

การพัฒนาเอลิเมนต์โครงข้อแข็งที่รวมผลของการเสีรูปเฉือนสำหรับ การวิเคราะห์แบบไร้เชิงเส้นของโครงสร้างคอนกรีต

ธรรมการ ภัคพิตรพิบูล^{1*} และ ภาณุวัฒน์ จ้อยกัต²
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ต.องครักษ์ อ.องครักษ์ จ.นครนายก 26120

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอขั้นตอนการวิเคราะห์แบบไร้เชิงเส้นสำหรับเอลิเมนต์โครงข้อแข็งคอนกรีตเสริมเหล็กบนพื้นฐานของวิธีเฟลกซิบิลิตีที่พิจารณาการเสีรูปเฉือนภายใต้แรงกระทำแบบทางเดียว ขั้นตอนการวิเคราะห์ถูกพัฒนาขึ้นบนพื้นฐานที่หน้าตัดมีสภาพพลาสติก โดยใช้พื้นฐานของวิธีรอยแตกร้าวเฉื่อยและการแบ่งแถบชั้นย่อยในหน้าตัด เนื่องจากหน้าตัดมีสภาพพลาสติกทำให้สามารถทำนายกลไกแรงเฉือนในหน้าตัดคอนกรีตได้เป็นอย่างดี นอกจากนี้ขั้นตอนข้างต้นยังได้รวบรวมแบบจำลองอื่นๆ ซึ่งคำนึงถึงผลกระทบเนื่องจากอัตราส่วนโพรง การอ่อนตัวและแรงดึงแข็งเกร็งของคอนกรีต หน่วยแรงโอบรัดทางข้างจากเหล็กเสริมนอกระนาบ รวมถึงของเหล็กเดือย (Dowel Action) เข้ามาด้วย ทั้งนี้แรงในเอลิเมนต์บนพื้นฐานของวิธีเฟลกซิบิลิตีที่เกิดขึ้นจากกระบวนการข้างต้นจะถูกคำนวณออกมาด้วยการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขบนพื้นฐานความสมดุลของหน้าตัดตามความยาวของเอลิเมนต์ โดยในส่วนท้ายได้มีการนำผลจากการวิเคราะห์ข้างต้นไปเปรียบเทียบกับผลการทดสอบคานคอนกรีตเสริมเหล็กในห้องปฏิบัติการ พบว่าผลที่ได้จากแบบจำลองมีความสอดคล้องกับผลการทดลองในเกณฑ์ที่น่าพอใจ

คำสำคัญ : คอนกรีตเสริมเหล็ก / การวิเคราะห์แบบไร้เชิงเส้น / เอลิเมนต์โครงข้อแข็งเฟลกซิบิลิตี /
วิธีรอยแตกร้าวกระจายตัวเฉื่อย / การเสีรูปเฉือน / การตอบสนองของโครงสร้าง

* Corresponding Author : pakpitpibool@gmail.com

¹ นักศึกษาปริญญาโท ภาควิชาวิศวกรรมโยธาและสิ่งแวดล้อม คณะวิศวกรรมศาสตร์

² ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมโยธาและสิ่งแวดล้อม คณะวิศวกรรมศาสตร์

Development of Frame Element with Included Effect of Shear Deformation for Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Structures

Tammakarn Pakpitpibool^{1*} and Panuwat Joyklad²
Srinakharinwirot University, Ongkharak, Nakhonnayok 26120

Abstract

This paper describes the development of the analytical procedures for flexibility-based nonlinear analysis of reinforced concrete frame elements with shear deformation under monotonic loadings. The procedures were developed for plasticity sectional response analysis modeling based on smeared crack approaches by section discretization into layers. The plasticity sectional analyses were performed to capture shear mechanisms in a section of concrete, with the inclusion of Poisson effect, softening effect, tension stiffening of concrete as well as confining effect for out-of-plane steel reinforcement, especially with dowel action. Based on the flexibility method, element forces were obtained by performing equilibrium-based numerical integration on section behavior along the length of the elements. Reinforced concrete beams were experimentally tested under monotonic loads to illustrate the model accuracy and to show the importance of shear deformation inclusion. Adequate agreement was obtained between the experimental and simulated results.

Keywords : Reinforced Concrete / Non-linear Analysis / Flexibility Frame Element / Smeared Crack Approaches / Shear Deformation / Structural Response

* Corresponding Author : pakpitpibool@gmail.com

¹ Master Student, Department of Civil and Environmental Engineering.

² Assistant Professor, Department of Civil and Environmental Engineering.

1. บทนำ

เพื่อให้ผลการวิเคราะห์มีความแม่นยำ ผู้ที่ต้องการทำนายพฤติกรรมโครงสร้างด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สามารถเลือกใช้เอลิเมนต์ในระบบสามมิติ (3-D Element) หรือสองมิติ (2-D Element) ตามแต่ระดับขั้นของความพึงพอใจในผลเฉลย อย่างไรก็ตามการเลือกใช้เอลิเมนต์ที่มีความซับซ้อนข้างต้น ผู้วิเคราะห์จำเป็นต้องกำหนดสมบัติของวัสดุในแบบจำลองอย่างละเอียดและระมัดระวัง รวมถึงต้องยอมรับจำนวนองศาอิสระ (Degrees of Freedom, D.O.F) ที่มากขึ้น ซึ่งล้วนต้องแลกมากับความสิ้นเปลืองของทรัพยากรในการวิเคราะห์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งกรณีโครงสร้างจริง ซึ่งในทางปฏิบัติผู้วิเคราะห์อาจต้องการทราบเพียงผลตอบสนองเบื้องต้นที่มีความแม่นยำระดับหนึ่งเท่านั้น

เอลิเมนต์โครงข้อแข็ง (Frame Element) หรือเอลิเมนต์คาน-เสา (Beam-Column Element) เป็นเอลิเมนต์ในหนึ่งมิติ (1-D Element) มีประสิทธิภาพสำหรับจำลองพฤติกรรมของโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็ก เนื่องจากใช้เวลาในการวิเคราะห์ที่สั้นกว่า ในขณะที่ความถูกต้องจากการวิเคราะห์ขึ้นอยู่กับรายละเอียดของเอลิเมนต์รวมถึงแบบจำลองวัสดุที่นำมาประยุกต์ อย่างไรก็ตามเอลิเมนต์โครงข้อแข็งอย่างง่ายทั่วไปไม่สามารถทำนายพฤติกรรมของโครงสร้างที่เสียรูปโดยการเฉือน (Shear Deformation) ได้อย่างสมบูรณ์ ดังนั้นในอดีตที่ผ่านมาจึงมีความพยายามที่จะพัฒนาเอลิเมนต์โครงข้อแข็งที่สามารถรวมผลของพฤติกรรมข้างต้นขึ้น โดยเริ่มแรกมีการใช้เอลิเมนต์โครงข้อแข็งบนพื้นฐานจุดหมุนพลาสติก (Plastic Hinge) เช่น D'Ambrisi [1] และ Li [2] และต่อมา Elwood [3] Lee และ Elnashai [4, 5] Xu และ Zhang [6] ได้ใช้เอลิเมนต์ข้างต้นร่วมกับเอลิเมนต์แบบสปริงแรงเฉือน (Shear Spring Element) แต่แบบจำลองเหล่านั้นไม่สามารถสร้างปฏิสัมพันธ์ระหว่างแรงเฉือน แรงตามแกนและแรงดัดในระดับหน้าตัดได้

การวิจัยในลำดับถัดมาแสดงให้เห็นว่าเอลิเมนต์โครงข้อแข็งที่มีการกระจายสภาพไม่ยืดหยุ่น (Inelasticity) ไปตามความยาวเอลิเมนต์มีถูกต้องมากกว่าเอลิเมนต์ที่มีจุดหมุนพลาสติกอยู่เพียงที่ปลายเอลิเมนต์เท่านั้น สำหรับวิธีการกระจายหน้าตัดพลาสติกนั้นพฤติกรรมไม่ยืดหยุ่นสามารถอธิบายได้โดยการแบ่งย่อยหน้าตัดพลาสติกด้วยแถบเส้นใย (Fiber Sections) และจำลองสมบัติของวัสดุคอนกรีตเสริมเหล็กเป็นแบบไร้เชิงเส้น

ตามแนวคิดใหม่ Spacone และคณะ [7] ได้พัฒนาแบบจำลองเอลิเมนต์บนพื้นฐานฟลักซ์บิลิตีโดยแบ่งย่อยหน้าตัดสำหรับวิเคราะห์เอลิเมนต์โครงข้อแข็ง ซึ่งแบบจำลองสามารถคิดผลของปฏิสัมพันธ์ระหว่างแรงตามแกนและแรงดัดได้ ต่อมา Ranzo และ Petrangeli [8] และ Shirai และคณะ [9] เสนอเอลิเมนต์แรงเฉือนด้วยแบบจำลองบนพื้นฐานของแรง (Force Method) ไว้ด้วยอีกทางหนึ่ง

Marini และ Spacone [10] ได้พัฒนาแบบจำลองเอลิเมนต์บนพื้นฐานฟลักซ์บิลิตีโดยคิดผลกระทบแรงเฉือน แต่ไม่พิจารณาปฏิสัมพันธ์พฤติกรรมระหว่างแรงเฉือนกับพฤติกรรมการดัด ในขณะที่ Petrangeli และคณะ [11] ใช้เอลิเมนต์บนพื้นฐานของแรง เพื่อรวมผลของปฏิสัมพันธ์ของแรงเฉือน แรงตามแกน แรงดัด ซึ่งใช้แบบจำลองสมบัติของวัสดุด้วยวิธีระนาบไมโคร (Micro Plane) ในแถบเส้นใย ซึ่งถือว่าพัฒนาการล่าสุดในการสร้างเอลิเมนต์

ในมุมมองของการจำลองสมบัติของวัสดุบนเอลิเมนต์ การจำลองสภาพพลาสติกของคอนกรีตเสริมเหล็กในการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยมากจะใช้ "วิธีรอยแตกร้ากระจายตัวเฉลี่ย (Smear Crack Approaches)" ตามที่แนะนำไว้ใน ACI 445R-99 ซึ่งตามแบบจำลองนี้ สมการสมดุลและสมการความสอดคล้องของความเครียดถือว่าทั้งในค้ำยันคอนกรีต (Concrete Strut) และเหล็กเสริมจะกระจายตัวเฉลี่ย ในกลุ่มวิจัยนี้ Vecchio และ Collins [12] เสนอทฤษฎีสถานะอัด (Compression Field Theory, CFT) ที่สามารถทำนายพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นของเอลิเมนต์แผ่นเยื่อ (Membrane Element) คอนกรีตเสริมเหล็กโดยคิดการอ่อนตัวลงของคอนกรีต (Concrete Softening) เนื่องจากการแตกร้าได้สำเร็จ อย่างไรก็ตาม CFT ไม่สามารถคำนึงถึงผลกระทบของแรงดึงแข็งเกร็ง (Tension Stiffening) ของคอนกรีต

ต่อมา Vecchio และ Collins [13] ได้พัฒนาทฤษฎีสถานะอัดปรับปรุง (Modified Compression Field Theory, MCFT) ขึ้นได้สำเร็จ โดยทฤษฎีใหม่นี้ได้พิจารณาผลกระทบของแรงดึงแข็งเกร็งของคอนกรีตไว้ได้ในเวลาใกล้เคียงกัน Belarbi และ Hsu [14] และ Pang และ Hsu [15] ได้เสนอแบบจำลองที่ต่างกัน นั่นคือ แบบจำลองโครงข้อหมุนอ่อนตัวแบบมุมหมุนได้ (Rotating Angle Softened Truss Model, RA-STM) ซึ่งต่อมาได้มีการปรับปรุงและการพัฒนาเป็นแบบจำลองโครง

ข้อหมุ่นอ่อนตัวแบบตรึงมุมหมุ่น (Fixed Angle Softened Truss Model, FA-STM) ซึ่งสามารถในทำนายพฤติกรรมของคอนกรีตภายใต้แรงเฉือนได้เป็นอย่างดี โดย Belarbi และ Hsu [16]; Hsu และ Zhang [17]; Zhang และ Hsu [18] Zhu และ คณะ [19] ในครั้งนั้น FA-STM ได้เพิ่มโมดูลัสแรงเฉือนและพัฒนาขั้นตอนแก้ปัญหาที่เรียบง่ายขึ้น โดยในกลุ่มวิจัยเดียวกัน Zhu และ Hsu [20] ได้เสนออัตราส่วนโพของเฉาะตัวที่คิดค้นได้ ซึ่งนำไปสู่การพัฒนา แบบจำลองแผ่นเยื่ออ่อนตัว (Softened Membrane Model, SMM) ที่สามารถทำนายการตอบสนองทั้งก่อนและหลังจุดสูงสุดของกำลังได้อย่างแม่นยำ

งานวิจัยในบทความนี้ได้นำรูปแบบการพัฒนาเอลิเมนต์ของ Spacone และคณะ [7] รวมถึงแนวคิดในการจำลองวัสดุของ Zhu และคณะ [19] มาพัฒนาปรับปรุงโดยเน้นที่การรวมผลของการเสียรูปเนื่องจากการเฉือน และคำนึงถึงผลกระทบเนื่องจากการอ่อนตัว แรงดึงเชิงเกร็ง และการขยายตัวแบบไร้เชิงเส้นของคอนกรีต นอกจากนี้ยังพิจารณาหน่วยแรงโอบรัดทางข้างจากเหล็กเสริมออกจากระนาบ รวมถึงการกระทำของเหล็กเดือย (Dowel Action) ทั้งนี้การคำนวณใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไร้เชิงเส้นบนพื้นฐานของฟลักซ์บิลิตี (Flexibility Approach)

2. สมมติฐาน

กระบวนการวิเคราะห์ต่างๆ ในงานวิจัยนี้มีสมมติฐานหลักคือ

1. ความเครียดตามแนวแกนขององค์อาคาร ใช้สมมติฐานระนาบยังคงเป็นระนาบทั้งก่อนและหลังการตัด
2. ความเครียดเฉือนตามขวางของหน้าตัด พิจารณาให้มีการกระจายเป็นรูปพาราโบลา
3. ไม่รวมผลของหน่วยแรงชุมนุม (Stress Concentration) ที่เกิดขึ้นบริเวณแรงกระทำและฐานรองรับ
4. ไม่คิดการครูดของแรงยึดหน่วง (Bond Slip) และการโก่งเตาะของเหล็กเสริม

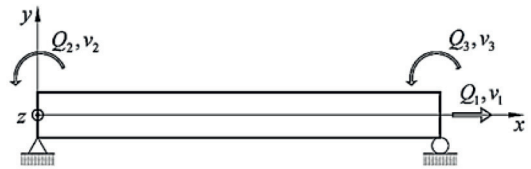
3. การพัฒนาเอลิเมนต์โครงข้อแข็งบนพื้นฐานฟลักซ์บิลิตี

สมการเชิงอนุพันธ์ของความสมดุลสำหรับเอลิเมนต์โครงข้อแข็งของแรงตามแกน แรงเฉือนและโมเมนต์ตามลำดับ คือ

$\partial N/\partial x + w_x(x) = 0$, $\partial V/\partial x + w_y(x) = 0$, $\partial M/\partial x + V = 0$ เมื่อ $w_x(x)$ คือน้ำหนักกระจายสม่ำเสมอในทิศทาง x และ $w_y(x)$ คือน้ำหนักกระจายสม่ำเสมอในทิศทาง y

ลักษณะสำคัญของเอลิเมนต์โครงข้อแข็งที่ใช้ขึ้นคือ สมการเชิงอนุพันธ์ของความสมดุลจะสามารถแก้ไขเป็นอิสระจากการเปลี่ยนตำแหน่งและการตอบสนองของวัสดุได้

ในกรณีที่ไม่มือน้ำหนักบนเอลิเมนต์ ผลเฉลยเอกพันธ์ (Homogeneous Solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ของความสมดุล ถูกกำหนดให้แรงแนวแกนมีการกระจายคงที่ รวมถึงโมเมนต์ดัดมีการกระจายเชิงเส้น



รูปที่ 1 แรงพื้นฐานและการเสียรูปของเอลิเมนต์

การคำนวณจะใช้แรงเอลิเมนต์พื้นฐาน \mathbf{Q} ดังแสดงในรูปที่ 1 เป็นค่าขอบเขตของปัญหานี้

$$\begin{Bmatrix} N(x) \\ V(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{x}{L} - 1 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} \quad (1a)$$

$$\mathbf{S}(x) = \mathbf{b}(x) \cdot \mathbf{Q} \quad (1b)$$

เมตริก $\mathbf{b}(x)$ เป็นฟังก์ชันประมาณภายในของแรงและยังสามารถพิจารณาเป็นเมตริกการแปลงความสมดุล ระหว่างแรงหน้าตัด $\mathbf{S}(x)$ และแรงเอลิเมนต์พื้นฐาน \mathbf{Q}

การทำวนซ้ำของการคำนวณไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไร้เชิงเส้น การเสียรูปเอลิเมนต์ที่เพิ่มขึ้น $\Delta \mathbf{v}$ ทำให้แรงเอลิเมนต์พื้นฐานเพิ่มขึ้น $\Delta \mathbf{Q}$ จากเมตริกความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ \mathbf{k}_{ele}^{j-1} ทำวนซ้ำก่อนหน้าตามความสัมพันธ์ แรง - การเสียรูปของเอลิเมนต์ จะได้

$$\Delta \mathbf{Q}^j = \mathbf{k}_{ele}^{j-1} \Delta \mathbf{v}^j \text{ และ } \mathbf{Q}^j = \mathbf{Q}^{j-1} + \Delta \mathbf{Q}^j \quad (2)$$

แรงเอลิเมนต์พื้นฐานที่เพิ่มขึ้น $\Delta \mathbf{Q}$ ทำให้เวกเตอร์แรงหน้าตัดเพิ่มขึ้น $\Delta \mathbf{S}(x)$ ด้วยความสัมพันธ์ตามสมการที่ (1) จะได้ว่า

$$\Delta \mathbf{S}(x) = \mathbf{b}(x) \cdot \Delta \mathbf{Q} \quad (3)$$

$$\mathbf{S}(x)^j = \mathbf{S}(x)^{j-1} + \Delta \mathbf{S}(x)^j \quad (4)$$

เวกเตอร์แรงด้านทานหน้าตัด $\mathbf{S}_R(x)$ และเมตริกความแข็งเกร็งหน้าตัด $\mathbf{k}_s(x)$ จะกำหนดจากเวกเตอร์การเสียรูปหน้าตัด $\mathbf{e}(x) = \{\varepsilon_a(x) \quad \gamma_{xy}(x) \quad \kappa_z(x)\}^T$ เมื่อ $\varepsilon_a(x)$ เป็นความเครียดตามแกนที่พิกัดจุดกำเนิด, $\gamma_{xy}(x)$ เป็นความเครียดเฉือน, $\kappa_z(x)$ เป็นความโค้งรอบแกนที่ทราบค่าการเสียรูปหน้าตัดที่เพิ่มขึ้น $\Delta \mathbf{e}(x)$ จะกำหนดโดยการบวกเพิ่มจากเศษเหลือการเสียรูปหน้าตัด $\mathbf{e}_r(x)$ จากการคำนวณซ้ำก่อนหน้านี้ ต่อการเสียรูปที่เกิดจากแรงหน้าตัดที่เพิ่มขึ้น $\Delta \mathbf{S}(x)$ โดย

$$\Delta \mathbf{e}^j(x) = \mathbf{f}_s^{j-1}(x) \cdot \Delta \mathbf{S}^j(x) + \mathbf{e}_r^{j-1}(x) \quad (5)$$

$$\mathbf{e}^j(x) = \mathbf{e}^{j-1}(x) + \Delta \mathbf{e}^j(x) \quad (6)$$

เมื่อ $\mathbf{f}_s(x)$ คือเฟล็กซิบิลิตีของหน้าตัดซึ่งหลังจากตั้งค่าความสัมพันธ์ความสมดุล ความสอดคล้องกันทางเรขาคณิต (Geometric Compatibility) ของเอลิเมนต์โครงข้อแข็งสามารถกำหนดเป็นสมการรูปแบบอ่อนปรน (Weak Form) ของไฟน์ดเอลิเมนต์แบบไร้เชิงเส้นได้ด้วยระเบียบวิธีแรงเสมือนดังนี้

$$\delta \mathbf{Q}^T \Delta \mathbf{v}^j = \int_L \delta \mathbf{S}^T(x) \cdot \Delta \mathbf{e}^j(x) dx \quad (7)$$

ใช้สมการ (1) สำหรับความสัมพันธ์ความสมดุลของระบบแรงเสมือน $\delta \mathbf{S}(x) = \mathbf{b}(x) \cdot \delta \mathbf{Q}$ และหลังจากการแทนที่ลงในสมการ (7) เพื่อให้สมการความสอดคล้องเป็น

$$\Delta \mathbf{v}^j = \int_L \mathbf{b}^T(x) \cdot \Delta \mathbf{e}^j(x) dx \quad (8)$$

แทนที่สมการ (5) ลงในสมการ (8) การเสียรูปเอลิเมนต์ที่เพิ่มขึ้น เขียนได้เป็น

$$\Delta \mathbf{v}^j = \left[\int_L \mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{f}_s^{j-1}(x) \cdot \mathbf{b}(x) dx \right] \cdot \Delta \mathbf{Q}^j \quad (9a)$$

$$+ \left[\int_L \mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{e}_r^{j-1}(x) dx \right] \quad (9b)$$

$$\Delta \mathbf{v}^j = \left[\mathbf{f}_{ele}^{j-1} \right] \cdot \Delta \mathbf{Q}^j + \left[\mathbf{v}_r^{j-1} \right] \quad (9b)$$

เมื่อ $\mathbf{f}_{ele}(x)$ คือ เมตริกเฟล็กซิบิลิตีเอลิเมนต์, \mathbf{v}_r คือเศษตกค้างการเสียรูปเอลิเมนต์ในรูปปริพันธ์ตามสมการ (9)

สำหรับการคำนวณเมตริกเฟล็กซิบิลิตีเอลิเมนต์และเศษตกค้างการเสียรูปเอลิเมนต์ จะใช้กฎปริพันธ์เชิงตัวเลขของเกาส์ - เลอจองด์ หรือ เกาส์ - โลแบตโต (Gauss-Lobatto) โดยขั้นตอนทั้งหมด ได้เทียบเคียงแนวคิดของ Spacone และคณะ [21] ซึ่งอธิบายกระบวนการกำหนดสถานะของเอลิเมนต์บนพื้นฐานเฟล็กซิบิลิตี การทำงานซ้ำภายในเอลิเมนต์และวนซ้ำระบบรวมใหญ่อย่างถูกต้อง

4. การประเมินความเครียด

เอลิเมนต์แผ่นเยื่อคอนกรีตเสริมเหล็ก จะสมมติสี่ระบบพิกัดโดยทั่วไปรูปที่ 2 (ก) ดังนี้ ระบบพิกัด (x,y) เป็นพิกัดเฉพาะที่ (Local Coordinate) ของเอลิเมนต์ ระบบพิกัดหลัก (1,2) เป็นหน่วยแรงหลัก ระบบพิกัด (r,d) หน่วยแรงหลักของคอนกรีต ระบบพิกัด (si,ti) ทิศทางของเหล็กเสริม เมื่อ α_{1x} คือมุมระหว่างแกน x และแกน 1 มุมหมุน α_{rx} คือมุมระหว่างแกน x และแกน r มุมเหล็กเสริม α_{ix} คือมุมระหว่างแกน x และแกน si เพื่อแปลงระบบของพิกัดเวกเตอร์ หน่วยแรงและความเครียด จะใช้เมตริก $[\mathbf{T}(\theta)]$ ต่อไปนี้

$$[\mathbf{T}(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \quad (10)$$

หน่วยแรงและความเครียดในทิศทางของรอยแตกร้าวจะคำนวณได้โดยมุมหมุน (Rotating Angle) α_{rx} ซึ่งมาจากสถานะความเครียด โดยที่มุมหมุนหลัก α_{rx} มีหน่วยแรงเฉือนคอนกรีต $\tau_{xy}^c = 0$ รูปที่ 2 (ข) การคำนวณมุมหลัก α_{1x} ได้จากสถานะหน่วยแรงที่ทราบค่า ทั้ง α_{rx} และ α_{1x} จะได้ดังนี้คือ

$$\tan 2\alpha_{rx} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}, \quad \tan 2\alpha_{1x} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (11)$$

โดยทั่วไปความสัมพันธ์ของหน่วยแรง - ความเครียด (Stress-Strain Relationships) ของคอนกรีตและเหล็กเสริม จะได้มาจากการทดสอบแกนเดียว ทำให้ความเครียดสองแกน ในทิศทาง (1,2), $\{\epsilon_{12}\} = \{\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \gamma_{12}\}^T$ ต้องแปลงเป็น ความเครียดหลักแกนเดียว $\{\bar{\epsilon}_{12}\} = \{\bar{\epsilon}_1 \ \bar{\epsilon}_2 \ \gamma_{12}\}^T$ โดยใช้ อัตราส่วนโพซงของของคอนกรีตที่แตกร้าว v_{12} คือ อัตราส่วนของ ผลการเพิ่มขึ้นของความเครียดดิ่งที่เกิดขึ้นในทิศทางหลัก (1) ต่อแหล่งที่มาของความเครียดดัดเพิ่มขึ้นในทิศทางหลัก (2) และ v_{21} คือ อัตราส่วนของผลความเครียดดัดเพิ่มขึ้นในทิศทาง หลัก (2) ต่อแหล่งที่มาของความเครียดดิ่งเพิ่มขึ้นของใน ทิศทางหลัก (1) ตามแนวคิดของ Kupfer และคณะ [22] โดย ความเครียดแกนเดียวที่ได้คือ

$$\begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_1 \\ \bar{\epsilon}_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & v_{12} & 0 \\ 1-v_{12}v_{21} & 1-v_{12}v_{21} & 0 \\ v_{21} & 1 & 0 \\ 1-v_{12}v_{21} & 1-v_{12}v_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} \quad (12a)$$

$$\{\bar{\epsilon}_{12}\} = [\mathbf{V}] \cdot \{\epsilon_{12}\} \quad (12b)$$

เมื่อ $[\mathbf{V}]$ คือ เมตริกการแปลงความเครียด โดยความเครียด แกนเดียว $\bar{\epsilon}_1$ และ $\bar{\epsilon}_2$ ซึ่งใช้ในการคำนวณหน่วยแรงคอนกรีต ในทิศทางหลัก σ_1^c และ σ_2^c จะได้จากแบบจำลองความ สัมพันธ์สมบัติของคอนกรีต

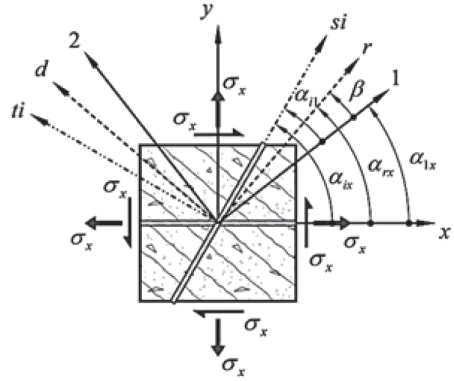
สำหรับเหล็กเสริมความเครียดหลักแกนเดียวของเหล็ก เสริมตามขวางคือ

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{sT} = & \left(\frac{1}{1-v_{12}v_{21}} \epsilon_1 + \frac{v_{12}}{1-v_{12}v_{21}} \epsilon_2 \right) \sin^2(\alpha_{1x}) \quad (13) \\ & + \left(\frac{v_{21}}{1-v_{12}v_{21}} \epsilon_1 + \frac{1}{1-v_{12}v_{21}} \epsilon_2 \right) \cos^2(\alpha_{1x}) \\ & + \gamma_{12} \sin(\alpha_{1x}) \cos(\alpha_{1x}) \end{aligned}$$

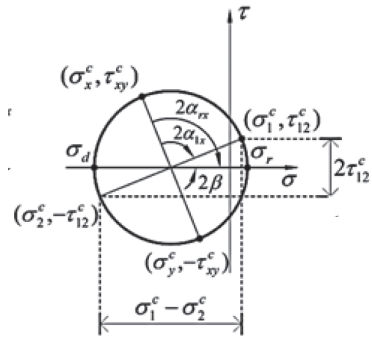
ความเครียดหลักแกนเดียวของเหล็กเสริมตามยาว

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{sL} = & \left(\frac{1}{1-v_{12}v_{21}} \epsilon_1 + \frac{v_{12}}{1-v_{12}v_{21}} \epsilon_2 \right) \cos^2(\alpha_{1x}) \\ & + \left(\frac{v_{21}}{1-v_{12}v_{21}} \epsilon_1 + \frac{1}{1-v_{12}v_{21}} \epsilon_2 \right) \sin^2(\alpha_{1x}) \quad (14) \\ & - \gamma_{12} \sin(\alpha_{1x}) \cos(\alpha_{1x}) \end{aligned}$$

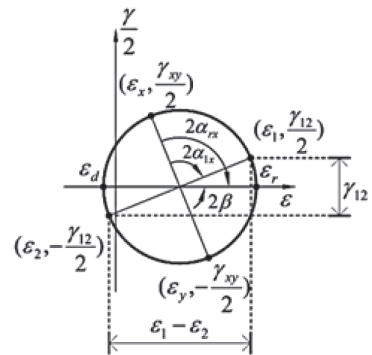
หน่วยแรงเหล็กแกนเดียวเทียบเท่า f_{si} ในทิศทางของ เหล็กเส้นจะคำนวณได้จากความเครียดเหล็ก $\bar{\epsilon}_{si}$ ซึ่งพิจารณา ได้จากสมบัติของเหล็กเสริมที่ฝังอยู่ในคอนกรีต



(ก) ระบบพิกัดของเอลิเมนต์คอนกรีตเสริมเหล็ก



(ข) วงกลม Mohr หน่วยแรง



(ค) วงกลม Mohr ความเครียด

รูปที่ 2 ระบบพิกัดของเอลิเมนต์คอนกรีตเสริมเหล็ก และ วงกลมมอร์ (Mohr's Circle) หน่วยแรงและความเครียด

5. แบบจำลองสมบัติของวัสดุ

5.1 แบบจำลองสมบัติของคอนกรีต

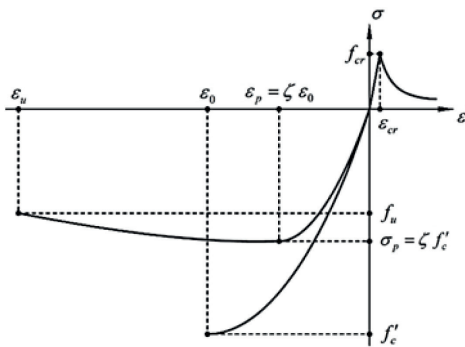
แบบจำลองสมบัติของคอนกรีตในทิศทางหลัก (1,2) จะประเมินจาก 3 สภาวะต่อไปนี้

คอนกรีตอยู่ภายใต้สภาวะความเคียดดึง - ความเคียดอัด

ในกรณีนี้ ความเคียดแกนเดียวของคอนกรีต $\bar{\epsilon}_1$ อยู่ในสภาพแรงดึงและความเคียดแกนเดียว $\bar{\epsilon}_2$ อยู่ในสภาพแรงอัด สภาวะนี้หน่วยแรงคอนกรีตแกนเดียว σ_1^c คำนวณได้จาก $\bar{\epsilon}_1$ และไม่ได้เป็นฟังก์ชันของความเคียดคอนกรีตในแนวตั้งฉาก $\bar{\epsilon}_2$ ตามที่เสนอโดย Pang และ Hsu [15] และ Belarbi และ Hsu [16] อย่างไรก็ตาม σ_2^c จะอ่อนตัวลงเนื่องจากแรงดึงในทิศทางตั้งฉากตามแนวคิดของ Vecchio [23] ดังนี้

$$\zeta = \frac{1}{1 + 0.35 \cdot \left(\frac{\bar{\epsilon}_1}{\bar{\epsilon}_2} - 0.28 \right)^{0.8}} \leq 1 \quad (15)$$

เมื่อ ζ คือสัมประสิทธิ์การอ่อนตัว (รูปที่ 3) เมื่อ ϵ_0 เป็นความเคียดที่กำลั้งอัดสูงสุด f'_c และ $\zeta f'_c$ เป็นกำลั้งอัดคอนกรีตอ่อนตัว



รูปที่ 3 เส้นกราฟ หน่วยแรง - ความเคียด กับการอ่อนตัว

คอนกรีตอยู่ภายใต้สภาวะความเคียดดึง - ความเคียดดึง

ความเคียดแกนเดียวของคอนกรีต $\bar{\epsilon}_1$ อยู่ในสภาพแรงดึง และความเคียดแกนเดียวของคอนกรีต $\bar{\epsilon}_2$ ยังอยู่ในสภาพแรงดึงด้วยเช่นกัน ในกรณีนี้หน่วยแรงคอนกรีตแกนเดียว σ_1^c ประเมินจาก $\bar{\epsilon}_1$ และ σ_2^c ประเมินจาก $\bar{\epsilon}_2$ ทั้ง σ_1^c

และ σ_2^c เป็นฟังก์ชันของความเคียดคอนกรีต $\bar{\epsilon}_1$ และ $\bar{\epsilon}_2$ ตามลำดับ

คอนกรีตอยู่ภายใต้สภาวะความเคียดอัด - ความเคียดอัด ความเคียดแกนเดียวของคอนกรีต $\bar{\epsilon}_1$ และ $\bar{\epsilon}_2$ ทั้งสองอยู่ในสภาพแรงอัด การวิจัยนี้จะใช้สมการกำลั้งแรงอัดแบบสองแกนของ Vecchio [24] ที่ปรับจากเดิมของ Kupfer และคณะ [22] กำลั้งอัดคอนกรีตที่เพิ่มขึ้น ขึ้นอยู่กับหน่วยแรงโอบรัด (Confining) ในทิศทางตั้งฉาก ทำให้คอนกรีตในสภาพแรงอัดสามารถขยายตัวด้านข้างและทำให้ค่าอัตราส่วนโพของเพิ่มขึ้น (อย่างไรก็ตามค่าโพความนี้ใช้ไม่เกิน 0.5) ทั้งนี้หน่วยแรงหลักคอนกรีตเชิงตั้งฉาก σ_1^c และ σ_2^c ที่ตรงกันกับความเคียดแกนเดียวของคอนกรีต $\bar{\epsilon}_1$ และ $\bar{\epsilon}_2$ สมการการอบรัดในแรงอัดสองแกนคือ

$$K_{c1} = 1 + 0.92 \left(\frac{-\sigma_2^c}{f'_c} \right) - 0.76 \left(\frac{-\sigma_2^c}{f'_c} \right)^2 \quad (16)$$

$$K_{c2} = 1 + 0.92 \left(\frac{-\sigma_1^c}{f'_c} \right) - 0.76 \left(\frac{-\sigma_1^c}{f'_c} \right)^2 \quad (17)$$

เมื่อ K_{c1} และ K_{c2} เป็นตัวคูณเพิ่มกำลั้งสำหรับคอนกรีตในทิศทาง (1) และ (2) ตามลำดับ หน่วยแรงและความเคียดสูงสุดในทิศทาง (1) จะได้เป็น $\sigma_{1p} = K_{c1} f'_c$ และ $\epsilon_{1p} = K_{c1} \epsilon_0$ ตามลำดับและหน่วยแรงและความเคียดสูงสุดในทิศทาง (2) จะได้เป็น $\sigma_{2p} = K_{c2} f'_c$ และ $\epsilon_{2p} = K_{c2} \epsilon_0$ ตามลำดับ

5.2 การโอบรัดโดยเหล็กเสริมตามขวางในทิศทาง

ออกจากระนาบ

การขยายตัวด้านข้างเนื่องจากแรงอัดตามแนวแกนก่อให้เกิดการโอบรัดโดยเหล็กเสริมตามขวาง ทำให้กำลั้งและความเหนียวของคอนกรีตภายใต้แรงอัดจากการยัดรี้งเพิ่มขึ้น ทั้งนี้อัตราส่วนเหล็กเสริมออกจากระนาบ ρ_z หน่วยแรงอัดในทิศทางออกจากระนาบ σ_z^c สามารถประมาณได้โดย

$$\sigma_z^c = -\rho_z \cdot f_{sz} \text{ และ } f_{sz} = E_s \cdot \bar{\epsilon}_z \leq f_{yz} \quad (18)$$

ถ้าเหล็กออกจากระนาบไม่คราก

$$\bar{\epsilon}_z = \frac{E_{cn}}{E_{cn} + \rho_z E_s} \left(-v_{12} \cdot \frac{\sigma_2^c}{E_2^c} - v_{21} \cdot \frac{\sigma_1^c}{E_1^c} \right) \quad (19)$$

กรณีอื่นๆ

$$\bar{\varepsilon}_z = -\frac{\rho_z \cdot f_{yz}}{E_{cn}} - v_{12} \cdot \frac{\sigma_2^c}{E_2^c} - v_{21} \cdot \frac{\sigma_1^c}{E_1^c} \quad (20)$$

โมดูลัสยืดหยุ่นของคอนกรีตในทิศทางออกจากระนาบ E_{cn} เท่ากับ $2 \cdot f'_c / \varepsilon_o$ สำหรับการพิจารณาผลลัพธ์หน่วยแรงคอนกรีตในการวิเคราะห์การตอบสนองหน้าตัด ข้อมูลรายละเอียดเกี่ยวกับแบบจำลองนี้สามารถพบได้ใน Vecchio [22]

5.3 การกระทำของเหล็กเดือย

การกระทำของเหล็กเดือย (Dowel Action) สามารถเพิ่มกำลังรับแรงเฉือนและความเหนียวหลังจุดสูงสุดขององค์อาคาร โดยเฉพาะคานที่มีเหล็กเสริมตามขวางน้อย แรงเฉือนทิศทางตั้งฉากกับแนวแกนที่รับด้วยเหล็กถูกตั้งจะคำนวณตามสูตรที่เสนอโดย He และ Kwan [26] หน่วยแรงเฉือนเหล็กเดือย τ_{xy}^d ได้ดังนี้

$$\tau_{xy}^d = \frac{\rho_x}{A_{sx}} \cdot V_d, V_d = E_s I_s \lambda^3 \Delta \leq V_{du} \quad (21)$$

$$\Delta_s = \left(\frac{\pi}{\lambda} \right) \cdot \gamma_{xy} \cdot I_s = \frac{\pi \cdot d_b^4}{64} \quad (22)$$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k_c \cdot d_b}{4 \cdot E_s \cdot I_s}}, \quad k_c = \frac{101.6 \cdot \sqrt{|f'_c|} \cdot |f_y|}{d_b^{2/3}} \quad (23)$$

เมื่อ Δ_s คือ การเปลี่ยนตำแหน่งของเหล็กเดือย, E_s คือ โมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็กเดือย, d_b คือ เส้นผ่าศูนย์กลางของเหล็กเดือย, I_s คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของเหล็กเดือย, λ คือ พารามิเตอร์ความแข็งแกร่งของคอนกรีตต่อความแข็งแกร่งของเหล็กเสริม, k_c คือ ความแข็งแกร่งของฐานรองรับคอนกรีต ทั้งนี้กำลังรับแรงเฉือนของเหล็กเดือย V_d จะถูกจำกัดโดย

$$V_{du} = 1.27 \cdot d_b^2 \cdot \sqrt{|f'_c| \cdot |f_y|}$$

5.4 แบบจำลองสมบัติของเหล็กเสริม

แบบจำลองสมบัติของเหล็กเสริมที่ฝังอยู่ในคอนกรีตพิจารณาจากหน่วยแรงเหล็กเสริม f_{si} ตามทิศทางของเหล็กคำนวณได้จากความเครียดเหล็กเสริมแกนเดียว $\bar{\varepsilon}_{si}$ ผ่านความสัมพันธ์หน่วยแรง - ความเครียดแบบสองเชิงเส้น โดย Zhu และคณะ [19] ดังนี้

$$f_{si} = E_s \bar{\varepsilon}_{si}, \quad \bar{\varepsilon}_{si} \leq \varepsilon_n \quad (24)$$

$$f_{si} = f_y \left[(0.91 - 2B) + \left(0.02 + 0.25B \frac{\bar{\varepsilon}_{si}}{\varepsilon_y} \right) \right] \quad (25)$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_y (0.93 - 2B), \quad B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{f_{cr}}{f_y} \right)^{1.5} \quad (26)$$

เมื่อ f_{si} คือ หน่วยแรงของเหล็กเสริม, $\bar{\varepsilon}_{si}$ คือ ความเครียดแกนเดียวของเหล็กเสริม, f_y คือ หน่วยแรงครากของเหล็กเส้นเปลือย, ε_y คือ ความเครียดครากเหล็กเส้นเปลือย, E_s คือ โมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็กเสริม, ρ คือ อัตราส่วนของการเสริมเหล็ก และ f_{cr} คือ กำลังการแตกร้าวของคอนกรีต

6. แรงและความแข็งเกร็งของหน้าตัด

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บนพื้นฐานการแบ่งเป็นแถบเส้นใยหรือแบ่งหน้าตัดออกเป็นส่วนชั้นต่างๆ โดยในแต่ละเส้นใยเป็นตัวแทนพฤติกรรมของคอนกรีตและเหล็กเสริม ความเครียดตามแกนแต่ละเส้นใยจะคำนวณได้จากความเครียดที่จุดศูนย์กลางและความโค้งของหน้าตัดโดยสมมติฐานหน้าตัดยังคงเป็นระนาบทั้งก่อนและหลังการตัด ความเครียดเฉือนจะสมมติว่ากระจายเป็นโค้งพาราโบลา ทั้งนี้ความเครียดตามขวางคำนวณได้โดยทอวานซ์

ความแข็งเกร็งสัมผัสและแรงต้านทานของแต่ละเส้นใยจะคำนวณได้จากความสัมพันธ์หน่วยแรง - ความเครียด ความแข็งเกร็งของหน้าตัดและแรงต้านทานของหน้าตัดจะได้โดยรวมแรงและความแข็งเกร็งเส้นใยทั้งหมด

เมตริกโมดูลัสสัมผัส (Tangent Modulus) $[E_t]$ บนระนาบหน่วยแรงของเอลิเมนต์คอนกรีตเสริมเหล็กเขียนได้เป็น

$$[E_t] = [T(\alpha_{x1})] \cdot [E_c] \cdot [V] \cdot [T(\alpha_{1x})] + \sum_i [T(\alpha_{xi})] \cdot [E_{si}] \cdot [T(\alpha_{i1})] \cdot [V] \cdot [T(\alpha_{1x})] \quad (27a)$$

$$\text{หรือ } [E_t] = [E_t^c] + \sum_i [E_t^{si}] \quad (27b)$$

ในสมการ (27a) $[E_c]$ เป็นเมตริกสมบัติของวัสดุสัมผัสของคอนกรีตแกนเดียว, $[E_{si}]$ เป็นเมตริกสมบัติของวัสดุสัมผัส

ของเหล็กเสริมแกนเดียวและ $[V]$ เป็นเมตริกแปลงความเครียดที่กำหนดไว้ก่อนหน้าในสมการ (12) เมตริกสมบัติของวัสดุแกนเดียวของคอนกรีต $[E_c]$ และ $[E_{si}]$ ได้โดย

$$[E_c] = \begin{bmatrix} \bar{E}_1^c & \frac{\partial \sigma_1^c}{\partial \bar{\varepsilon}_2} & 0 \\ \frac{\partial \sigma_2^c}{\partial \bar{\varepsilon}_1} & \bar{E}_2^c & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^c \end{bmatrix}, G_{12}^c = \frac{\sigma_1^c - \sigma_2^c}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \quad (28)$$

$$[E_{si}] = \begin{bmatrix} \rho_{si} \bar{E}_{si} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

โมดูลัสสัมผัส \bar{E}_1^c และ \bar{E}_2^c ในสมการ (28) ได้จากความเครียดแกนเดียว ซึ่งพิจารณาจากความสัมพันธ์ของหน่วยแรง - ความเครียดของวัสดุในทิศทาง 1 และ 2 ตามลำดับ เทอมของ $\partial \sigma_1^c / \partial \bar{\varepsilon}_2$ และ $\partial \sigma_2^c / \partial \bar{\varepsilon}_1$ ได้โดยใช้ความสัมพันธ์สมบัติของวัสดุแกนเดียวและสถานะของหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีตแกนเดียวในทิศทาง 1-2 ซึ่งไม่ได้เป็นศูนย์เพราะหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีตในแรงอัดอ่อนตัวลงจากความเครียดดึงที่ตั้งฉาก ในเทอมโมดูลัสเฉือนของคอนกรีต G_{12}^c คำนวณได้โดยหน่วยแรงเฉือน τ_{12}^c ต่อความเครียดเฉือน γ_{12} ในทิศทาง 1-2 ตามแนวคิดวงกลมของมอร์ หน่วยแรงและความเครียด (รูปที่ 2 (ข) และ (ค)) ในทิศทางหน่วยแรงหลักและความเครียดหลักของคอนกรีตตรงกัน ในส่วนของ $[E_{si}]$ ในระบบพิกัด (si, ti) โดยที่ \bar{E}_{si} เป็นโมดูลัสสัมผัสแกนเดียวสำหรับเหล็กเส้นที่กำหนดได้โดยสถานะ หน่วยแรง/ความเครียดจากเวกเตอร์การเสียรูปหน้าตัด (Section Deformations) $\mathbf{e}(x)$ เวกเตอร์ความเครียดในหน้าตัด $\hat{\mathbf{e}}(x, y) = \{\varepsilon_x \quad \gamma_{xy}/2\}^T$ ได้ดังนี้

$$\hat{\mathbf{e}}(x, y) = \mathbf{a}_s(y) \cdot \mathbf{e}(x) \quad (30)$$

$$\text{เมื่อ } \mathbf{a}_s(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

เมตริก $\mathbf{a}_s(y)$ กำหนดโดยสมมติฐานระนาบหน้าตัดยังคงเป็นระนาบหลังการเสียรูป

การแก้ปัญหาเอลิเมนต์ที่นำเสนออยู่บนพื้นฐานของสมมติฐานระนาบหน้าตัด เทอมองศาอิสระของหน้าตัดตามสมการ (30) จะต้องสอดคล้องกับความเครียดตามขวาง ε_y ซึ่งคำนวณจากความสมมูลตามแนวแกน y รูปแบบอย่างย่อของเมตริกโมดูลัสสัมผัส $[E_c]$ กำหนดให้เป็น $\hat{\mathbf{E}}_c$ ดังนั้นจะได้สมการความสมมูล

$$\hat{\mathbf{c}}(x, y) = \hat{\mathbf{E}}_c \cdot \hat{\mathbf{e}}(x, y) \quad (32)$$

แรงต้านทานของหน้าตัด \mathbf{S}_R และความแข็งเกร็งของหน้าตัด \mathbf{k}_s ตามลำดับได้ดังนี้

$$\mathbf{S}_R = \int_A \mathbf{a}_s^T(y) \cdot \hat{\mathbf{c}}(x, y) dA \quad (33)$$

$$\mathbf{k}_s = \int_A \mathbf{a}_s^T(y) \cdot \hat{\mathbf{E}}_c \cdot \mathbf{a}_s(y) dA \quad (34)$$

7. ตรวจสอบแบบจำลองที่พัฒนาขึ้นกับผล

ทดสอบในห้องปฏิบัติการ

หัวข้อนี้เป็นการนำผลการทดสอบคานคอนกรีตเสริมเหล็กในห้องปฏิบัติการจำนวน 9 คาน (6 คานแรกรับแรงเฉือนวิกฤติ ในขณะที่ 3 คานสุดท้ายรับแรงดัดวิกฤติ) ซึ่งรายงานโดย Vecchio และ Shim [26] มาเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์ที่ได้จากขั้นตอนที่พัฒนาขึ้น

7.1 รายละเอียดคาน

คานทั้งหมดแบ่งเป็น 3 ชุด (A, B และ C) แต่ละชุดมีคานย่อย (1, 2 และ 3) คานทั้งหมดเป็นคานช่วงเดียว และการติดตั้งคานในห้องปฏิบัติการแสดงในรูปที่ 4 ทั้งนี้ความยาวคาน L_s จะแตกต่างกันทั้ง 3 ชุด นั่นคือ ชุดที่ 1 คานมีความยาว 3.66 เมตร ชุดที่ 2 คานมีความยาว 4.57 เมตร และชุดที่ 3 คานมีความยาว 6.4 เมตร

ปริมาณเหล็กตามยาวและเหล็กลูกตั้งในแต่ละชุดแสดงในรูปที่ 5 และตารางที่ 1 คานทั้งหมดมีความลึกที่เท่ากันคือ 552 มม. แต่มีความกว้างต่างกัน โดยสมบัติของคอนกรีตและเหล็กเสริมแสดงในตารางที่ 2 และขนาดมวลรวมใหญ่สุดที่ใช้ในการทดลอง คือ 20 มม.

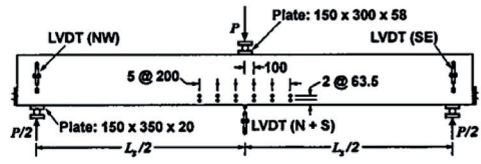
ตารางที่ 1 รายละเอียดคาน

Beam Number	b (mm)	h (mm)	L_s (mm)	Stirrups
VS-A1	305	552	3660	D5@210
VS-A2	305	552	4750	D5@210
VS-A3	305	552	6400	D4@168
VS-B1	229	552	3660	D5@190
VS-B2	229	552	4750	D5@190
VS-B3	229	552	6400	D4@152
VS-C1	152	552	3660	D5@210
VS-C2	152	552	4750	D5@210
VS-C3	152	552	6400	D4@168

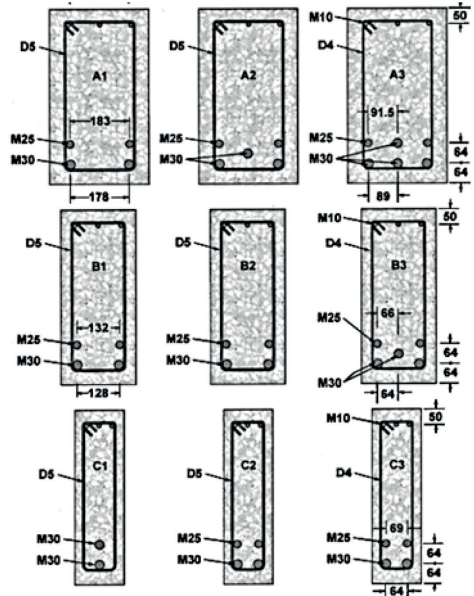
ตารางที่ 2 สมบัติคอนกรีตและเหล็กเสริม

Bar size	Reinforcement			
	ϕ (mm)	Area (mm^2)	f_y (MPa)	E_s (MPa)
M10	11.3	100	460	200000
M25 ^a	25.2	500	615	210000
M25 ^b	25.2	500	680	220000
M30	29.9	700	700	200000
D4	5.7	25.7	651	200000
D5	6.4	32.2	649	200000

Beam	Concrete			
	f'_c (MPa)	ϵ_o	E_c (MPa)	f_{sp} (MPa)
VS-A1	22.6	0.0016	36500	2.37
VS-A2	25.9	0.0021	32900	3.37
VS-A3	43.5	0.0019	34300	3.13
VS-B1	22.6	0.0016	36500	2.37
VS-B2	25.9	0.0021	32900	3.37
VS-B3	43.5	0.0019	34300	3.13
VS-C1	22.6	0.0016	36500	2.37
VS-C2	25.9	0.0021	32900	3.37
VS-C3	43.5	0.0019	34300	3.13



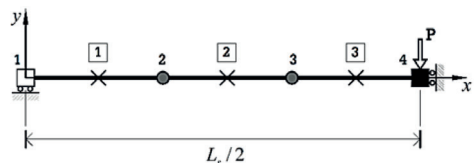
รูปที่ 4 รายละเอียดการติดตั้งคาน



รูปที่ 5 รายละเอียดหน้าตัดคาน

7.2 การสร้างแบบจำลองคาน

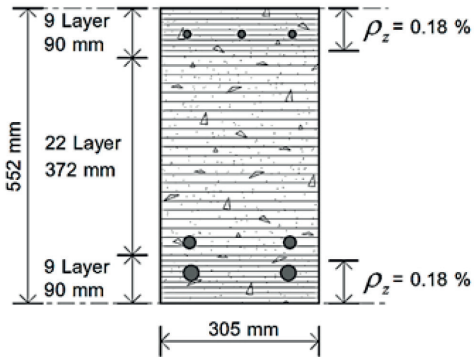
เนื่องจากคานจริงมีความสมมาตร ดังนั้นคานในแบบจำลองจึงถูกสร้างเพียงครึ่งเดียว (รูปที่ 6) โดยคานในแบบจำลองประกอบขึ้นจากเอลิเมนต์โครงข้อแข็ง 3 ชั้น แต่ละชั้นมีความยาวประมาณหนึ่งเท่าของความลึกหน้าตัด และมีตำแหน่งของจุดเกาส์ 3 จุดที่โหนดที่ 1 เป็นฐานรองรับแบบลูกกลิ้ง มีการยึดตั้งแนวตั้งที่โหนด 4 และจากเงื่อนไขของความสมมาตร ณ โหนดดังกล่าวคานจึงถูกยึดตั้งแนวอนและการหมุนซึ่งในการวิเคราะห์หน้าหนึ่งกบรทุกจะถูกกำหนดให้เพิ่มขึ้นในแนวตั้ง ณ โหนด 4 จนกระทั่งคานเกิดการวิบัติ



รูปที่ 6 แบบจำลองการวิเคราะห์

7.3 การสร้างแบบจำลองของหน้าตัด

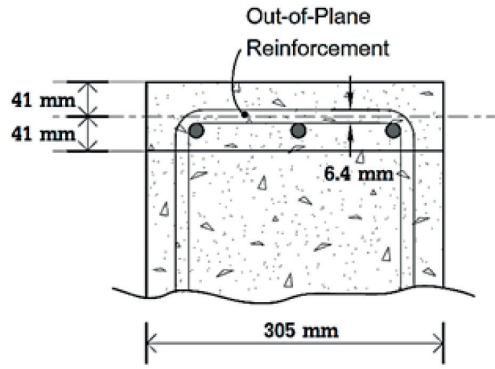
แบบจำลองของหน้าตัดจะแบ่งชั้นคอนกรีตออกเป็น 30 ถึง 40 ชั้น แต่เนื่องจากการกระจายความเครียดตามยาวจะมีค่าสูงสุดที่บริเวณผิวบนและล่างของหน้าตัด ดังนั้นความหนาของชั้นคอนกรีตในบริเวณดังกล่าวจึงควรลดลงเพื่อความละเอียดของผลการวิเคราะห์ ดังแสดงในรูปที่ 7



รูปที่ 7 แบบจำลองรายละเอียดหน้าตัดสำหรับคาน VS-A1

การกำหนดค่าเหล็กเสริมออกจากกระนาบต้องพิจารณาความหนาของระยะหุ้มคอนกรีต คาน VS-A1 ซึ่งมีระยะหุ้ม 38 มม. และเหล็กถูกตั้งมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 6.4 มม. ขาของเหล็กปลอกขยายไปในทิศทางที่ออกจากกระนาบสำหรับเหล็กเสริมในบริเวณแรงดึงข้อกำหนดของ CEB-FIP (1990) กำหนดพื้นที่เป็น 7.5 เท่าของเส้นผ่าศูนย์กลางเหล็กเสริม ดังนั้นคาน VS-A1 จึงมีความหนาประสิทธิภาพในบริเวณดังกล่าวเป็น $6.4 \times 7.5 = 48$ มม. ด้วยความหนาของระยะหุ้มและแนวศูนย์กลางของเหล็กปลอกจะได้ 41 มม. เพื่อความสะดวกจะใช้ระยะนี้ (รูปที่ 8) ดังนั้นเส้นใยคอนกรีตครอบคลุมความลึก 82 มม. ทั้งด้านบนและด้านล่างของหน้าตัด เหล็กเสริมออกจากกระนาบตามตารางที่ 3 คำนวณได้ดังนี้

$$\rho_z = \frac{A_{sb}}{A_c} = \frac{(\pi \times 6.4^2) / 4}{210 \times 82} = 0.0018 \quad (35)$$



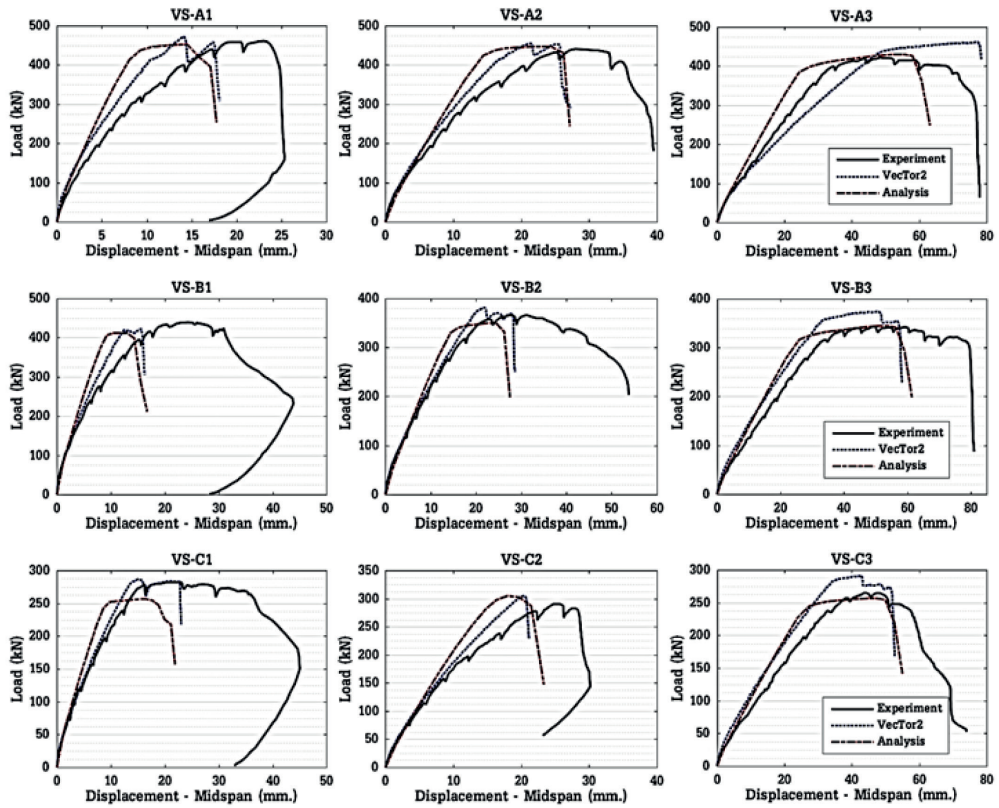
รูปที่ 8 การกำหนดพื้นที่เหล็กเสริมออกจากกระนาบของคาน VS-A1

ตารางที่ 3 อัตราส่วนเหล็กเสริมตามขวางและเหล็กเสริมออกจากกระนาบ

Beam Number	Reinforcement Ratios	
	ρ_y (%)	ρ_z (%)
VS-A1	0.100	0.18
VS-A2	0.100	0.18
VS-A3	0.100	0.18
VS-B1	0.148	0.20
VS-B2	0.148	0.20
VS-B3	0.147	0.20
VS-C1	0.202	0.18
VS-C2	0.202	0.18
VS-C3	0.201	0.18

7.4 เปรียบเทียบแบบจำลองกับผลทดสอบ

ผลการทดสอบและวิเคราะห์โดยโปรแกรม VecTor2 ของ Vecchio และ Shim [26] เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการพัฒนาในงานวิจัยนี้ แสดงไว้ในตารางที่ 4



รูปที่ 9 เปรียบเทียบการตอบสนอง น้ำหนัก-การเปลี่ยนตำแหน่งที่กึ่งกลางช่วง

ตารางที่ 4 ผลการเปรียบเทียบของน้ำหนักและการเปลี่ยนตำแหน่ง

Beam	Ultimate load			Midspan deflection			Mode of failure
	P_{u-Test} (kN)	P_{u-Calc} (kN)	$\frac{P_{u-Test}}{P_{u-Calc}}$	δ_{u-Test} (mm)	δ_{u-Calc} (mm)	$\frac{\delta_{u-Test}}{\delta_{u-Calc}}$	
VS-A1	459	452.5	1.01	18.8	14.6	1.29	S-C
VS-A2	439	447.0	0.98	29.1	24.5	1.18	S-C
VS-A3	420	429.0	0.98	51.0	52.3	0.98	F-C
VS-B1	434	413.0	1.05	22.0	13.5	1.63	S-C
VS-B2	365	350.0	1.04	31.6	24.7	1.28	S-C
VS-B3	342	344.5	0.99	59.6	54.0	1.10	F-C
VS-C1	282	257.0	1.10	21.0	17.5	1.20	S-C
VS-C2	290	304.0	0.95	25.7	19.7	1.30	S-C
VS-C3	265	257.0	1.03	44.3	44.8	0.98	F-C
		Mean	1.02		Mean	1.22	
		COV(%)	4.36		COV(%)	16.31	

จากรูปที่ 9 และตารางที่ 4 พบว่าความสามารถในการรับน้ำหนักสูงสุดของคานที่คำนวณได้มีค่าใกล้เคียงอย่างมาก อัตราส่วนของน้ำหนักสูงสุดที่วิเคราะห์ได้ต่อผลทดสอบทั้งหมด 9 คานมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1.02 สัมประสิทธิ์การแปรผัน (Coefficient of Variation, COV) มีค่า 4.36% เมื่อพิจารณาพฤติกรรมของคานที่ครอบครองด้วยแรงเฉือน อัตราส่วนเหล่านี้เป็นที่น่าพอใจ

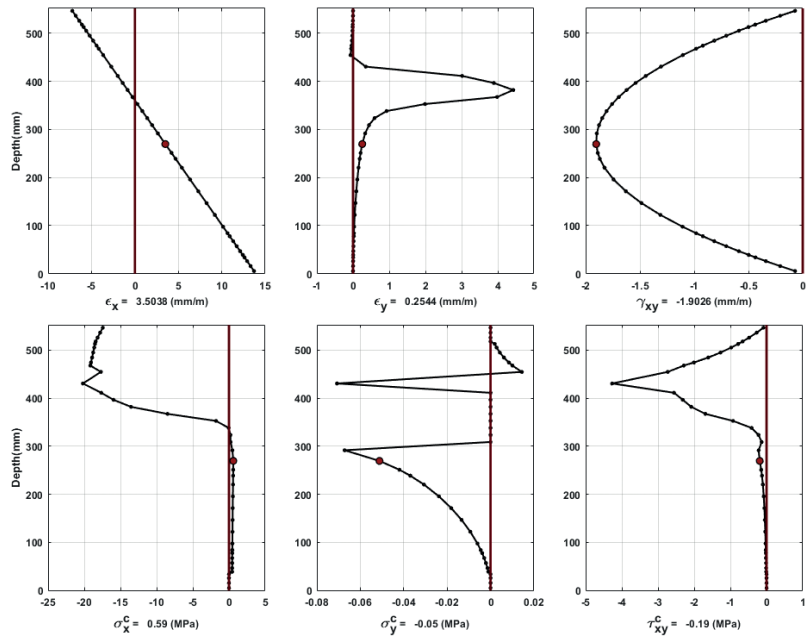
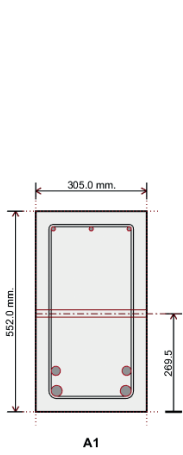
การโก่งตัวที่กลางคาน ณ ระดับน้ำหนักบรรทุกสูงสุดมีค่าเฉลี่ยเป็น 1.22 และสัมประสิทธิ์การแปรผันเป็น 16.31% แนวโน้มทั่วไปพบว่าการประมาณการโก่งตัวที่พัฒนาขึ้นมีความแข็งแรงมากกว่าการตอบสนองที่วิเคราะห์ด้วยโปรแกรม VecTor2 ซึ่งเป็นโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ 2 มิติ แต่ทั้งคู่ก็ยังมีแนวโน้มของพฤติกรรมใกล้เคียงกับผลที่บันทึกได้จากการทดสอบในห้องปฏิบัติการ ทั้งนี้เหตุผลที่ผลตอบสนองจากการทดสอบในห้องปฏิบัติการมีความอ่อนตัวมากกว่าผลที่ได้จากการวิเคราะห์อาจมาจากความยืดหยุ่นของเครื่องให้น้ำหนักบรรทุก รวมถึงความไม่แน่นอนจากการติดตั้งในการทดสอบ เช่น การควบคุมการเสีรูปร่างในแต่ละขั้นตอนซึ่งจะมีผลกระทบการคืบระยะสั้นและการให้น้ำหนักเริ่มต้นอาจจะมีผลสืบเนื่อง โดยทั้งหมดเป็นการยากที่จะกำหนดเงื่อนไขลงไปในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

การเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดการวิบัติเป็นสิ่งสำคัญสำหรับการพิจารณาความเหนียวของโครงสร้าง ผลวิเคราะห์ที่ได้จากขั้นตอนที่พัฒนาขึ้นส่วนใหญ่มีค่าน้อยกว่าผลทดสอบ เช่นเดียวกับผลวิเคราะห์ที่ได้จาก VecTor2 ทั้งนี้อาจเนื่องจาก ความเหนียวหลังจุดสูงสุดของคานที่มีเหล็กเสริมรับแรงเฉือนเพียง 0.1% จะทำให้กลไกการรับแรงขึ้นอยู่กับความกำลังดึงของคอนกรีต โดยในขั้นตอนที่พัฒนาขึ้นได้คำนวณกำลังดึงของคอนกรีตจาก $0.33 \cdot \sqrt{f'_c}$ (MPa) ทั้งนี้เจตนาที่เลือกใช้กำลังดึง

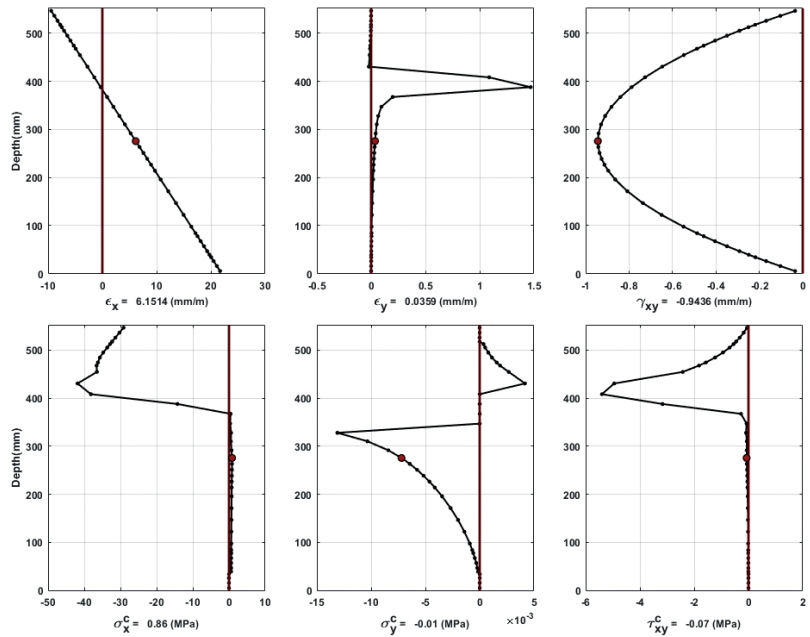
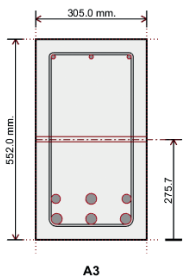
ของคอนกรีตซึ่งอยู่ในขีดจำกัดล่างนี้ (ต่ำกว่ากำลังคอนกรีตผ่าซีก f_{sp} หรือโมดูลัสแตกร้าว f_r) เนื่องจากการประมาณกำลังดึงของคอนกรีตโดยทั่วไปนั้นให้ค่าที่สูงเกินจริงและตามรายงานของ Vecchio และ Shim [28] การอัดแตกของคอนกรีตใต้แผ่นเหล็ก (Bearing Plate) ก็เป็นปัจจัยที่สำคัญอันหนึ่งในการพิจารณาผลกระทบจากการเพิ่มกำลังและความเหนียวของคอนกรีตอันเนื่องมาจากการยึดรั้งของแผ่นเหล็กจะช่วยโอบรัดคอนกรีตทำให้คอนกรีตบริเวณใต้แผ่นเหล็กมีความเหนียวมากกว่าบริเวณใกล้เคียง ซึ่งผลของปัจจัยนี้ก็ไม่ได้นำมาพิจารณาในขั้นตอนที่พัฒนาขึ้นในบทความนี้ทำให้ความเหนียวที่ได้จากจากขั้นตอนที่พัฒนาขึ้น (รวมถึงโปรแกรม VecTor2) มีค่าต่ำกว่าความเป็นจริง

โหมดการวิบัติได้รับรายงานในผลทดสอบของ Vecchio และ Shim [28] (ตารางที่ 4) ประกอบด้วย (ก) การวิบัติจากแรงเฉือน-อัด (Shear-Compression, S-C) ซึ่งเกิดขึ้นในคานที่มีความยาวปานกลาง (VS-A1, VS-A2, VS-B1, VS-B2, VS-C1 และ VS-C2) และ (ข) วิบัติจากแรงดัด-อัด (Flexure-Compression, F-C) ซึ่งเกิดขึ้นในคานช่วงยาว (เช่น VS-A3, VS-B3 และ VS-C3) โดยคานทั้งสองแบบแสดงการวิบัติสุดท้ายโดยการอัดแตกของคอนกรีตดังแสดงตามภาพการกระจายตัวของหน่วยแรงและความเครียดที่ได้จากขั้นตอนที่พัฒนาขึ้น ในรูปที่ 10 และ 11 ตามลำดับ

รูปที่ 2 ข้างต้นแสดงผลลัพธ์ที่จุดน้ำหนักบรรทุกมีค่าสูงสุด ณ โหนด 4 ของคาน VS-A1 และ VS-A3 ตามลำดับ ความเครียดเฉือนสูงสุดของคาน VS-A1 มีค่าเป็น 1.90×10^{-3} มากกว่าความเครียดเฉือนสูงสุดของคาน VS-A3 ซึ่งมีค่าเป็น 0.94×10^{-3} แสดงถึงผลกระทบของความเครียดเฉือนที่มีมากกว่าสำหรับคานที่วิบัติจากแรงเฉือน-อัด



รูปที่ 10 ผลลัพธ์ที่จุดนำหน้ากับรรทุกสูงสุดของคาน VS-A1

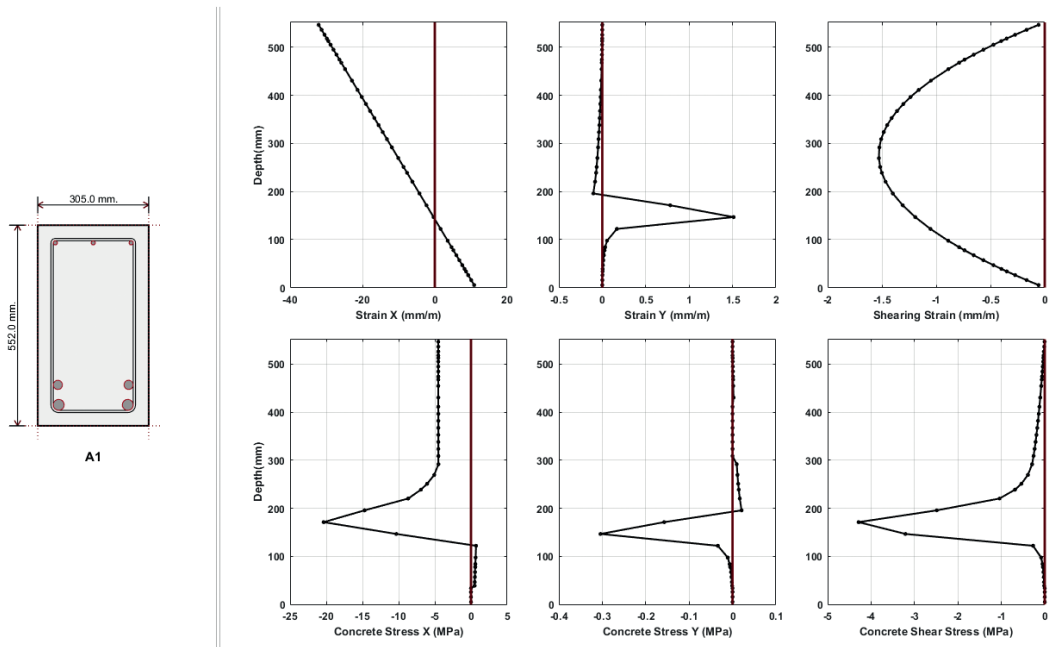


รูปที่ 11 ผลลัพธ์ที่จุดนำหน้ากับรรทุกสูงสุดของคาน VS-A3

รูปที่ 12 พบว่าหน่วยแรงอัดในคอนกรีตตามแนว X (Concrete Stress X) สำหรับคาน VS-A1 พบว่าคอนกรีตในบริเวณผิวรับแรงอัดแรงอัดมีค่าอยู่เพียง 20% ของหน่วยแรงอัดสูงสุดที่เกิดขึ้น (บริเวณเหนือตำแหน่งของเหล็กเสริมเสริมรับแรงดึง) แสดงให้เห็นถึงการอัดแตกบริเวณกลางคาน ทั้งนี้การคำนวณหน่วยแรงของคอนกรีตภายหลังค่าแรงสูงสุด (Post-Peak) จะใช้พื้นฐานเส้นกราฟตาม แบบจำลอง Modified Park-Kent โดยข้อมูลรายละเอียดเกี่ยวกับแบบจำลองนี้สามารถ

พบได้ใน Vecchio [24] ซึ่งมีหน่วยแรงเป็น $(0.20 \times 22.6 = 4.52 \text{ MPa})$

ความเครียดในเหล็กเสริมรับแรงดึงของคาน VS-A1 (รูปที่ 12) ความเครียดตามขวาง (Strain Y) ประมาณ 1.5×10^{-3} ความเครียดตามยาว (Strain X) ประมาณ 13×10^{-3} แสดงให้เห็นว่าห่างจากความเครียดแตกหัก 175×10^{-3} ถ้าการแตกหักของเหล็กเสริมใดเกิดขึ้นความสามารถรับน้ำหนักของโครงสร้างจะลดลงกะทันหัน



รูปที่ 12 ผลลัพธ์ที่จุดวิบัติของคาน VS-A1

การเปรียบเทียบผลวิเคราะห์กับผลวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมไฟไนต์อีลิเมนต์ 2 มิติ นั่นคือ VecTor2 พบว่าส่วนใหญ่ความแข็งแรงและกำลังมีความแตกต่างกันเล็กน้อยเพียงเฉพาะคาน VS-A3 เท่านั้นที่ให้การตอบสนองต่างกันจากผลทดสอบ (รูปที่ 9)

ดังนั้นถึงแม้แบบจำลองที่นำเสนอในบทความนี้จะใช้ระดับขั้นที่ 1 มิติ เท่านั้น แต่ก็พบว่าให้การทำนายพฤติกรรมได้ดีเทียบเท่าที่ได้จากโปรแกรมในแบบ 2 มิติ (แต่ขั้นตอนที่

พัฒนาขึ้นใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่ามาก) และเพื่อพิจารณาจากการเปรียบเทียบโปรแกรมทั้ง 2 ประเภทก็ให้การทำนายพฤติกรรมของโครงสร้างจริงในห้องปฏิบัติการได้ใกล้เคียงเป็นที่น่าพอใจ

8. อภิปรายและสรุปผลการวิจัย

ชุดการทดสอบจำนวน 9 คาน ซึ่งทดสอบพฤติกรรมของโครงสร้างเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากขั้นตอนที่พัฒนาขึ้น ใน

รูปแบบของแรงกระทำ - การโค้งตัวความเครียดเหล็กเสริม
เงื่อนไขการวิบัติของโครงสร้างลักษณะการวิบัติและการเปลี่ยน
ตำแหน่งที่หลังจุดสูงสุดแสดงถึงขั้นตอนการวิเคราะห์ที่เหมาะสม
ในการจำลองพฤติกรรมแรงเฉือนของคานคอนกรีตเสริมเหล็ก
การเลือกพารามิเตอร์สร้างขึ้นมาก่อนการวิเคราะห์ การคำนวณ
การตอบสนอง ความโค้ง ความเครียดเฉือนสร้างในระหว่าง
ขั้นตอนวิเคราะห์

การเขียนโปรแกรมคำนวณโดยใช้ MATLAB ใช้เวลาประมาณ
3-5 นาที ดังนั้นการจำลองเหมาะสมกับความพยายามด้าน
วิศวกรรม แต่เวลาในการคำนวณนี้ยังสามารถลดลงได้อีก
ด้วยการเขียนโปรแกรมการคำนวณซ้ำแบบขนาน ดังนั้นการทำ
วนซ้ำที่แต่ละเอลิเมนต์และแต่ละหน้าตัดสามารถถูกกระทำได้
ในเวลาเดียวกันทำให้เวลาประมวลผลลดลงได้อีกอย่างมาก

การตรวจสอบความถูกต้องดำเนินการโดยการวิเคราะห์
แก้ตัวอย่างโดยส่วนใหญ่เป็นแรงเฉือนวิกฤติผลที่ได้ต่อไปนี้

1. การพิจารณาผลกระทบจากแรงเฉือนจำเป็นสำหรับ
การประเมินความปลอดภัยและความสมจริงของโครงสร้าง
คอนกรีตเสริมเหล็ก เนื่องจากองค์อาคารที่วิกฤติด้วยแรงเฉือน
ยังคงพบได้ในทางปฏิบัติ แต่ส่วนใหญ่ถูกตัดออกไป จึงส่งผล
ให้ประมาณกำลังและความเหนียวสูงเกินไป

2. เอลิเมนต์โครงข้อแข็งบนพื้นฐานเพลกซิบิลิตีด้วยการ
แบ่งย่อยหน้าตัดเป็นชิ้นเส้นใยและวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธี
ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไร้เชิงเส้นที่พัฒนาขึ้นมีความสะดวกรวดเร็ว
ในการสร้างแบบจำลอง ทำให้ง่ายต่อการใช้งานโดยเฉพาะ
อย่างยิ่งการศึกษาปัญหาที่มีความซับซ้อน

3. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไร้เชิงเส้นด้วยเอลิเมนต์
โครงข้อแข็งบนพื้นฐานเพลกซิบิลิตีที่พัฒนาขึ้นให้ผลตอบสนอง
พื้นฐานเช่น ความเครียดตามแกน ความโค้ง และความเครียด
เฉือนสำหรับจำลองพฤติกรรมแบบไร้เชิงเส้นของโครงสร้าง
คอนกรีตเสริมเหล็กได้อย่างแม่นยำ

4. วิธีรอยแตกร้าวกระจายตัวเฉลี่ย ที่ได้นำเสนอนี้เป็นแบบ
จำลองที่เรียบง่ายและถูกต้องในพฤติกรรมสภาพพลาสติกของ
หน้าตัดโดยเฉพาะองค์อาคารที่วิกฤติด้วยการเฉือน

5. เอลิเมนต์โครงข้อแข็งรวมถึงรูปแบบการวิเคราะห์ที่
พัฒนาขึ้น สามารถจำลองผลตอบสนองของคานคอนกรีตเสริม
เหล็กภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำทางเดียวได้เป็นอย่างดี
อีกทั้งวิศวกรโดยทั่วไปยังสามารถนำไปใช้โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมา
จำลองโครงสร้างจริงได้อย่างรวดเร็วและแม่นยำอีกด้วย

9. เอกสารอ้างอิง

1. D'Ambrisi, A. and Filippou, F., 1997, "Correlation Studies on an RC Frame Shaking-Table Specimen," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 26, pp. 1021-1040.
2. Li, Y. and Jirsa, J., 1998, "Nonlinear Analysis of an Instrumented Structure Damaged in the 1994 Northridge Earthquake," *Earthquake Spectra*, 14 (2), pp. 265-283.
3. Elwood, K., 2004, "Modeling Failures in Existing Reinforced Concrete Columns," *Canadian Journal of Civil Engineering*, 31 (5), pp. 846-859.
4. Lee, D. and Elnashai, A., 2001, "Seismic Analysis of RC Bridge Columns with Flexure-Shear Interaction," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 127 (5), pp. 546-553.
5. Lee, D. and Elnashai, A., 2002, "Inelastic Seismic Analysis of RC Bridge Piers Including Flexure - Shear - Axial Interaction," *Structural Engineering and Mechanics*, 13 (3), pp. 546-553.
6. Xu, S. and Zhang, J., 2012, "Axial - Shear-Flexure Interaction Hysteretic Model for RC Columns under Combined Actions," *Journal of Engineering Structures*, 34 (1), pp. 548-563.
7. Spacone, E., Filippou, F. and Taucer, F., 1996, "Fiber Beam - Column Model for Nonlinear Analysis of R/C Frames, Part I Formulation," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25, pp. 711-725.
8. Ranzo, G. and Petrangeli, M., 1998, "Fiber Finite Beam Element with Section Shear Modeling for Seismic Analysis of RC Structures," *Journal of Earthquake Engineering*, 2 (3), pp. 443-473.
9. Shirai, N., Moriizumi, K. and Terasawa, K., 2001, "Cyclic Analysis of Reinforced Concrete Columns Macro-Element Approach Modeling of Inelastic Behavior of RC Structures under Seismic Load, American Society of Civil Engineers, Reston, Virginia, pp. 435-453

10. Marini, A. and Spacone, E., 2006, "Analysis of Reinforced Concrete Elements Including Shear Effects," *Structural Journal*, American Concrete Institute, 103 (5), pp. 645-655.
11. Petrangeli, M., Pinto, P. and Ciampi, V., 1999, "Fiber Element for Cyclic Bending and Shear of R/C Structures, Part I : Theory," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 125 (9), pp. 994-1001.
12. Vecchio, F. and Collins, M., 1981, "Stress-Strain Characteristic of Reinforced Concrete in Pure Shear. IABSE Colloquium, Advanced Mechanics of Reinforced Concrete, Delft, Final Report," International Association of Bridge and Structural Engineering, Zurich, Switzerland, pp. 221-225.
13. Vecchio, F. and Collins, M., 1986, "The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear," *ACI Journal, Proceedings*, 83 (2), pp. 219-231.
14. Belarbi, A. and Hsu, T., 1994, "Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened by Concrete," *ACI Structural Journal*, 91 (4), pp. 465-474.
15. Pang, X. and Hsu, T., 1995, "Behavior of Reinforced Concrete Membrane Elements in Shear," *ACI Structural Journal*, 92 (6), pp. 665-679.
16. Belarbi, A. and Hsu, T., 1994, "Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened by Concrete," *ACI Structural Journal*, 91 (4), pp. 465-474.
17. Hsu, T. and Zhang, L., 1997, "Nonlinear Analysis of Membrane Elements by Fixed-Angle Softened-Truss Model," *ACI Structural Journal*, 94 (5), pp. 483-492.
18. Zhang, L. and Hsu, T., 1998, "Behavior and Analysis of 100 Mpa Concrete Membrane Elements," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 124 (1), pp. 24-34.
19. Zhu, R.H., Hsu, T. and Lee, J. , 2001, "Rational Shear Modulus for Smeared Crack Analysis of Reinforced Concrete," *ACI Structural Journal*, 98 (4), pp. 443-450.
20. Zhu, R. and Hsu, T., 2002, "Poisson Effect of Reinforced Concrete Membrane Elements," *ACI Structural Journal*, 99 (5), pp. 631-640.
21. Spacone, E., Ciampi, V. and Filippou, F.C., 1996, "Mixed Formulation of Nonlinear Beam Finite Element," *Computers and Structures*, 58 (1), pp. 71-83.
22. Kupfer, H., Hildorf, H. and Rusch, H., 1969, "Behavior of Concrete under Biaxial Stresses," *Structural Journal of the American Concrete Institute*, 66 (8), pp. 656-666.
23. Vecchio, F., 2000, "Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete : Formulation," *Journal of Structural Engineering*, 12 (69), pp. 1070-1077.
24. Vecchio, F., 1992, "Finite Element Modeling of Concrete Expansion and Confinement," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 118 (9), pp. 2390-2405.
25. He, X. and Kwan, A., 2001, "Modeling Dowel Action of Reinforcement Bars for Finite Element Analysis of Concrete Structures," *Computers and Structures*, 79 (6), pp. 595-604.
26. Vecchio, F. and Shim W., 2004, "Experimental and Analytical Reexamination of Classic Concrete Beam Tests," *ASCE Journal of Structural Engineering*, 130 (3), pp. 460-469.

