} \cdot \bar{r}_\theta) - \frac{Be}{A} \right) u^2 + \left(-\frac{B_\theta e}{A^2} (\bar{r} \cdot \hat{n}) + \frac{eg}{A^2 B} (\bar{r} \cdot \bar{r}_\theta) + B_\theta \right) u w \\ + \left(\frac{B_\theta}{A} (\bar{r} \cdot \hat{n}) \right) u u_\theta + \left(-\frac{B_\theta}{A^2} (\bar{r} \cdot \bar{r}_\theta) - B \right) u w_\theta + \left(\frac{eg}{AB} (\bar{r} \cdot \hat{n}) - \frac{Ag}{B} - \frac{Be}{A} \right) w^2 \\ + \left(-\frac{g}{B} (\bar{r} \cdot \hat{n}) + B \right) w u_\theta + \left(\frac{g}{AB} (\bar{r} \cdot \bar{r}_\theta) \right) w w_\theta \quad (40)$$

$$v_3 = \left(-\frac{B_\theta e}{A^2}\right)u^3 + \left(\frac{eg}{AB}\right)u^2w + \left(-\frac{B_\theta}{A}\right)u^2w_\theta + \left(\frac{g}{B}\right)uww_\theta \\ + \left(\frac{B_\theta}{A}\right)uu_\theta w + \left(-\frac{g}{B}\right)u_\theta w^2 + \left(-\frac{B_\theta e}{A^2}\right)uw^2 + \left(\frac{eg}{AB}\right)w^3 \quad (41)$$

จากสมการที่ (38) สามารถเขียนค่าการแปรผันของการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของของเหลว $\delta(\Delta V)$ ให้อยู่ในรูปแบบที่เหมาะสม [27] ได้จากสมการ

$$\delta(\Delta V) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta\{g\}^T \left[\{\tilde{v}_c\} + \left([\tilde{v}_k] + \frac{1}{2}[\tilde{v}_n]\right)\{g\} \right] d\theta \quad (42)$$

เมื่อ $\{\tilde{v}_c\}$, $[\tilde{v}_k]$ และ $[\tilde{v}_n]$ คือการเสียรูปในเทอมของเวกเตอร์การเคลื่อนที่ (displacement gradient vector) อันดับ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ ซึ่งสามารถนิยามได้จากสมการที่ (39) ถึง (41) สำหรับค่าพลังงานความเครียดของของเหลวที่มีค่าแรงดันภายในคงที่สามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\Gamma = \frac{1}{2}k_0 \left[\frac{\Delta V_{ow} + \Delta V}{V_{ow}} \right]^2 V_{ow} \quad (43)$$

เมื่อ k_0 คือโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลว
 V_{ow} คือปริมาตรของของเหลวที่สถานะเริ่มต้นปราศจากค่าความเครียด
 ΔV_{ow} คือการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของของเหลวภายในที่บรรจุจากสถานะเริ่มต้นไปยังสถานะอ้างอิง

จากสมการที่ (43) จะสามารถเขียนค่าการแปรผันของพลังงานความเครียดของเหลวที่มีค่าแรงดันภายในคงที่ $\delta\Gamma$ ได้จากสมการ

$$\delta\Gamma = -(p_0 + \lambda)\delta(\Delta V) \quad (44)$$

$$\text{ในที่นี้ } p_0 = -k_0 \left(\frac{\Delta V_{ow}}{V_{ow}} \right) \quad (45)$$

$$\lambda = -k_0 \left(\frac{\Delta V}{V_{ow}} \right) \quad (46)$$

เมื่อ p_0 คือค่าแรงดันภายในคงที่ที่สถานะอ้างอิง
 λ คือค่าการปรับเปลี่ยนแรงดันภายในจากสถานะอ้างอิงไปยังสถานะการเสียรูป

ดังนั้นจากความสัมพันธ์ของค่า p_0 และ λ จะได้เงื่อนไขของการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตร ดังสมการต่อไปนี้

$$\Delta V + \frac{V}{k_0 - p_0} \lambda = 0 \quad (47)$$

เมื่อ V คือปริมาตรของของเหลวที่สถานะอ้างอิง

6. งานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อยของโครงสร้างเปลือกบาง

งานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อยของโครงสร้างเปลือกบางสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\delta I = -2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\rho_s \ddot{u}\{\delta u\} + \rho_s \ddot{w}\{\delta w\}) h D d\theta \quad (48)$$

เมื่อ ρ_s คือความหนาแน่นของวัสดุโครงสร้างเปลือกบาง
 \ddot{u} คือเวกเตอร์ความเร่งของโครงสร้างเปลือกบางตามแนวเส้นเมอร์ริเดียน
 \ddot{w} คือเวกเตอร์ความเร่งของโครงสร้างเปลือกบางตามแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน

7. ผลรวมของงานเสมือน

แกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายในจะสมดุลเมื่อ $\delta\pi = 0$ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการ

จากหลักการของงานเสมือน [25] จะได้ว่าผลรวมของงานเสมือนของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนว

$$\delta U + \delta \Gamma - \delta I = 0 \tag{49}$$

แทนค่าจากสมการที่ (31), (44), และ (48) ลงในสมการที่ (49) ได้ว่า

$$\begin{aligned} & \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta \{g\}^T \left[\{\tilde{c}_0\} + \left([\tilde{c}_1] + [\tilde{k}] + \frac{1}{2}[\tilde{n}_1] + \frac{1}{3}[\tilde{n}_2] \right) \{g\} \right] d\theta \\ & - (p_0 + \lambda) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta \{g\}^T \left[\{\tilde{v}_c\} + \left([\tilde{v}_k] + \frac{1}{2}[\tilde{v}_n] \right) \{g\} \right] d\theta \\ & + 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\rho_s \ddot{u} \{\delta u\} + \rho_s \dot{w} \{\delta w\}) h D d\theta = 0 \end{aligned} \tag{50}$$

จากสมการที่ (50) ได้ว่าโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายในจะสมดุลที่สถานะอ้างอิง ดังนั้น λ และ $\{g\}$ จะมีค่าเป็นศูนย์ กล่าวคือ

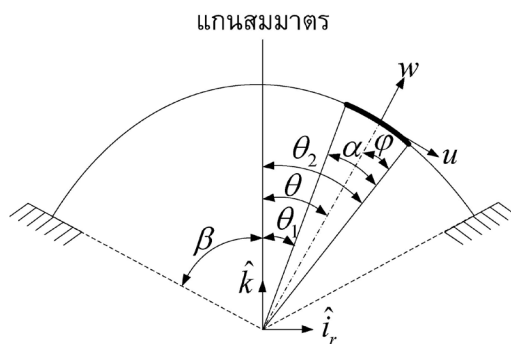
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta \{g\}^T [\{\tilde{c}_0\} - p_0 \{\tilde{v}_c\}] d\theta = 0 \tag{51}$$

โดยที่เงื่อนไขดังกล่าวข้างต้นต้องเป็นจริงและใช้ในการหาค่าความเครียดเริ่มต้น (ϵ_0)

8. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากผลรวมของงานเสมือนของระบบโครงสร้างเปลือกบางดังแสดงในสมการที่ (50) พบว่าไม่สามารถคำนวณหาผลเฉลยแบบแม่นยำตรงได้เนื่องจากสมการดังกล่าวประกอบไปด้วยเทอมโรมันติก่อนข้างสูง ดังนั้นจึงจำเป็นต้องอาศัย

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขคือวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) [29] ในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลข โดยการแบ่งชิ้นส่วนของโครงสร้างเปลือกบางตามแนวพิกัด θ ดังแสดงในรูปที่ 2 ได้ค่าประมาณการเสียรูปในแนวเส้นเมอร์ริเดียน u และแนวเส้นตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน w ดังสมการต่อไปนี้



รูปที่ 2 ชิ้นส่วนทั่วไปและระยะพิกัด

$$\{g\} = [\psi] \{d\} \quad (52)$$

$$\text{ในที่นี้} \quad \{d\}^T = [u(0) \quad w(0) \quad u_\theta(0) \quad w_\theta(0) \quad u(\alpha) \quad w(\alpha) \quad u_\theta(\alpha) \quad w_\theta(\alpha)] \quad (53)$$

เมื่อ $\{g\}$ คือเวกเตอร์การเคลื่อนที่ของจุดต่อ

$[\psi]$ คือเมตริกซ์ฟังก์ชันรูปร่างโพลีโนเมียลอันดับที่สาม

$\{d\}$ คือเวกเตอร์ของดีกรีอิสระที่จุดต่อ

ดังนั้นเมื่อแทนค่าในสมการที่ (52) ลงในสมการที่ (50) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \{\delta d\}^T \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T (\{\tilde{c}_0\} - (p_0 + \lambda)\{\tilde{v}_c\}) d\theta \\ & + \{\delta d\}^T \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T \left[[\tilde{c}_1] + [\tilde{k}] + \frac{1}{2}[\tilde{n}_1] + \frac{1}{3}[\tilde{n}_2] - (p_0 + \lambda) \left([\tilde{v}_k] + \frac{1}{2}[\tilde{v}_n] \right) \right] [\psi] d\theta \{d\} \\ & + 2\pi \{\delta u\}^T \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\psi_u\} \rho_s \{\psi_u\}^T h D d\theta + 2\pi \{\delta w\}^T \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\psi_w\} \rho_s \{\psi_w\}^T h D d\theta = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

สมการที่ (53) จะสามารถเขียนในรูปของสมการการเคลื่อนที่ (equation of motion) ของโครงสร้างเปลือกบางได้ดังนี้

$$[m]\{\ddot{d}\} + ([k] - [v])\{d\} = \{f\} \quad (55)$$

$$\text{ในที่นี้} \quad [m] = 2\pi \{\delta u\}^T \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\psi_u\} \rho_s \{\psi_u\}^T h D d\theta + 2\pi \{\delta w\}^T \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{\psi_w\} \rho_s \{\psi_w\}^T h D d\theta \quad (56)$$

$$[k] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T \left([\tilde{c}_1] + [\tilde{k}] + \frac{1}{2}[\tilde{n}_1] + \frac{1}{3}[\tilde{n}_2] \right) [\psi] d\theta \quad (57)$$

$$[v] = (p_0 + \lambda) \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T \left([\tilde{v}_k] + \frac{1}{2}[\tilde{v}_n] \right) [\psi] d\theta \quad (58)$$

$$\{f\} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\psi]^T (\{\tilde{c}_0\} - (p_0 + \lambda)\{\tilde{v}_c\}) d\theta \quad (59)$$

- เมื่อ $[m]$ คือเมตริกซ์มวลของชิ้นส่วนย่อย
 $[k]$ คือเมตริกซ์สติฟเนสแบบไม่เป็นเชิงเส้นของชิ้นส่วนย่อยเนื่องจากพลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบาง
 $[v]$ คือเมตริกซ์สติฟเนสแบบไม่เป็นเชิงเส้นของชิ้นส่วนย่อยเนื่องจากพลังงานความเครียดของของเหลวที่มีค่าแรงดันภายในคงที่
 $\{f\}$ คือเวกเตอร์แรงของชิ้นส่วนย่อย
 $\{d\}$ คือเวกเตอร์การเคลื่อนที่
 $\{\ddot{d}\}$ คือเวกเตอร์ความเร่ง

เนื่องจากดิกกรีอิสรระเฉพาะที่ (local degree of freedom) $\{d\}$ เหมือนกับดิกกรีอิสรระรวม (global degree of freedom) $\{D\}$ ดังนั้นผลรวมของงานเสมือนสำหรับระบบโครงสร้างเปลือกบางสามารถรวมได้โดยตรงโดยใช้สมการที่ (55) เขียนได้ดังนี้

$$[M]\{\ddot{D}\} + ([K] - [V])\{D\} = \{F\} \tag{60}$$

จากสมการที่ (47) ได้สมการเงื่อนไขของการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรดังนี้

$$\{D\}^T \{\Delta V\} + \frac{V}{k_0 - p_0} \lambda = 0 \tag{61}$$

ในที่นี้
$$\{\Delta V\} = \{VC\} + \left(\frac{1}{2}[VK] + \frac{1}{6}[VN] \right) \{D\} \tag{62}$$

จากสมการที่ (60) และ (61) สามารถเขียนรวมได้ในรูปของเมตริกซ์สมมาตรดังนี้

$$[\tilde{M}]\{\ddot{Q}\} + [\tilde{K}]\{Q\} = \{\tilde{F}\} \tag{63}$$

ในที่นี้
$$[\tilde{M}] = \begin{bmatrix} [M] & | & \{0\} \\ \hline \{0\}^T & | & 0 \end{bmatrix} \tag{64}$$

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} [K] - \left(\frac{\lambda}{2} + p_0\right)[VK] - \left(\frac{\lambda}{3} + \frac{p_0}{2}\right)[VN] & | & \{\Delta V\} \\ \hline \{ \Delta V \}^T & | & -\frac{V}{(k_0 - p_0)} \end{bmatrix} \tag{65}$$

$$\{\tilde{F}\} = \left\{ \frac{p_0 \{VC\} - \{C_0\}}{0} \right\} \quad (66)$$

$$\{Q\} = \left\{ \frac{\{D\}}{\lambda} \right\} \quad (67)$$

$$\{\ddot{Q}\} = \left\{ \frac{\{\ddot{D}\}}{0} \right\} \quad (68)$$

สำหรับการวิเคราะห์การสั่นอิสระแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายในทำได้โดยการกำหนดให้ $\{\tilde{F}\}$ ในสมการที่ (63) มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นการแก้ปัญหามหาสมการของการเคลื่อนที่แบบไม่เป็นเชิงเส้นที่ขึ้นกับเวลาทำได้โดยการลดรูปให้เป็นปัญหาค่าเจาะจงแบบไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear eigenvalue problem) โดยการนิยามคุณสมบัติของฟังก์ชันที่มีค่าขึ้นอยู่กับเวลา (time-dependent function) ที่จุดวกกลับ (reversal point) ของการเคลื่อนที่ [28] ดังสมการ

$$\{\ddot{Q}\}_{\max} = -\omega_n^2 \{Q\}_{\max} \quad (69)$$

ในที่นี้ $\{Q\}_{\max} = a_p \cdot \{\Lambda\} \quad (70)$

เมื่อ ω_n คือค่าความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ของโครงสร้างเปลือกบาง

a_p คือค่าแอมพลิจูด (amplitude) ของตำแหน่งที่สนใจ

$\{\Lambda\}$ คือค่าโหมดการสั่นที่ทำการปรับขนาด (normalized mode shape) ด้วยสมาชิกที่ตำแหน่งอ้างอิง

แทนค่าสมการที่ (69) ลงในสมการที่ (63) จะได้เมตริกซ์ของปัญหาค่าเจาะจงแบบไม่เป็นเชิงเส้นดังนี้

$$\left([\tilde{K}] - \omega_n^2 [\tilde{M}] \right) \{Q\}_{\max} = \{0\} \quad (71)$$

ตำแหน่งอ้างอิงที่ใช้ในการพิจารณาการสั่นอิสระแบบไม่เป็นเชิงเส้นของของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนนั้นเป็นตำแหน่งที่เปลี่ยนไปตามสภาวะการเคลื่อนที่ โดยที่ตำแหน่งอ้างอิงเป็นตำแหน่งสูงสุดของการเคลื่อนที่ของโครงสร้างเปลือกบาง ณ สภาวะที่ทำการศึกษาขณะนั้น

เนื่องจากเป็นปัญหาที่มีความสมมาตรตามแนวแกน ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่งบนสุดของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าดังนี้

$$u = w_\theta = 0 \quad (72)$$

สำหรับเงื่อนไขที่บริเวณฐานรองรับจะพิจารณาเป็นแบบยึดหมุนอย่างสมบูรณ์ โดยกำหนดให้

$$u = w = 0 \quad (73)$$

สำหรับเงื่อนไขที่บริเวณฐานรองรับจะพิจารณาเป็นแบบยึดแน่นอย่างสมบูรณ์ โดยกำหนดให้

$$u = w = w_\theta = 0 \quad (74)$$

โดยที่ปัญหาค่าเจาะจงแบบไม่เป็นเชิงเส้นดังแสดงในสมการที่ (71) จะต้องกำหนดเงื่อนไขขอบเขตเนื่องจากความสมมาตรตามแนวแกนจากสมการที่ (72) พร้อมทั้งเงื่อนไขของฐานรองรับจากสมการที่ (73) หรือ (74) จึงจะคำนวณหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขได้โดยใช้เทคนิคการปรับกระบวนการทำซ้ำโดยตรง

9. ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขและการอภิปรายผล

แบบจำลองของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายในได้ถูกพัฒนาขึ้นโดยอาศัยหลักการของงานเสมือนและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้น ในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขสำหรับค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นสำหรับคุณสมบัติของโครงสร้างเปลือกบางและของเหลวที่บรรจุ ดังแสดงในตารางที่ 1 จำเป็นต้องตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมโดย

เริ่มจากการทดสอบผลการคำนวณเพื่อหาค่าจำนวนชิ้นส่วนย่อยที่มีความเหมาะสมสำหรับค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear frequency parameters) ดังสมการ

$$\Omega_{NL} = \omega_n a \sqrt{\frac{\rho_s}{E'}} \quad (75)$$

จากรูปที่ 3 พบว่าจำนวนของชิ้นส่วนย่อยของโครงสร้างเปลือกบางมีผลต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้น

ซึ่งการใช้ชิ้นส่วนย่อยจำนวน 60 ชิ้นส่วนให้ค่าพารามิเตอร์ความถี่ที่ถูกต้องไม่มีการเปลี่ยนแปลงแม้จะใช้จำนวนชิ้นส่วนที่มีความละเอียดสูงกว่านี้ก็ตาม ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเลือกใช้จำนวนชิ้นส่วนเท่ากับ 60 ชิ้นส่วนเท่านั้นในการศึกษาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ดังแสดงในตารางที่ 1 ของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงกลมรับแรงดันภายในที่ส่งผลต่อความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นแบบไม่เป็นเชิงเส้น หลังจากนั้นทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมโดยเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดที่ 1 ถึง 5 ดังแสดงในตารางที่ 2 พบว่าค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้นของงาน

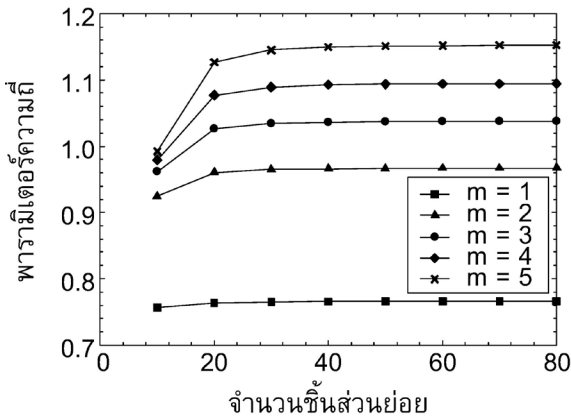
ตารางที่ 1 ข้อมูลและคุณสมบัติที่ใช้ในการวิเคราะห์

รายการ	สัญลักษณ์	ปริมาณ	หน่วย
ความยาวรัศมีของโครงสร้าง	a	3	เมตร
ความหนาของโครงสร้าง	h	0.03	เมตร
ความหนาแน่นของวัสดุ	ρ_s	7670	กิโลกรัม/เมตร ³
โมดูลัสยืดหยุ่น	E'	180×10^9	นิวตัน/เมตร ²
อัตราส่วนปัวส์ซอง	μ	0.3	
แรงดันภายในเริ่มต้น	p_0	1×10^7	นิวตัน/เมตร ²
โมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลว	k_0	∞	นิวตัน/เมตร ²

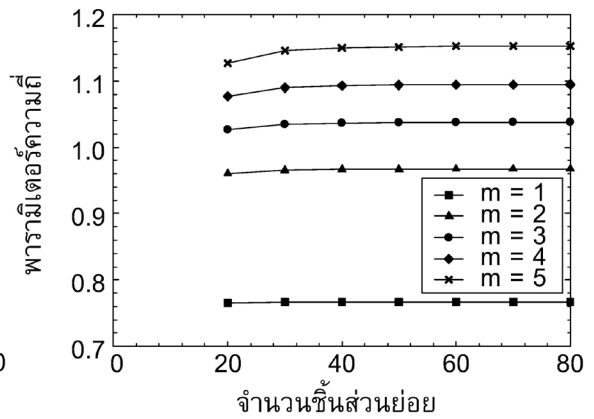
วิจัยนี้มีค่าใกล้เคียงกับผลที่ได้จากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ABAQUS [31] โดยใช้ชิ้นส่วนแบบจำลอง MAX2 ซึ่งเป็นการประมาณค่าการเคลื่อนที่แบบฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับสอง (axisymmetric quadratic membrane) ร่วมกับชิ้นส่วนที่มีค่าแรงดันแบบสถิต FAX2 ซึ่งมีค่าประมาณการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้น (linear fluid element) นอกจากนี้ยังพบว่ามีค่าสูงกว่าค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางที่ไม่บรรจุของเหลวเมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยของ Kunieda [12] และ Artioli และ Viola [19] และผลที่ได้จากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ABAQUS เมื่อใช้ชิ้นส่วนแบบจำลอง SAX2 ซึ่งเป็นการประมาณค่าการเคลื่อนที่แบบฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับสอง (axisymmetric quadratic shell) อย่างไรก็ตามโหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบาง

สำหรับบรรจุของเหลวจากงานวิจัยนี้เหมือนกับผลที่ได้จากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ABAQUS ใช้ชิ้นส่วนแบบจำลอง MAX2 ร่วมกับ FAX2 และงานวิจัยของ Artioli และ Viola [19] ดังแสดงในรูปที่ 4

จากข้อมูลที่แสดงในตารางที่ 1 จะทำการศึกษาผลของอัตราส่วนแอมพลิจูดที่มีต่อค่าความถี่พื้นฐานแบบไม่เป็นเชิงเส้น และผลของความหนา แรงดันภายใน ค่าโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลว และเงื่อนไขของฐานรองรับที่มีต่อการอิสระแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายในภายใต้เงื่อนไขของการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรกับการแปรเปลี่ยนค้ำมูมที่รองรับส่วนโค้ง โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้



ก) ฐานรองรับแบบยึดหมุน



ข) ฐานรองรับแบบยึดแน่น

รูปที่ 3 การลู่เข้าคำตอบของค่าพารามิเตอร์ความถี่ของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายใน

ตารางที่ 2 ผลการเปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ความถี่ของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลม

m	Kunieda	Artioli and	ABAQUS [31]		งานวิจัยนี้
	[12]	Viola [19]	SAX2	MAX2 กับ FAX1	
1	0.760	0.760	0.761	0.759	0.766
2	0.938	0.938	0.938	0.960	0.967
3	0.984	0.984	0.984	1.031	1.037
4	1.020	1.020	1.020	1.088	1.094
5	1.071	1.070	1.070	1.147	1.152

9.1 ผลของอัตราส่วนแอมพลิจูดที่มีต่อค่าอัตราส่วนความถี่พื้นฐานแบบไม่เป็นเชิงเส้น

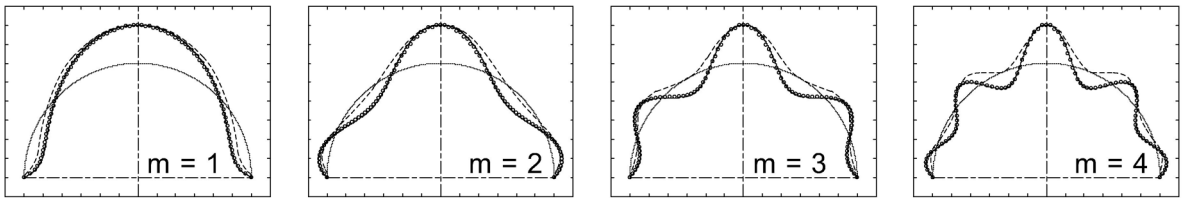
โดยทั่วไปงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสั่นอิสระแบบไม่เป็นเชิงเส้นจะนำเสนอผลการศึกษาในเทอมของค่าอัตราส่วนความถี่พื้นฐานแบบไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear fundamental frequency ratios, Ω_{NL}/Ω_L) ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างค่าความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้นต่อความถี่แบบเป็นเชิงเส้น ซึ่งในการวิเคราะห์โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้นร่วมกับเทคนิคการปรับกระบวนการทำซ้ำโดยตรงจะต้องกระทำจนกระทั่งค่าความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้น (Ω_{NL})

จากค่าความถี่ในโหมดที่ 1 ถึง 10 มีค่าอยู่ภายใต้เงื่อนไขการลู่เข้า (convergence criteria) ดังสมการต่อไปนี้

$$|Q_i - Q_{i-1}| < 10^{-5} |Q_i| \tag{76}$$

$$|Q_i| < 10^{-10} \tag{77}$$

ตารางที่ 3 และ 4 แสดงผลของอัตราส่วนความถี่ Ω_{NL}/Ω_L สำหรับค่าอัตราส่วนแอมพลิจูดต่างๆ ($a_p/h = \pm 2, 4, 6, 8$ และ 10) กับค่ามุมที่รองรับส่วนโค้ง ($\beta = 30, 45, 60$ และ 90 องศา) ของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตร



สัญลักษณ์ : — งานวิจัยนี้ ◦ ABAQUS [31] ---- Artioli and Viola [19]

รูปที่ 4 การเปรียบเทียบโหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายใน

ตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายในภายใต้เงื่อนไขของการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรสำหรับฐานรองรับแบบยึดหมุนและแบบยึดแน่น ตามลำดับ สำหรับค่าแอมพลิจูด (a_p) ที่มีค่าเป็นบวกและลบแสดงให้เห็นโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายในเริ่มการแกว่งด้านในและด้านนอก ตามลำดับ จากตารางที่ 3 และ 4 สังเกตได้ว่าค่าอัตราส่วนแอมพลิจูด (a/h) ไม่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงค่าอัตราส่วนความถี่

Ω_{NL}/Ω_L ภายใต้เงื่อนไขการลู่เข้าดังแสดงในสมการที่ (76) และ (77) นั่นคือค่าของ Ω_{NL}/Ω_L มีความแตกต่างของผลลัพธ์ตั้งแต่ทศนิยมหลักที่ 7 เป็นต้นไป ในขณะที่การหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขแบบไม่เป็นเชิงเส้นโดยใช้เทคนิคการปรับกระบวนการทำซ้ำโดยตรงให้ความถูกต้องของคำตอบที่ตำแหน่งทศนิยมหลักที่ 6 ดังนั้นผลการศึกษาในครั้งนี้แสดงให้เห็นว่าค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลม

ตารางที่ 3 ผลของอัตราส่วนแอมพลิจูดที่มีต่ออัตราส่วนความถี่พื้นฐานแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางที่มีฐานรองรับแบบยึดหมุน

a_p	Ω_{NL}/Ω_L			
	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 60^\circ$	$\beta = 90^\circ$
h				
2	1.001 438 37	1.001 787 19	1.002 100 98	1.002 711 92
4	1.001 438 36	1.001 787 17	1.002 100 97	1.002 711 92
6	1.001 438 35	1.001 787 21	1.002 100 96	1.002 711 93
8	1.001 438 34	1.001 787 22	1.002 100 96	1.002 711 91
10	1.001 438 33	1.001 787 23	1.002 101 01	1.002 711 91
-2	1.001 438 40	1.001 787 18	1.002 100 98	1.002 711 93
-4	1.001 438 36	1.001 787 20	1.002 100 97	1.002 711 92
-6	1.001 438 42	1.001 787 16	1.002 100 96	1.002 711 91
-8	1.001 438 34	1.001 787 22	1.002 100 96	1.002 711 91
-10	1.001 438 33	1.001 787 23	1.002 101 01	1.002 711 91
Ω_L	1.101 151 40	1.001 307 92	0.928 413 23	0.763 822 54

ตารางที่ 4 ผลของอัตราส่วนแอมพลิจูดที่มีต่อค่าอัตราส่วนความถี่พื้นฐานแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น

$\frac{a_p}{h}$	Ω_{NL}/Ω_L			
	$\beta = 30^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 60^\circ$	$\beta = 90^\circ$
2	1.001 436 77	1.001 785 08	1.002 098 39	1.002 707 23
4	1.001 436 74	1.001 785 08	1.002 098 40	1.002 707 22
6	1.001 436 73	1.001 785 12	1.002 098 40	1.002 707 24
8	1.001 436 71	1.001 785 13	1.002 098 41	1.002 707 22
10	1.001 436 70	1.001 785 14	1.002 098 36	1.002 707 21
-2	1.001 436 75	1.001 785 08	1.002 098 39	1.002 707 23
-4	1.001 436 74	1.001 785 11	1.002 098 40	1.002 707 24
-6	1.001 436 80	1.001 785 07	1.002 098 40	1.002 707 22
-8	1.001 436 71	1.001 785 06	1.002 098 36	1.002 707 25
-10	1.001 436 70	1.001 785 14	1.002 098 41	1.002 707 25
Ω_L	1.101 704 19	1.001 738 37	0.928 927 86	0.764 708 50

รับแรงดันภายในภายใต้เงื่อนไขของการจำกัดการเปลี่ยนแปลง ปริมาตรจะไม่ขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงค่าอัตราส่วนแอมพลิจูด ซึ่งแตกต่างจากงานวิจัยของ Shin [17], Panda และ Singh [18] และ Sathyamoorthy [32] ที่เป็นการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางโดยทั่วไปโดยไม่มีการพิจารณาเงื่อนไขของการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตร นอกจากนี้ยังพบว่าค่าพารามิเตอร์ความถี่พื้นฐานแบบไม่เป็นเชิงเส้นจะมีค่ามากกว่าค่าพารามิเตอร์ความถี่พื้นฐานแบบเป็นเชิงเส้นสำหรับทุกค่าอัตราส่วนแอมพลิจูด

9.2 ผลของความหนาที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้น

การเปลี่ยนแปลงความหนาของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายในภายใต้เงื่อนไขของการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรกับการแปรเปลี่ยนค่ามุมที่รองรับส่วนโค้งที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่สามารถทำการศึกษได้โดยการปรับเปลี่ยนค่าอัตราส่วน

ความยาวรัศมีต่อความหนาของโครงสร้างเปลือกบางจาก 25 ไปจนถึง 300 โดยที่ค่ารัศมีของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าคงที่ไม่มีเปลี่ยนแปลง ซึ่งจากผลการศึกษาพบว่าค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้นมีค่าลดลงเมื่อค่ามุมที่รองรับส่วนโค้งมีค่าเพิ่มสูงขึ้น และค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้นมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่อค่าอัตราส่วนความยาวรัศมีต่อความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง หรือกล่าวได้ว่าค่าความถี่ธรรมชาติแบบไม่เป็นเชิงเส้นมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่อความหนาของโครงสร้างมีค่าลดลงดังแสดงในตารางที่ 5 และ 6 สำหรับโครงสร้างเปลือกบางที่มีฐานรองรับแบบยึดหมุนและยึดแน่น ตามลำดับ

9.3 ผลของแรงดันภายในที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้น

สำหรับการศึกษาค่าแรงดันภายในที่ส่งผลกระทบท่ต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดัน

ภายในภายใต้เงื่อนไขของการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรกับการแปรเปลี่ยนค่ามุมที่รองรับส่วนโค้งสามารถทำการศึกษาได้โดยการปรับเปลี่ยนค่าอัตราส่วนแรงดันภายในต่อโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างเปลือกบางจาก 3×10^{-5} ถึง 7×10^{-5} โดยที่ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างเปลือกบางไม่มีการเปลี่ยนแปลง ซึ่งผลการศึกษาระบุแสดงในตารางที่ 7 และ 8 สำหรับโครงสร้างเปลือกบางที่มีฐานรองรับแบบยึดหมุนและยึดแน่น ตามลำดับ พบว่าค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้นมีค่าลดลงเมื่อค่ามุมที่รองรับส่วนโค้งมีค่า

เพิ่มสูงขึ้นเหมือนกับกรณีผลของความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง และค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้นมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่อค่าอัตราส่วนแรงดันภายในต่อโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าเพิ่มสูงขึ้น

9.4 ผลของโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลวที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้น
สำหรับการศึกษาในส่วนสุดท้ายซึ่งเป็นค่าพารามิเตอร์ที่มีความสำคัญเนื่องจากการเป็นการศึกษาผลของโมดูลัสเชิง

ตารางที่ 5 ผลของการแปรเปลี่ยนความหนาที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้น (Ω_{NL}) ของโครงสร้างเปลือกบางที่มีฐานรองรับแบบยึดหมุน

β	m	a/h				
		25	50	100	200	300
30°	1	1.0087	1.0412	1.1027	1.2162	1.3200
	2	1.0775	1.1574	1.3025	1.5526	1.7676
	3	1.1539	1.2934	1.5347	1.9286	2.2547
	4	1.2437	1.4494	1.7912	2.3286	2.7635
	5	1.3456	1.6210	2.0639	2.7430	3.2845
45°	1	0.9570	0.9732	1.0031	1.0590	1.1118
	2	1.0204	1.0583	1.1301	1.2616	1.3806
	3	1.0632	1.1321	1.2585	1.4791	1.6708
	4	1.1097	1.2155	1.4031	1.7177	1.9830
	5	1.1624	1.3093	1.5617	1.9716	2.3099
60°	1	0.9002	0.9113	0.9304	0.9647	0.9970
	2	0.9893	1.0116	1.0538	1.1334	1.2078
	3	1.0245	1.0653	1.1417	1.2809	1.4065
	4	1.0556	1.1193	1.2362	1.4417	1.6213
	5	1.0887	1.1789	1.3405	1.6155	1.8499
90°	1	0.7469	0.7543	0.7659	0.7852	0.8023
	2	0.9345	0.9464	0.9670	1.0051	1.0414
	3	0.9811	1.0010	1.0375	1.1059	1.1704
	4	1.0061	1.0370	1.0942	1.1995	1.2963
	5	1.0264	1.0706	1.1518	1.2983	1.4296

ตารางที่ 6 ผลของการแปรเปลี่ยนความหนาที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้น (Ω_{NL}) ของโครงสร้างเปลือกบางที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น

β	m	a/h				
		25	50	100	200	300
30°	1	1.0090	1.0415	1.1033	1.2172	1.3212
	2	1.0778	1.1580	1.3036	1.5544	1.7699
	3	1.1544	1.2944	1.5364	1.9313	2.2582
	4	1.2445	1.4509	1.7935	2.3323	2.7680
	5	1.3467	1.6227	2.0668	2.7474	3.2900
45°	1	0.9572	0.9735	1.0035	1.0597	1.1126
	2	1.0206	1.0586	1.1307	1.2626	1.3820
	3	1.0634	1.1326	1.2594	1.4807	1.6729
	4	1.1100	1.2163	1.4044	1.7199	1.9858
	5	1.1629	1.3102	1.5634	1.9743	2.3133
60°	1	0.9006	0.9118	0.9309	0.9654	0.9977
	2	0.9895	1.0119	1.0542	1.1341	1.2088
	3	1.0247	1.0656	1.1423	1.2820	1.4079
	4	1.0558	1.1198	1.2371	1.4432	1.6232
	5	1.0890	1.1795	1.3416	1.6173	1.8524
90°	1	0.7476	0.7551	0.7668	0.7861	0.8033
	2	0.9347	0.9467	0.9673	1.0056	1.0421
	3	0.9812	1.0012	1.0378	1.1065	1.1712
	4	1.0062	1.0372	1.0946	1.2003	1.2974
	5	1.0265	1.0709	1.1524	1.2993	1.4310

ปริมาตรของของเหลวที่ส่งผลกระทบต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายในภายใต้เงื่อนไขของการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรกับการแปรเปลี่ยนค่ามุมที่รองรับส่วนโค้ง ซึ่งการศึกษาในส่วนนี้ถือว่ายังมีน้อยมากเพราะของเหลวแต่ละชนิดจะมีค่าโมดูลัสเชิงปริมาตรที่แตกต่างกัน โดยทำการปรับเปลี่ยนค่าอัตราส่วนโมดูลัสเชิงปริมาตรต่อโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างเปลือก

บางจาก 0.005 ถึง 0.025 โดยที่ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างเปลือกบางไม่มีการเปลี่ยนแปลง ซึ่งผลการศึกษาก็จะแสดงในตารางที่ 9 และ 10 สำหรับโครงสร้างเปลือกบางที่มีฐานรองรับแบบยึดหมุนและยึดแน่น ตามลำดับ ซึ่งจากการศึกษาแสดงให้เห็นว่าค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้นมีค่าลดลงเมื่อค่ามุมที่รองรับส่วนโค้งมีค่าเพิ่มสูงขึ้น และค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้นมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเมื่ออัตราส่วนโมดูลัสเชิงปริมาตรต่อโมดูลัสยืดหยุ่น

ตารางที่ 7 ผลของการแปรเปลี่ยนแรงดันภายในที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้น (Ω_{NL}) ของโครงสร้างเปลือกบางที่มีฐานรองรับแบบยึดหมุน

β	m	P_0 / E'				
		3×10^{-5}	4×10^{-5}	5×10^{-5}	6×10^{-5}	7×10^{-5}
30°	1	1.0463	1.0687	1.0907	1.1122	1.1334
	2	1.1697	1.2234	1.2749	1.3243	1.3719
	3	1.3143	1.4047	1.4895	1.5698	1.6462
	4	1.4797	1.6088	1.7283	1.8399	1.9453
	5	1.6607	1.8291	1.9832	2.1262	2.2602
45°	1	0.9757	0.9866	0.9973	1.0077	1.0180
	2	1.0642	1.0905	1.1161	1.1412	1.1657
	3	1.1428	1.1894	1.2343	1.2776	1.3194
	4	1.2316	1.3014	1.3677	1.4308	1.4913
	5	1.3312	1.4259	1.5146	1.5984	1.6780
60°	1	0.9129	0.9200	0.9267	0.9332	0.9396
	2	1.0151	1.0304	1.0455	1.0604	1.0750
	3	1.0716	1.0996	1.1268	1.1535	1.1795
	4	1.1291	1.1722	1.2138	1.2539	1.2928
	5	1.1927	1.2526	1.3098	1.3645	1.4171
90°	1	0.7553	0.7597	0.7637	0.7676	0.7712
	2	0.9481	0.9557	0.9630	0.9701	0.9771
	3	1.0040	1.0173	1.0304	1.0431	1.0557
	4	1.0418	1.0627	1.0830	1.1030	1.1225
	5	1.0774	1.1072	1.1361	1.1642	1.1917

ของโครงสร้างเปลือกบางมีค่าเพิ่มสูงขึ้น

9.5 ผลของเงื่อนไขของฐานรองรับที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้น

จากผลการศึกษาดังแสดงในตารางที่ 5 ถึง 10 แสดงให้เห็นว่าการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของฐานรองรับจะส่งผลกระทบต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลม

รับแรงดันภายในภายใต้เงื่อนไขของการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรน้อยมาก นอกจากนี้ยังพบว่าค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่นมีค่าสูงกว่าโครงสร้างเปลือกบางที่มีฐานรองรับแบบยึดหมุนอยู่เพียงเล็กน้อย

10. สรุปผลการศึกษา

การศึกษาพฤติกรรมกรรมการสั่นอิสระแบบไม่เป็นเชิงเส้น

ตารางที่ 8 ผลของการแปรเปลี่ยนแรงดันภายในที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้น (Ω_{NL}) ของโครงสร้างเปลือกบางที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น

β	m	P_0 / E'				
		3×10^{-5}	4×10^{-5}	5×10^{-5}	6×10^{-5}	7×10^{-5}
30°	1	1.0466	1.0692	1.0912	1.1128	1.1340
	2	1.1703	1.2242	1.2758	1.3254	1.3732
	3	1.3154	1.4060	1.4911	1.5716	1.6482
	4	1.4812	1.6106	1.7304	1.8424	1.9480
	5	1.6626	1.8314	1.9859	2.1293	2.2635
45°	1	0.9760	0.9870	0.9977	1.0082	1.0185
	2	1.0646	1.0909	1.1166	1.1418	1.1664
	3	1.1433	1.1901	1.2351	1.2785	1.3205
	4	1.2324	1.3024	1.3689	1.4322	1.4929
	5	1.3323	1.4272	1.5161	1.6001	1.6799
60°	1	0.9134	0.9205	0.9272	0.9338	0.9402
	2	1.0153	1.0308	1.0459	1.0608	1.0755
	3	1.0719	1.1000	1.1274	1.1541	1.1802
	4	1.1296	1.1729	1.2145	1.2548	1.2938
	5	1.1933	1.2534	1.3108	1.3657	1.4184
90°	1	0.7561	0.7606	0.7646	0.7685	0.7721
	2	0.9484	0.9560	0.9634	0.9705	0.9775
	3	1.0042	1.0176	1.0307	1.0435	1.0562
	4	1.0420	1.0630	1.0834	1.1034	1.1231
	5	1.0777	1.1076	1.1366	1.1648	1.1924

โดยใช้แบบจำลองของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายในได้ถูกพัฒนาขึ้นโดยอาศัยหลักการของงานเสมือนและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เป็นเชิงเส้น ในการหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขสำหรับค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายในภายใต้เงื่อนไขของการจำกัดการเปลี่ยนแปลงปริมาตร สามารถสรุปได้ดังนี้

1. โหมดการสั่นแบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายในคล้ายคลึงกับโหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางที่ไม่มีแรงดันภายใน
2. ค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายในมีค่าเป็นสัดส่วนผกผันกับค่ามุมที่รองรับส่วนโค้ง

ตารางที่ 9 ผลของการแปรเปลี่ยนโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลวที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้น (Ω_{NL}) ของโครงสร้างเปลือกบางที่มีฐานรองรับแบบยึดหมุน

β	m	k_0 / E'				
		0.005	0.010	0.015	0.020	0.025
30°	1	1.1010	1.1015	1.1018	1.1020	1.1021
	2	1.2984	1.2999	1.3006	1.3010	1.3013
	3	1.5262	1.5297	1.5312	1.5320	1.5325
	4	1.7720	1.7822	1.7853	1.7869	1.7877
	5	1.9996	2.0459	2.0541	2.0572	2.0588
45°	1	1.0025	1.0027	1.0028	1.0029	1.0029
	2	1.1292	1.1295	1.1296	1.1297	1.1298
	3	1.2570	1.2575	1.2578	1.2579	1.2580
	4	1.4006	1.4016	1.4020	1.4022	1.4024
	5	1.5576	1.5594	1.5601	1.5605	1.5607
60°	1	0.9300	0.9301	0.9302	0.9302	0.9302
	2	1.0535	1.0536	1.0536	1.0537	1.0537
	3	1.1412	1.1414	1.1415	1.1415	1.1416
	4	1.2355	1.2358	1.2359	1.2360	1.2360
	5	1.3394	1.3398	1.3400	1.3401	1.3401
90°	1	0.7657	0.7657	0.7658	0.7658	0.7658
	2	0.9669	0.9669	0.9669	0.9669	0.9669
	3	1.0374	1.0374	1.0374	1.0374	1.0374
	4	1.0940	1.0941	1.0941	1.0941	1.0941
	5	1.1516	1.1517	1.1517	1.1518	1.1518

3. การแปรเปลี่ยนค่าอัตราส่วนของอัตราส่วนความถี่พื้นฐานแบบไม่เป็นเชิงเส้นไม่ส่งผลต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้นของโครงสร้างเปลือกบางแบบสมมาตรตามแนวแกนรูปทรงกลมรับแรงดันภายใน ในขณะที่การเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของฐานรองรับส่งผลต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้นน้อยมาก เมื่อเปรียบเทียบกับ การเปลี่ยนแปลงความหนาของโครงสร้างเปลือกบาง แรงดันภายใน และโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลว

11. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนจากสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย สำหรับโครงการปริญญาเอกกาญจนาภิเษก ต่อยอด (สัญญาเลขที่ RAP59K0014) ที่ได้สนับสนุนงานวิจัย ในครั้งนี้ ผู้วิจัยลำดับที่ 1 ขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี และผู้วิจัยลำดับที่ 2 ขอขอบคุณโครงการทุนพัฒนาศักยภาพการวิจัยเชิงสถาบันของสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัยและมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ที่ได้สนับสนุนการวิจัยจนสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ตารางที่ 10 ผลของการแปรเปลี่ยนโมดูลัสเชิงปริมาตรของของเหลวที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่แบบไม่เป็นเชิงเส้น (Ω_{NL}) ของโครงสร้างเปลือกบางที่มีฐานรองรับแบบยึดแน่น

β	m	k_0 / E'				
		0.005	0.010	0.015	0.020	0.025
30°	1	1.1015	1.1021	1.1024	1.1025	1.1027
	2	1.2995	1.3009	1.3016	1.3021	1.3023
	3	1.5277	1.5313	1.5328	1.5336	1.5341
	4	1.7739	1.7843	1.7876	1.7891	1.7900
	5	2.0004	2.0484	2.0569	2.0600	2.0617
45°	1	1.0030	1.0031	1.0032	1.0033	1.0033
	2	1.1298	1.1301	1.1302	1.1303	1.1304
	3	1.2579	1.2584	1.2587	1.2588	1.2589
	4	1.4019	1.4028	1.4033	1.4035	1.4037
	5	1.5592	1.5610	1.5617	1.5621	1.5624
60°	1	0.9305	0.9306	0.9307	0.9307	0.9307
	2	1.0539	1.0540	1.0540	1.0541	1.0541
	3	1.1418	1.1420	1.1421	1.1421	1.1421
	4	1.2363	1.2366	1.2367	1.2368	1.2368
	5	1.3404	1.3409	1.3410	1.3411	1.3412
90°	1	0.7665	0.7666	0.7666	0.7667	0.7667
	2	0.9672	0.9673	0.9673	0.9673	0.9673
	3	1.0377	1.0377	1.0378	1.0378	1.0378
	4	1.0944	1.0945	1.0945	1.0945	1.0945
	5	1.1522	1.1522	1.1523	1.1523	1.1523

12. เอกสารอ้างอิง

- Clark, R.A. and Reissner, E., 1957, "On Stresses and Deformations of Ellipsoidal Shells Subject to Internal Pressure," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6 (1), pp. 63-70.
- Niordson, F.I., 1984, "Free Vibrations of Thin Elastic Spherical Shells," *International Journal of Solids and Structures*, 20 (7), pp. 667-684.
- Fu, K. and Harb, A., 1990, "Integral Equation Method for Spherical Shell under Axisymmetric Loads," *Journal of Engineering Mechanics*, 116 (2), pp. 309-323.
- Fang, Z., 1992, "Free Vibration of Fluid-Filled Toroidal Shells," *Journal of Sound and Vibration*, 155 (2), pp. 343-352.
- Wang, X.H. and Redekop, D., 2005, "Natural Frequencies and Mode Shapes of an Orthotropic Thin

Shell of Revolution," *Thin-Walled Structures*, 43 (5), pp. 735-750.

6. Young, W.C. and Budynas, R.G., 2002, *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 7th ed., McGraw-Hill, New York.

7. Yasuzawa, Y., 1993, "Structural Response of Underwater Half Drop Shaped Shell," *Proceedings of the 3rd International Offshore and Polar Engineering Conference*, 6-11 June 1993, Singapore, pp. 475-481.

8. Wu, Y.C. and Heyliger, P., 2001, "Free Vibration of Layered Piezoelectric Spherical Caps," *Journal of Sound and Vibration*, 245 (3), pp. 527-544.

9. Phadke, A.C. and Cheung, K.F., 2003, "Nonlinear Response of Fluid-Filled Membrane in Gravity Waves," *Journal of Engineering Mechanics*, 129 (7), pp. 739-750.

10. Jiammeepreecha, W., Chucheepsakul, S. and Huang, T., 2012, "Nonlinear Static Analysis of Deep Water Axisymmetric Half Drop Shell Storage Container with Constrained Volume," *Proceedings of the 22nd International Offshore and Polar Engineering Conference*, 17-22 June 2012, Rhodes, Greece, pp. 863-871.

11. Ross Jr, E.W., 1964, "Natural Frequencies and Mode Shapes for Axisymmetric Vibration of Deep Spherical Shells," *Journal of Applied Mechanics*, 32 (3), pp. 553-561.

12. Kunieda, H., 1984, "Flexural Axisymmetric Free Vibrations of a Spherical Dome : Exact Results and Approximate Solutions," *Journal of Sound and Vibration*, 92 (1), pp. 1-10.

13. Kalnins, A., 1964, "Effect of Bending on Vibrations of Spherical Shells," *Journal of the Acoustical Society of America*, 36 (1), pp. 74-81.

14. Ross Jr, E.W. and Matthews, W.T., 1967, "Frequencies and Mode Shapes for Axisymmetric Vibration of Shells," *Journal of Applied Mechanics*, 34 (1), pp. 73-80.

15. Chung, J. and Lee, J.M., 1999, "Vibration Analysis of a Nearly Axisymmetric Shell Structure Using a New

Finite Ring Element," *Journal of Sound and Vibration*, 219 (1), pp. 35-50.

16. Duffey, T.A., Pepin, J.E., Robertson, A.N., Steinzig, M.L. and Coleman, K., 2007, "Vibrations of Complete Spherical Shells with Imperfections," *Journal of Vibration and Acoustics*, 129 (3), pp. 363-370.

17. Shin, D.K., 1997, "Large Amplitude Free Vibration Behavior of Doubly Curved Shallow Open Shells with Simply-Supported Edges," *Computers and Structures*, 62 (1), pp. 35-49.

18. Panda, S.K. and Singh, B.N., 2009, "Nonlinear Free Vibration of Spherical Shell Panel Using Higher Order Shear Deformation Theory - A Finite Element Approach," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 86 (6), pp. 373-383.

19. Artioli, E. and Viola, E., 2006, "Free Vibration Analysis of Spherical Shells Using a G.D.Q. Numerical Solution," *Journal of Pressure Vessel Technology*, 128 (3), pp. 370-378.

20. Lee, J., 2009, "Free Vibration Analysis of Spherical Caps by the Pseudospectral Method," *Journal of Mechanical Science and Technology*, 23 (1), pp. 221-228.

21. Langhaar, H.L., 1964, *Foundations of Practical Shell Analysis*, Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois.

22. Jiammeepreecha, W., Chucheepsakul, S. and Huang, T., 2014, "Nonlinear Static Analysis of Deep Water Axisymmetric Spherical Half Drop Shell," *KMUTT Research and Development Journal*, 37 (2), pp. 239-255. (In Thai)

23. Jiammeepreecha, W., Chucheepsakul, S. and Huang, T., 2014, "Nonlinear Static Analysis of an Axisymmetric Shell Storage Container in Spherical Polar Coordinates with Constraint Volume," *Engineering Structures*, 68, pp. 111-120.

24. Jiammeepreecha, W., Chucheepsakul, S. and Huang, T., 2015, "Parametric Study of an Equatorially Anchored Deepwater Fluid-Filled Periodic Symmetric Shell with Constraint Volume," *Journal of Engineering Mechanics*, 141 (8), pp. 04015019-1-13.
25. Langhaar, H.L., 1962, *Energy Methods in Applied Mechanics*, John Wiley and Sons, New York.
26. Rajasekaran, S. and Murray, D.W., 1973, "Incremental Finite Element Matrices," *Journal of the Structural Division*, 99 (120), pp. 2423-2438.
27. Chen, J.S. and Huang, T., 1985, "Appropriate Forms in Nonlinear Analysis," *Journal of Engineering Mechanics*, 110 (10), pp. 1215-1226.
28. Prathap, G. and Varadan, T.K., 1978, "The Large Amplitude Vibration of Hinged Beams," *Computer and Structures*, 9 (2), pp. 219-222.
29. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E. and Witt, R.J., 2002, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4th ed., John Wiley and Sons, New York.
30. Flügge, W., 1960, *Stresses in Shells*, Springer-Verlag, Berlin.
31. Abaqus, 2016, *ABAQUS Analysis User's Manual*, Version 2016, Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Rhode Island.
32. Sathyamoorthy, M., 1995, "Nonlinear Vibrations of Moderately Thick Orthotropic Shallow Spherical Shells," *Computers and Structures*, 57 (1), pp. 59-65.