แนวคิดใหม่ทางวิศวศึกษาสำหรับการเรียนการสอนกลศาสตร์ของแข็ง : การสร้างภาพความเข้าใจผ่านหลักการสำคัญ แผนที่ศาสตร์ และกลยุทธ์การแก้ปัญหา

สถาพร เจริญศุภโชคกุล[1*] พิเชษฐ์ พินิจ[2] อนุศิษฏ์ อันมานะตระกูล[2]
มานนท์ สุขละมัย[2] และ บรรจบ อรชร[3]

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี บางมด ทุ่งครุ กรุงเทพฯ 10140

** Corresponding Author: charun17@hotmail.co.th*
[1] อาจารย์ประจำ ภาควิชาครุศาสตร์เครื่องกล คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและเทคโนโลยี
[2] ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาครุศาสตร์เครื่องกล คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและเทคโนโลยี
[3] รองศาสตราจารย์ ภาควิชาครุศาสตร์เครื่องกล คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและเทคโนโลยี

ข้อมูลบทความ **บทคัดย่อ**

ประวัติบทความ :
รับเพื่อพิจารณา : 20 มีนาคม 2561
แก้ไข : 24 ธันวาคม 2561
ตอบรับ : 7 กุมภาพันธ์ 2562

คำสำคัญ :
กลศาสตร์ของแข็ง / การเชื่อมโยงเนื้อหา / แผนที่ศาสตร์ / ภาพความเข้าใจ / วิศวศึกษา

กลศาสตร์วิศวกรรมสาขากลศาสตร์ของแข็งประกอบด้วยรายวิชาสถิตศาสตร์และกลศาสตร์ของวัสดุ และเป็นรากฐานสำคัญในการเรียนรู้รายวิชาการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกลและศาสตร์วิศวกรรมอื่นๆ การเชื่อมโยงรายวิชาเหล่านี้เข้าด้วยกันเป็นภาพความเข้าใจเป็นหนทางที่ช่วยสร้างเสริมการเรียนรู้กลศาสตร์ของแข็ง บทความฉบับนี้นำเสนอแนวคิดใหม่ในการเชื่อมโยงเนื้อหาในรายวิชาข้างต้นให้เป็นภาพความเข้าใจผ่านการวิเคราะห์และสังเคราะห์จากประสบการณ์ตรงของผู้เขียน และการทบทวนเอกสาร หนังสือ ตำรา และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ภาพความเข้าใจมีองค์ประกอบ 3 ส่วน ได้แก่ หลักการสำคัญ แผนที่ศาสตร์ และกลยุทธ์การแก้ปัญหา องค์ประกอบเหล่านี้ชี้นำไปสู่เป้าหมายของการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกลซึ่งมีหลักการสำคัญประกอบด้วย 7 เรื่อง คือ การสมดุล ระบบอ้างอิงและเครื่องหมาย การจำลองชิ้นส่วนและภาระสมมูล แผนภาพวัตถุอิสระ ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด หลักการของเซนต์วีแนนท์ และความหนาแน่นของความเค้น แผนที่ศาสตร์แสดงความเชื่อมโยงระหว่างหลักการสำคัญ วิธีการให้ได้มาซึ่งสูตร และเหตุผลเบื้องลึกของการจัดเรียงลำดับเนื้อหาของรายวิชาในกลศาสตร์ของแข็งตามที่ปรากฏในหนังสือที่นิยมใช้อ้างอิงกันโดยทั่วไป และกลยุทธ์การแก้ปัญหาประกอบด้วย 5 ส่วนคือ ทำความเข้าใจสภาพปัญหา วางแผน ลงมือแก้ปัญหา ประเมินผลการแก้ปัญหา และคาดการณ์สภาพปัญหา ภาพความเข้าใจสามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการกำหนดผลลัพธ์การเรียนรู้ระดับศาสตร์ การทวนสอบความเข้าใจเพื่อป้องกันความคลาดเคลื่อนในแนวคิดและหลักการสำคัญ การชี้นำการสอนเป็นทีม และการสร้างสื่อการสอน

New Idea to Engineering Education for Teaching and Learning Mechanics of Solids: Creating Comprehensive Picture through Major Principles, Discipline Map, and Problem Solving Strategy

Sathaphon Charernsuphachokkul[1*], Pichet Pinit[2], Anusit Anmanatarkul[2], Manon Sooklamai[2] and Banchob Orachon[3]

King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangmod, Thungkru, Bangkok 10140

** Corresponding Author: charun17@hotmail.co.th*

[1] Lecturer, Department of Mechanical Technology Education, Faculty of Industrial Education and Technology.

[2] Assistant Professor, Department of Mechanical Technology Education, Faculty of Industrial Education and Technology.

[3] Associate Professor, Department of Mechanical Technology Education, Faculty of Industrial Education and Technology.

Article Info

Article History:
Received: March 20, 2018
Revised: December 24, 2018
Accepted: February 7, 2019

Keywords:
Mechanics of Solids / Content Connectedness / Discipline Map / Comprehensive Picture / Engineering Education

Abstract

Mechanics of solids, which is a part of the larger engineering mechanics, comprises of two courses, namely, statics and mechanics of materials, and plays a major role in laying a foundation necessary for subsequent design of machine elements and other engineering courses. Linking these courses into a comprehensive picture may thus enhance the learning of the mechanics of solids course. This article aimed to present a new concept of integrating the contents of these courses into a comprehensive picture through the analysis and synthesis of the authors' direct teaching experience, textbooks, and related research articles. The comprehensive picture consists of three main parts: major principles, discipline map, and problem solving strategy. This could lead to a primary goal of designing mechanical load-carrying components, which consists of 7 major principal topics: equilibrium, reference system and sign convention, modelling of members and equivalent loads, free body diagram, stress-strain relationship, St. Venant's principle, and stress concentration. The discipline map could be used to illustrate the relationship among the major topics as well as the derivation of formula, and underlying reasons of contents' arrangement as appeared in general reference textbooks. In terms of the problem solving strategy, five different parts have been devised: understanding the problem, planning, solving problems, evaluation of the solution, and prediction of the problem change. The comprehensive picture with the major principal topics, discipline map, and problem solving strategy is presented in such a way that it can be used as a guideline for determining learning outcomes, and verifying misconceptions in key concepts and principles. It can also be used to guide team teaching and teaching materials building.

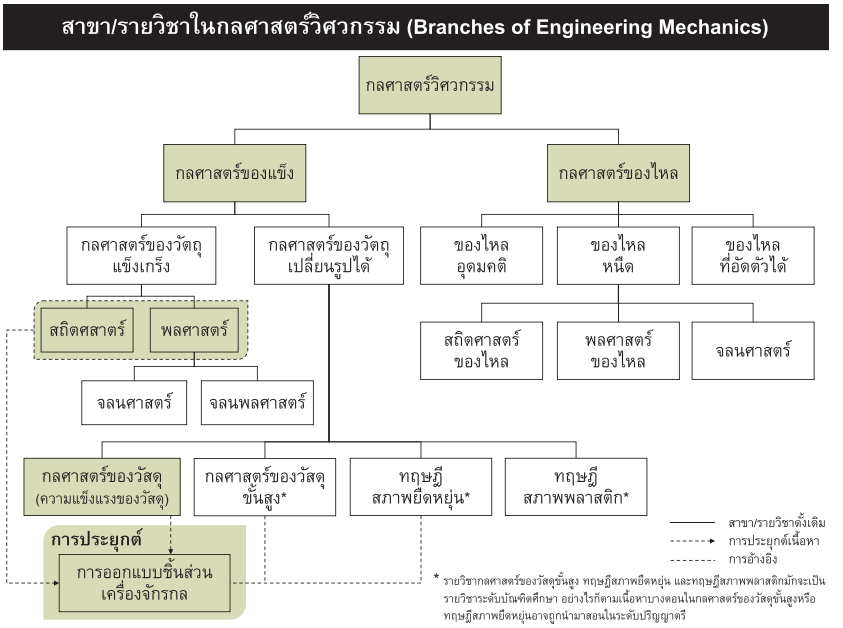
1. บทนำ

1.1 ความสำคัญของกลศาสตร์วิศวกรรม

การออกแบบและสร้างสิ่งของหรือระบบจักรกลเพื่อตอบสนองความต้องการของมนุษย์ต้องอาศัยองค์ความรู้หรือศาสตร์ทางวิศวกรรม (engineering disciplines) ซึ่งจำแนกออกเป็นสองส่วนหลักคือ วิทยาศาสตร์เชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Science) (คณิตศาสตร์ประยุกต์และสถิติ) และวิทยาศาสตร์กายภาพ (Physical Science) (ฟิสิกส์ เคมี และชีววิทยา)

ปรากฏการณ์ต่างๆ รอบตัวเราสามารถอธิบายได้ด้วยฟิสิกส์ (Physics) ซึ่งเป็นสาขาที่ศึกษาองค์ประกอบและความสัมพันธ์ระหว่างสสารกับพลังงานที่แปรเปลี่ยนไปตามกระบวนการทางธรรมชาติโดยไม่คำนึงถึงผลทางชีวภาพและทางเคมี [1] ฟิสิกส์ช่วยให้เราเข้าใจว่าปรากฏการณ์เหล่านั้นเกิดขึ้นได้อย่างไรและเพราะเหตุใด? ความเข้าใจในปรากฏการณ์ดังกล่าวจะช่วยให้สามารถทำนายปรากฏการณ์ที่จะเกิดขึ้นต่อไปได้และนำไปใช้เพื่อออกแบบและสร้างระบบโครงสร้างหรือจักรกลต่างๆ ให้มีผลลัพธ์ตามที่ต้องการได้

กลศาสตร์ (Mechanics) เป็นสาขาหนึ่งในฟิสิกส์ที่ศึกษาการเคลื่อนที่และการเปลี่ยนรูปของวัตถุแข็งหรือของเหลวภายใต้การกระทำของแรงภายนอกทั้งที่อยู่กับที่ (at rest) หรือเคลื่อนที่ (in motion) [1, 2] ด้วยเหตุนี้การเรียนการสอนฟิสิกส์ในหลักสูตรระดับต่างๆ ทั้งระดับมัธยมศึกษา อาชีวศึกษาหรืออุดมศึกษาจึงมักจะเริ่มด้วยสถิตศาสตร์และพลศาสตร์ ซึ่งอาจแยกกันหรือรวมกันก็ได้โดยมีความลุ่มลึกต่างกัน ด้วยคำนิยามของวิศวกรรมศาสตร์และกลศาสตร์ซึ่งเมื่อนำมาผนวกรวมเข้าด้วยกันก็จะได้สาขาที่มีชื่อเรียกว่า กลศาสตร์วิศวกรรม (Engineering Mechanics) การศึกษาในสาขานี้อาศัยหลักการของกลศาสตร์เพื่อการออกแบบทางกล (Mechanical Design) กล่าวคือ การออกแบบระบบทางกลหรือชิ้นส่วนทางกลในเครื่องจักรกลที่คำนึงถึงการกระทำของภาระภายนอก (external loads) ทั้งที่กระทำต่อระบบ และต่อวัตถุหรือของเหลวในระบบนั้น รูปที่ 1 แสดงความสัมพันธ์ของสาขาและรายวิชาต่างๆ ในกลศาสตร์วิศวกรรมซึ่งจำแนกออกได้เป็นสองเส้นทางคือ กลศาสตร์ของแข็ง (Mechanics of Solids) และกลศาสตร์ของไหล (Mechanics of Fluids) [3]



รูปที่ 1 สาขา/วิชาต่างๆ ในกลศาสตร์วิศวกรรมและรายวิชาการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกล (ดัดแปลงจาก [3])

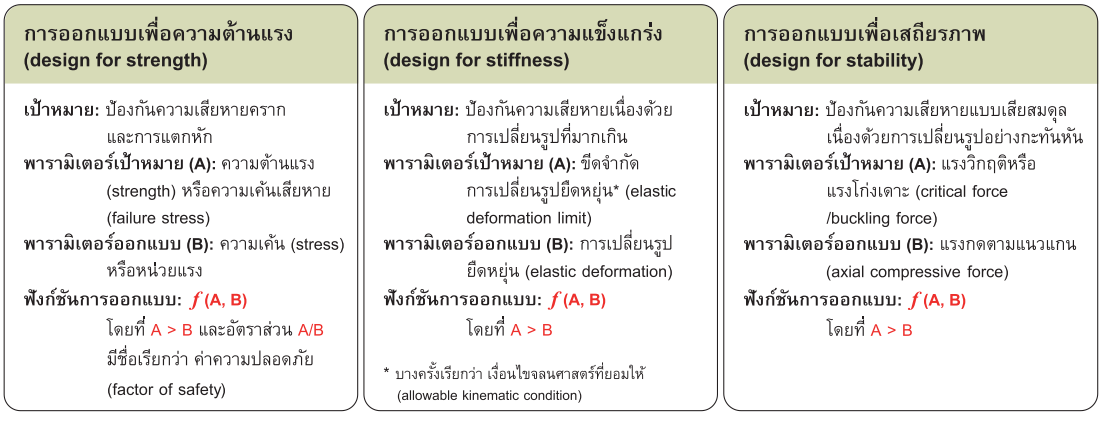
เมื่อพิจารณาเฉพาะเส้นทางกลศาสตร์ของแข็ง การเรียนกลศาสตร์วิศวกรรมมักจะเริ่มต้นด้วยรายวิชาสถิตศาสตร์และรายวิชาพลศาสตร์โดยอาศัยสมมติฐานสำคัญคือการกำหนดให้วัตถุที่สนใจเป็นวัตถุแข็งเกร็ง (rigid body) ซึ่งเป็นวัตถุที่มีรูปร่างและขนาดคงตัวภายใต้การกระทำของภาระภายนอก รายวิชาในลำดับถัดมาจะกำหนดให้วัตถุที่สนใจเป็นวัตถุเปลี่ยนรูปได้ (deformable bodies) รายวิชานี้มีหลายชื่อได้แก่ ความแข็งแรงของวัสดุ (Strengthof Materials) กลศาสตร์ของวัสดุ (Mechanics of Materials) หรือกลศาสตร์ของวัตถุเปลี่ยนรูป (Mechanics of Deformable Bodies) การเรียนและความเข้าใจเชิงลึกในรายวิชาทั้งสามตามเส้นทางกลศาสตร์ของแข็งถือเป็นกุญแจสำคัญ (key courses) ในการศึกษากลศาสตร์วิศวกรรมที่จะนำไปสู่การออกแบบทางกลเพื่อสร้างชิ้นส่วน โครงสร้างหรือระบบทางกล

1.2 สภาพปัญหา

โดยทั่วไปแล้วเนื้อหาสาระของแต่ละรายวิชาในรูปที่ 1 จะแยกออกจากการอย่างชัดเจน สภาพการณ์นี้พบได้ในตำรากลศาสตร์วิศวกรรมด้านกลศาสตร์ของแข็งที่นิยมใช้กันทั่วไปในมหาวิยาลัยต่างๆ ทั่วโลกทั้งรายวิชาสถิตศาสตร์ พลศาสตร์และกลศาสตร์ของวัสดุ [1-13] ทั้งนี้ผู้แต่งหนังสือข้างต้นได้พยายามที่จะบูรณาการวิชาเข้าด้วยกัน เช่น สถิตศาสตร์รวมกับพลศาสตร์ หรือสถิตศาสตร์รวมกับกลศาสตร์วัสดุ อย่างไรก็ตามเนื้อหาในภาพรวมก็ยังคงแยกกันอยู่ กล่าวคือ ยังคงมุ่งเน้นในการอธิบายลงลึกในเนื้อหาส่วนนั้นๆ

จากประสบการณ์การสอน ผู้เขียนพบว่าสภาพปัญหาที่มักจะเกิดขึ้นก็คือ การที่ผู้เรียนไม่สามารถมองเห็นภาพองค์รวมของกลศาสตร์ของแข็ง (รูปที่ 1) และไม่สามารถนำไปใช้ในรายวิชาที่ต่อเนื่องกันหรือในอาชีพได้ อาทิ การออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกลซึ่งมุ่งเน้นการออกแบบและสร้างเครื่องจักรกลอุปกรณ์และเครื่องมือต่างๆ แนวคิดของการออกแบบนี้ถูกจำแนกออกได้สามเส้นทาง (รูปที่ 2)

พารามิเตอร์ออกแบบตามเส้นทางการออกแบบก็คือ ความเค้น (stress) การเปลี่ยนรูปยืดหยุ่น (elastic deformation) และแรงกดในแนวแกน (axial compressive force) ที่เป็นผลให้เกิดภาวะไร้เสถียรภาพหรือที่เรียกว่าการโก่งเดาะ (buckling) ตามลำดับ เพื่อให้การออกแบบตามแนวทางทั้งสามเป็นไปอย่างถูกต้องและเกิดความปลอดภัยการศึกษาพารามิเตอร์ออกแบบทั้งสามจึงเป็นเรื่องที่สำคัญและจำเป็นอย่างยิ่ง และด้วยเหตุนี้จึงเป็นคำตอบสำหรับคำถามที่ว่า เหตุใดเนื้อหาที่ผู้เรียนจะต้องเรียนในรายวิชากลศาสตร์ของวัสดุเกือบทั้งหมดจึงได้ถูกจัดเรียงหรือมีขอบเขตครอบคลุมเนื้อหาดังที่ปรากฏให้เห็นได้โดยทั่วไปในหนังสือกลศาสตร์ของวัสดุทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษ อย่างไรก็ตามหนังสือในเอกสารอ้างอิงลำดับที่ [14] นี้เท่านั้นที่ได้กล่าวถึงแนวคิดการออกแบบทั้งสามเส้นทางนี้แต่ก็ไม่ได้อธิบายเชื่อมโยงในรายละเอียดให้เห็นความสัมพันธ์ของเนื้อหาแต่อย่างใด

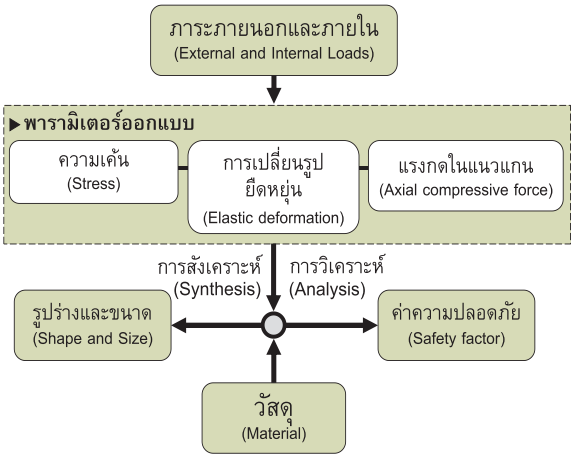


รูปที่ 2 เส้นทางการออกแบบสามเส้นทางที่อาศัยการเปรียบเทียบระหว่างพารามิเตอร์เป้าหมายและพารามิเตอร์ออกแบบ

เมื่อพิจารณาเส้นทางการออกแบบทั้งสามเรากำหนดวัตถุประสงค์การออกแบบได้ดังนี้คือ

1) เพื่อสังเคราะห์ (synthesis) ขนาดและรูปร่างของวัตถุรวมทั้งการเลือกใช้วัสดุและ/หรือกระบวนการผลิตที่เหมาะสม และ

2) เพื่อวิเคราะห์ (analysis) การออกแบบว่าถูกต้องเหมาะสมและสามารถใช้งานได้อย่างปลอดภัยหรือไม่ [15] (รูปที่ 3)



รูปที่ 3 เป้าหมายของการออกแบบโดยการสังเคราะห์เพื่อเลือกรูปร่าง ขนาดกระบวนการผลิต และวัสดุที่ใช้ทำชิ้นส่วนหรือการวิเคราะห์หาค่าความปลอดภัยที่เหมาะสมกับภาระกระทำและปัจจัยอื่นใดด้านเศรษฐศาสตร์ [15] (เพิ่มเติมพารามิเตอร์เพื่อการออกแบบโดยผู้เขียน)

เพื่อให้บรรลุเป้าหมายของการออกแบบ วิชาต่อไปที่ผู้เรียนจะได้เรียนก็คือ รายวิชาการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกลซึ่งเป็นเนื้อหาที่เป็นการประยุกต์ใช้เนื้อหาทั้งหมดที่ได้เรียนมาแล้วทั้งสามรายวิชาและเป็นสิ่งที่สัมพันธ์กับชีวิตประจำวันได้มากที่สุด อย่างไรก็ตามความเชื่อมโยงระหว่างรายวิชาทั้งหมดเหล่านี้ยังไม่เด่นชัดแม้ว่าจะมีความพยายามในการค้นหาแนวทางการเรียนการสอนผ่านการวิจัยในชั้นเรียนที่จะช่วยให้ผู้เรียนได้เรียนรู้และเข้าใจมโนทัศน์และหลักการสำคัญของรายวิชาเหล่านี้ [16-20] เนื่องด้วยแนวคิดการวิจัยโดยรวมยังเป็นไปเพื่อพัฒนาเฉพาะรายวิชาและขาดการเชื่อมโยงกับเป้าหมายสำคัญ กล่าวคือ การออกแบบทางกลหรือการออกแบบชิ้นส่วนทางกล

Mott [21] ได้เชื่อมโยงกลศาสตร์ของวัสดุกับการออกแบบเข้าด้วยกันอย่างชัดเจนซึ่งลักษณะเช่นนี้จะทำให้ผู้เรียนเห็นความเชื่อมโยงและประโยชน์ของการเรียนรายวิชากลศาสตร์วัสดุ อย่างไรก็ตามการให้คำนิยามปริมาณที่สำคัญทางกลศาสตร์วิศวกรรม อาทิ ความเค้น มีความรวบรัดจนเกินไปโดยมุ่งเน้นเพียงแค่สูตรจนทำให้หลักการสำคัญของกลศาสตร์วิศวกรรม คือ การสมดุล (equilibrium) ถูกลดความสำคัญลงไปขณะที่เรื่องการสมดุลเป็นเรื่องที่สำคัญอย่างยิ่ง [9-14] การรวบรัดจนเกินไปนี้จะทำให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในแนวคิดสำคัญ (misconception)

ทักษะการแก้ปัญหา (problem solving) เป็นสิ่งสำคัญและจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับผู้เรียนและผู้ทำงานในศตวรรษที่ 21 [22] และในกรณีของศาสตร์กลศาสตร์ของแข็ง Mott [21] ก็ได้แสดงให้เห็นขั้นตอนการแก้ปัญหาอย่างชัดเจน อย่างไรก็ตามการเรียนการสอนโดยทั่วไปและตัวอย่างในหนังสือหลายเล่มมักจะมุ่งเน้นทักษะการคำนวณ (computation) มากกว่าทักษะการแก้ปัญหา (problem solving) หากพิจารณาตามอนุกรมวิธานการเรียนรู้ (learning taxonomy) ที่ว่าด้วยเรื่องการจำแนกระดับการเรียนรู้เราจะเห็นความแตกต่างระหว่างทักษะทั้งสอง เช่น ในอนุกรมวิธานการเรียนรู้ SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes Taxonomy) ที่มี 5 ระดับ [23-25] ทักษะการคำนวณถูกจัดให้อยู่ในระดับพหุโครงสร้าง (SOLO-3multi-structural) ซึ่งอยู่ต่ำกว่าทักษะการแก้ปัญหาที่อยู่ในระดับความสัมพันธ์ (SOLO-4 rational) หรือระดับขยายนามธรรม (SOLO-5 extended abstact) และในอนุกรมวิธานการเรียนรู้ของ Marzano และ Kendall [26] ที่กำหนดให้การแก้ปัญหาอยู่ในระดับสูงสุดของระบบแห่งปัญญา (cognitive system) คือ การประยุกต์ใช้ความรู้ให้เกิดประโยชน์

ด้วยสภาพการณ์ข้างต้นผู้เขียนจึงสนใจที่จะสร้างและนำเสนอแนวคิดใหม่ด้วยภาพความเข้าใจที่จะเชื่อมโยงเนื้อหาของรายวิชาต่างๆ ในกลศาสตร์วิศวกรรมเข้าด้วยกันผู้เขียนคาดหวังว่าแนวคิดนี้จะสร้างเสริมให้ผู้เรียนเห็นความสำคัญของศาสตร์และเกิดการเรียนรู้อย่างแท้จริง และกำหนดคำถามนำทาง 3 ข้อดังนี้ คือ

- หลักการใดบ้างในศาสตร์นี้ที่จะเป็น ‘หลักการสำคัญ’ (major principles)?
- แผนที่ศาสตร์ (discipline map) ควรมีลักษณะอย่างไร

ที่สามารถเชื่อมโยงรายวิชาและหลักการต่างๆ เข้าด้วยกันเพื่อให้เห็นภาพรวมได้อย่างชัดเจน? และ

• กระบวนการการแก้ปัญหา (process of solving problem) ที่จะช่วยให้ผู้เรียนสามารถแก้ปัญหาได้อย่างมืออาชีพควรเป็นอย่างไร?

2. ภาพความเข้าใจ

2.1 หลักการสำคัญ

กลศาสตร์วิศวกรรมด้านกลศาสตร์ของแข็งมีหลักการสำคัญอยู่หลายประการเช่น การสมดุล (equilibrium) แผนภาพวัตถุอิสระ (free body diagram) ภาระสมมูลฯ หลักการสำคัญเหล่านี้ถูกแสดงไว้ในตำราเรียนต่างๆ โดยเฉพาะตำราภาษาอังกฤษ [9-13] และแสดงไว้อย่างชัดเจนในรายวิชากลศาสตร์ของวัสดุด้วยรูปแบบการสอนออนไลน์ [27, 28]

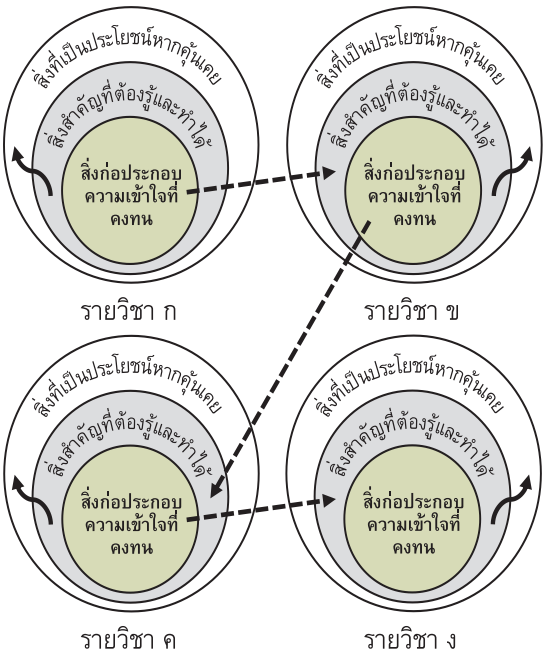
อย่างไรก็ตามจากประสบการณ์ตรงของผู้เขียนที่ได้ร่วมสอนวิชาการออกแบบชิ้นส่วนทางกลมาหลายภาคการศึกษาและรายละเอียดในตำราด้านการออกแบบทางกลที่นิยมใช้เป็นตำราเรียน [29-32] แสดงให้เห็นว่ายังมีอีกหลายหลักการสำคัญที่ผู้เรียนจำเป็นต้องเรียนรู้และมีการกล่าวถึงในรายวิชากลศาสตร์ของวัสดุ [9-13, 33, 34] แต่ก็ยังเป็นไปเพื่อให้เข้าใจเพียงแค่ในรายวิชาเท่านั้น

McTighe และ Wiggins [35] ได้นำเสนอแนวทางการออกแบบการเรียนรู้ที่เรียกว่า การออกแบบแบบย้อนกลับ (รูปที่ 4) หลักการนี้แบ่งกลุ่มเนื้อหาและกระบวนการออกเป็นสามกลุ่มเพื่อเป้าหมายแห่งการออกแบบ คือ

1) สิ่งที่ก่อประกอบความเข้าใจที่คงทน (enduring understandings) ซึ่งหมายถึง ‘สาระที่เป็นแนวคิด หลักการสำคัญและกระบวนการหลักซึ่งเป็นศูนย์กลางของเนื้อหาสาระของวิชาและ ศาสตร์ที่จะทำให้เกิดคุณค่าและความหมายที่ข้ามพ้นไปจากชั้นเรียนหรือขอบเขตระหว่างรายวิชาและเชื่อมโยงเข้ากับสภาพชีวิตจริง’ (real world situations)

2) สิ่งสำคัญที่ต้องรู้และทำได้ (important to know and do) ซึ่งหมายถึง ‘เนื้อหาสาระที่ผู้เรียนต้องรู้และปฏิบัติได้ในระหว่างเรียนในชั้นเรียนภายใต้ขอบเขตของรายวิชานั้น’ และ

3) สิ่งที่เป็นประโยชน์หากคุ้นเคย (worth being familiar with) ซึ่งหมายถึง ‘เนื้อหาสาระที่เอื้อต่อการเรียนรู้ในศาสตร์เดียวกันในระดับที่สูงขึ้นหรือในศาสตร์อื่นๆ ที่สัมพันธ์กัน’



รูปที่ 4 ความสัมพันธ์ระหว่างเนื้อหาและกระบวนการต่างๆ ทั้งสามกลุ่มในระดับรายวิชา และการเชื่อมโยงระหว่างรายวิชาต่างๆ ในศาสตร์เดียวกัน [35] (ลูกศรประคือลำดับของรายวิชาก่อนหลังและการมอบสิ่งสำคัญที่รายวิชาถัดไปจะต้องทวนสอบว่ายังคงอยู่ และลูกศรทึบคือลำดับของเนื้อหาในรายวิชานั้นๆ)

ความเชื่อมโยงกันของแต่ละรายวิชา (prerequisite) แสดงให้เห็นว่ารายวิชาเหล่านั้นอยู่ในศาสตร์เดียวกัน ดังนั้นหากพิจารณาในมุมของศาสตร์แล้วก็จะต้องมีหลักการสำคัญหลอมรวมอยู่ด้วยกันอย่างต่อเนื่อง (continuum of important ideas) อย่างไรก็ตามเพื่อประโยชน์ด้านการเรียนการสอนเราจึงได้แบ่งสาระศาสตร์เหล่านั้นออกเป็นรายวิชาหรือขอบเขตหนึ่งๆ ที่เหมาะสมทั้งในเชิงปริมาณและเวลา

วงกลมต่างๆ ในรายวิชาหนึ่งๆ ในรูปที่ 4 แสดงเนื้อหาและกระบวนการที่สัมพันธ์เชื่อมโยงกัน วงกลมในที่แสดงสิ่งก่อประกอบความเข้าใจที่คงทนหรือหลักการสำคัญทั่วทั้งศาสตร์ชุดหนึ่ง (a set of transferable ideas) ที่ใช้เป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอนสิ่งสำคัญที่ต้องรู้และทำได้ (วงกลมกลาง) เพื่อให้เกิดผลสัมฤทธิ์ทางวิชาการภายในระยะเวลาที่กำหนดซึ่งต้องอาศัยการวางแผนและการดำเนินงานที่รัดกุม

และสิ่งที่เป็นประโยชน์หากคุ้นเคย (วงกลมนอก) ตามความเหมาะสม

รายวิชาถัดไปก็จะต้องรับมอบหลักการสำคัญทั่วทั้งศาสตร์ชุดหนึ่งจากรายวิชาก่อนหน้า (ลูกศรเส้นประที่เชื่อมโยงกัน) มารวมอยู่ในสิ่งสำคัญที่ต้องรู้และทำได้ (วงกลมกลาง) เพื่อใช้เป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอนสิ่งสำคัญที่ต้องรู้และทำได้นั้นร่วมกับหลักการสำคัญทั่วทั้งศาสตร์อีกชุดหนึ่ง

ด้วยแนวทางการออกแบบแบบย้อนกลับดังกล่าว ผู้เขียนเชื่อว่าผู้สอนไม่เพียงแค่ต้องสร้างความเข้าใจในหลักการสำคัญให้กับผู้เรียนในระดับรายวิชาเท่านั้น แต่ยังต้องสร้างความเข้าใจระหว่างรายวิชาต่างๆ ในศาสตร์เดียวกันดังรูปที่ 4 อีกด้วย กล่าวคือ การสร้างสภาพไร้รอยต่อ (seamless) ดังนั้นผู้สอนจะต้องร่วมมือกันเป็นทีมร่วมสอน (team teaching) ตั้งแต่การวางแผน การจัดการเรียนการสอนที่จะทำให้มั่นใจได้ว่าผู้เรียนเข้าใจอย่างแท้จริงทั้งในระดับรายวิชาและศาสตร์ และสามารถประยุกต์ใช้ได้ในชีวิตจริง รวมทั้งการประเมินและประเมินผลทีมร่วมสอนสามารถนำเสนอหลักการสำคัญทั่วทั้งศาสตร์ให้กับผู้เรียนได้ในสองแนวทางคือ การนำเสนอเป็นชุดภายใต้รายวิชาหนึ่งๆ หรือการนำเสนอเป็นภาพรวมในช่วงเริ่มต้นของทุกรายวิชาในศาสตร์ ผู้เขียนเลือกแนวทางหลังเนื่องจากต้องการให้ผู้เรียนได้เห็นภาพรวมซึ่งเปรียบได้กับการให้ผู้เรียนได้เห็นแผนที่การเดินทางและเชื่อว่าจะช่วยสร้างแรงจูงใจในการเรียนรู้ให้กับผู้เรียนได้

2.2 แผนที่ศาสตร์

ผู้เขียนเชื่อว่าการสอนในรายวิชาใดๆ ก็ตามควรเริ่มต้นด้วยการทำให้ผู้เรียนเห็นหรือตระหนักถึงความสำคัญของรายวิชานั้นๆ ในภาพรวมเมื่อเทียบกับรายวิชาอื่นๆ ในศาสตร์เดียวกัน กล่าวคือ การเริ่มต้นด้วยการตอบคำถามของผู้เรียนที่ว่า “เหตุใดฉันจึงต้องเรียนรายวิชานี้?” ในการตอบคำถามนี้หากมุ่งเน้นเพียงแค่ระดับรายวิชา เราก็จะไม่สามารถทำให้ผู้เรียนเห็นความสำคัญได้อย่างชัดเจนมากนัก ด้วยเหตุนี้คำตอบของคำถามข้อนี้จึงควรเน้นไปที่ระดับที่สูงกว่ารายวิชา ซึ่งก็คือระดับศาสตร์ที่สามารถเป็นแหล่งเชื่อมโยงหลักการสำคัญต่างๆ เข้าด้วยกัน (หัวข้อที่ 2.1)

รูปที่ 1 แสดงผังความคิด (mind map) ของกลศาสตร์วิศวกรรมที่ประกอบด้วยรายวิชาต่างๆ อย่างไรก็ตามรูปนี้สร้างความเข้าใจในเชิงโครงสร้างให้กับผู้เรียนได้ในระดับหนึ่งเท่านั้น แต่ยังไม่หนักแน่นเพียงพอในการตอบคำถามข้างต้น ด้วยเหตุนี้ผู้เขียนจึงคิดว่าต้องมีสิ่งที่แสดงสาระในภาพรวมของศาสตร์ซึ่งเรียกว่า แผนที่ศาสตร์ (discipline map) ที่จะช่วยให้ผู้เรียนเห็นจุดมุ่งหมายในภาพรวมและตระหนักรู้ว่าในแต่ละขั้น (แต่ละวิชา) นั้นจะสร้างเสริมสร้างความรู้และทักษะใดให้กับตนบ้าง

เป้าหมายของการเรียนสาขากลศาสตร์ของแข็ง (รูปที่ 2 และ 3) ก็เพื่อการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกล (design of machine components) เช่น ชิ้นส่วนในโครงสร้างกลไก อาทิ เพลาในรถยนต์และสลักเกลียวสำหรับการยึดชิ้นส่วน [36] และอุปกรณ์หรือเครื่องมือที่เราสามารถพบเห็นได้ในชีวิตประจำวันฯ (รูปที่ 5) เนื้อหาในรายวิชาการออกแบบดังกล่าวนี้เป็นเนื้อหาเชิงประยุกต์และผู้เรียนเฉพาะสาขาหรือหลักสูตรเท่านั้นที่จะได้เรียน ด้วยเหตุนี้รายวิชานี้จึงไม่ได้ปรากฏอยู่ในรูปที่ 1 อย่างไรก็ตามการไม่มีรายวิชาการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกลอยู่ในรูปเป็นประเด็นที่ต่างกันกับการกำหนดเป้าหมายการเรียนรู้ซึ่งเป็นเรื่องที่สำคัญอย่างยิ่งในการจัดการศึกษาแบบเน้นผลลัพธ์การเรียนรู้ (Outcomes-Based Education – OBE) [37] ดังนั้นความแตกต่างจึงอยู่ที่ว่าเราจะพิจารณาในระดับหลักสูตรหรือระดับศาสตร์เท่านั้น

รูปที่ 5 คานรองกระจกหรือฐานรองประตูรั้วบ้านซึ่งเป็นชิ้นส่วนหรือโครงสร้างที่อยู่รอบๆ ตัวเราที่ต้องได้รับการออกแบบโดยอาศัยองค์ความรู้และความเข้าใจในเนื้อหาสาระดังแสดงในรูปที่ 1 ถึง 3

2.3 กลยุทธ์การแก้ปัญหา

ความสามารถในการแก้ปัญหาถือเป็นทักษะสำคัญในศตวรรษที่ 21 [22] ที่ผู้เรียนต้องได้รับการบ่มเพาะและฝึกฝน เป้าหมายของการฝึกฝนในเรื่องนี้ก็เพื่อเสริมสร้างให้ผู้เรียนเข้าใจแนวทางการแก้ปัญหาทางฟิสิกส์และวิศวกรรมอย่างเป็นระบบ ด้วยการเชื่อมโยงแนวคิดหรือหลักการสำคัญต่างๆ กับสภาพในชีวิตจริง และเพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกฝนทักษะการแก้ปัญหา (solving problem) อย่างมืออาชีพ

สิ่งที่ผู้สอนหรือทีมผู้สอนในศาสตร์ต้องจัดการเรียนการสอนและทำให้มั่นใจก็คือว่า นอกเหนือจากความสามารถในการคำนวณแล้ว ผู้เรียนยังต้องมีการคิดที่เป็นระบบที่จะเข้าใจสภาพการณ์ของปัญหาและระบุได้ว่าอะไรคือปัญหา เชื่อมโยงแนวคิดและหลักการต่างๆ กับปัญหาเพื่อการวิเคราะห์ แปลความคำตอบ และคาดการณ์ถึงผลลัพธ์ที่อาจจะเกิดขึ้นตามมาได้เมื่อเงื่อนไขบางประการในปัญหาเปลี่ยนแปลงไป ความสามารถโดยรวมเหล่านี้แสดงให้เห็นถึงการมีกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาซึ่งหมายความว่า ไม่ว่าผู้เรียนจะพบกับปัญหาทางวิศวกรรมในลักษณะใดๆ ก็ตาม ก็จะสามารถแก้ปัญหานั้นให้ลุล่วงได้โดยอาศัยกลยุทธ์ดังกล่าว การทำเช่นนี้จะป้องกันแนวปฏิบัติที่ผิด คือ สภาพการวิเคราะห์คำตอบ (answer analysis) ที่ผู้เรียนมักจะเริ่มต้นการแก้ปัญหาจากคำตอบที่ทราบแล้วและย้อนกลับไปค้นหาวิธีการที่เหมาะสม

การปฏิบัติเช่นนี้จะช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจอย่างลึกซึ้งและสามารถประยุกต์องค์ความรู้ได้จริงในสถานการณ์ที่หลากหลาย ซึ่งสอดคล้องกับอนุกรมวิธานการเรียนรู้ที่กล่าวแล้วข้างต้น [23-26]

3. ข้อเสนอภาพความเข้าใจ

ด้วยแนวคิดข้างต้น ผู้เขียนจึงนำเสนอภาพความเข้าใจ (comprehensive picture) ซึ่งประกอบด้วยหลักการสำคัญ แผนที่ศาสตร์ และกลยุทธ์การแก้ปัญหาเป็นลำดับดังนี้

3.1 หลักการสำคัญ

จากการสืบค้นหลักการสำคัญของกลศาสตร์วิศวกรรมด้านกลศาสตร์ของแข็งในหนังสือและตำราต่างๆ และจากประสบการณ์ตรงของผู้เขียนโดยอาศัยแนวทางเบื้องต้นในการกำหนดหลักการ คือ หลักการนั้นถูกกล่าวซ้ำหลายครั้งในหนังสือเล่มใดเล่มหนึ่งหรือในหนึ่งรายวิชา หลักการนั้นถูกกล่าวซ้ำในหนังสือหลายเล่ม และหลักการนั้นถูกนำไปประยุกต์ใช้ในหลากหลายวิชาที่เกี่ยวข้องข้องกันในศาสตร์ ซึ่งผู้เขียนได้พบว่าหลักการสำคัญที่ผู้เรียนต้องได้เรียนรู้เชิงลึกและเกิดความเข้าใจ

ตารางที่ 1 หลักการสำคัญที่แสดงในหนังสือสถิตศาสตร์และกลศาสตร์ของวัสดุ

หลักการ	รายละเอียด	เอกสารอ้างอิงและรายละเอียด	
		สถิตศาสตร์	กลศาสตร์ของวัสดุ
การสมดุล	วัตถุจะอยู่ในสภาพสมดุลได้ก็ต่อเมื่อผลรวมของภาระภายนอกคือแรงภายนอก และโมเมนต์ รอบแกนหรือจุดใด ๆ ที่กระทำกับวัตถุนั้นมีค่าเป็นศูนย์	[1] - [6] ทั้งหมดกล่าวถึงโดยละเอียด	[9] - [14] ทั้งหมดนำมาประยุกต์ใช้งาน และเอกสารลำดับ [12] กล่าวทบทวนสมการดุล
ระบบอ้างอิงและเครื่องหมาย	การกำหนดแกนอ้างอิงและเครื่องหมายที่เหมาะสมช่วยให้การแก้ปัญหาเป็นไปโดยสะดวก	[1] - [6] ทั้งหมดกล่าวถึงโดยละเอียด	[9] - [14] ทั้งหมดนำมาประยุกต์ใช้งาน
การจำลองชิ้นส่วนและภาระสมมูล	การจำลองแบบหรือการจำลองทางอุดมคติสำหรับชิ้นส่วนหรือภาระกระทำเพื่อช่วยให้การวิเคราะห์ปัญหาเป็นไปโดยง่าย	[1] - [6] ทั้งหมดกล่าวถึงโดยละเอียด	[9] - [14] ทั้งหมดนำมาประยุกต์ใช้งาน
แผนภาพวัตถุอิสระ	แผนภาพที่แสดงแรงและโมเมนต์ภายนอกที่กระทำต่อวัตถุ รวมทั้งแรงที่เกิดจากจุดรองรับเพื่อช่วยให้มองเห็นภาพรวมของภาระที่กระทำต่อวัตถุ และวิเคราะห์หาค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการออกแบบได้อย่างถูกต้อง	[1] - [6] ทั้งหมดกล่าวถึงโดยละเอียด	[9] - [14] ทั้งหมดกล่าวถึงโดยย่อและนำมาประยุกต์ใช้งาน
ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดซึ่งใช้ระบุสมบัติทางกลของวัสดุ	ไม่กล่าวถึง	[9] - [14] เอกสารลำดับ [9] - [11] อธิบายในหัวข้อย่อย และเอกสารลำดับ [12] - [14] แยกอธิบายเป็นบทอย่างชัดเจน
หลักการของเซนต์วีแนนท์	การกระจายตัวของความเค้น ณ จุดหรือบริเวณที่ภาระกระทำหรือจุดรองรองรับจะแตกต่างจากการกระจายตัว ณ จุดหรือบริเวณที่ห่างออกไปเป็นระยะหนึ่ง	ไม่กล่าวถึง	[9] - [14] • เอกสารลำดับ [10] กล่าวถึงหลักการนี้และแสดงอยู่ภายใต้หัวข้อความหนาแน่นของความเค้น • เอกสารลำดับ [14] กล่าวถึงการกระจายตัวของความเค้น แต่ไม่ได้กล่าวถึงชื่อหลักการ
ความหนาแน่นของความเค้น	ความเค้นจะมีค่าสูง ณ จุดหรือบริเวณที่ภาระกระทำหรือจุดรองรองรับ หรือบริเวณที่หน้าตัดของชิ้นส่วนมีการเปลี่ยนแปลงอย่างกะทันหัน (หลักการนี้เชื่อมโยงกับหลักการของเซนต์วีแนนท์)	ไม่กล่าวถึง	[9] - [13] • เอกสารลำดับ [11] และ [12] กล่าวถึงความหนาแน่นของความเค้นตามลักษะของปัญหา คือ ปัญหาแนวแกน ปัญหาการดัด และปัญหาการบิด • เอกสารลำดับ [14] อ้างถึงอิทธิพลของการเปลี่ยนแปลงหน้าตัดอย่างทันทีทันใดเท่านั้นโดยไม่ได้กล่าวรายละเอียด และใช้คำว่า ‘การรวมศูนย์ความเค้น’

ตารางที่ 1 หลักการสำคัญที่แสดงในหนังสือสถิตศาสตร์และกลศาสตร์ของวัสดุ (ต่อ)

หลักการ	รายละเอียด	เอกสารอ้างอิงและรายละเอียด	
		สถิตศาสตร์	กลศาสตร์ของวัสดุ
แผนภาพภาระภายใน*	แผนภาพแสดงภาระภายในตามมิติของชิ้นส่วนซึ่งประกอบด้วย แผนภาพแรงตั้งฉาก (normal force diagram) แผนภาพแรงเฉือน (shear force diagram) แผนภาพโมเมนต์ดัด (bending moment diagram) และ แผนภาพโมเมนต์บิด (torsional moment diagram)	[1] - [6] ทั้งหมดเน้นแผนภาพแรงเฉือน และแผนภาพโมเมนต์ดัด	[9] - [14] ทั้งหมดเน้นแผนภาพแรงเฉือน และแผนภาพโมเมนต์ดัด และเอกสารลำดับที่ [13] กล่าวเป็นหัวข้ออย่างชัดเจนสำหรับทุก ๆ แผนภาพ
เงื่อนไขความเข้ากันได้ทางรูปร่างหรือเงื่อนไขความสอดคล้อง	เงื่อนไขที่แสดงความสัมพันธ์หรือระบุว่าชิ้นส่วนหรือโครงสร้างจะเปลี่ยนรูปไปอย่างไรภายใต้กระทำของภาระภายนอกตามสภาพจริง โดยที่การเปลียนรูปนั้นจะต้องมีความต่อเนื่อง (continuity) (เงื่อนไขนี้ใช้เป็นแนวทางในการกำหนดสมการเพิ่มเติมในการแก้ปัญหาที่แก้ไม่ได้ด้วยสมการสมดุล)	ไม่กล่าวถึง	[9] - [14] ทั้งหมดนำมาประยุกต์ใช้งาน

* ในรายวิชาการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกล แผนภาพโมเมนต์ดัดและแผนภาพโมเมนต์บิดจะมีความสำคัญมากเนื่องด้วยความเค้นที่เป็นผลมาจากโมเมนต์ดัดและโมเมนต์บิดมักจะถูกใช้ในการออกแบบ และความเค้นที่เกิดจากแรงเฉือนโดยเฉพาะความเค้นเฉือนในคานหรือเพลามักจะมีค่าน้อยและไม่ถูกนำมาคิด ดังนั้นแผนภาพแรงเฉือนมักจะถูกใช้เป็นตัวช่วยในการระบุตำแหน่งที่มีค่าโมเมนต์ดัดสูงสุด ด้วยเหตุนี้หากให้ผู้เรียนได้มีโอกาสเรียนรู้แผนภาพทั้งหมดก็จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนรายวิชาการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกล

อย่างถ่องแท้ในรายวิชาสถิตศาสตร์ และกลศาสตร์ของวัสดุ แสดงดังตารางที่ 1

พิจารณาตารางที่ 1 แม้ว่าแผนภาพภาระภายในจะมีความสำคัญและต้องให้ผู้เรียนได้ฝึกฝน แผนภาพดังกล่าวก็เป็นเพียงการแสดงฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ออกมาเป็นภาพเท่านั้น และเงื่อนไขความเข้ากันได้ทางรูปร่างก็เป็นวิธีการหาสมการเพิ่มเติม (additional equation) เนื่องด้วยจำนวนสมการมีไม่เพียงพอต่อการหาพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าซึ่งเป็นหลักการทางคณิตศาสตร์มากกว่ากลศาสตร์ของแข็ง ด้วยเหตุนี้สองหลักการจึงไม่อยู่ในฐานะที่จะเป็นหลักการสำคัญได้ (ดูรูปที่ 4

รูปที่ 6 หลักการสำคัญที่ผู้เรียนต้องรู้และเข้าใจในกลศาสตร์ของแข็งที่เปรียบเสมือนเป็นเครื่องยังชีพในการเดินทางตามแผนที่ศาสตร์และเป็นเครื่องมือประกอบกลยุทธ์การแก้ปัญหา

ประกอบ) ดังนั้นหลักการสำคัญทางกลศาสต์ของแข็งจึงแสดงได้ดังรูปที่ 6

หลักการสำคัญที่กล่าวถึงในรูปที่ 6 เป็นสิ่งที่ก่อประกอบความเข้าใจที่คงทนและจะต้องฝังรากลึก (ingrain) อยู่ในเนื้อหาสาระของทั้งสามรายวิชาสถิตศาสตร์ กลศาสตร์ของวัสดุ และการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกลเพื่อนำไปใช้ในกระบวนการต่างๆ ได้แก่การได้มาซึ่งสูตร (derivation of formulas) การวิเคราะห์หรือสังเคราะห์ชิ้นส่วนหรือโครงสร้าง และการแก้ปัญหาที่ผู้เรียนจะต้องพบซึ่งทั้งสองอย่างหลังถือได้ว่าเป็นวิธีการประเมิน (assessment method) ที่สำคัญและจำเป็นของรายวิชาเหล่านี้ ด้วยเหตุนี้ ผู้สอนในศาสตร์นี้จะต้องร่วมมือกันและทำให้มั่นใจได้ว่า ผู้เรียนเข้าใจหลักการสำคัญเหล่านี้อย่างลึกซึ้งและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้จริงในสถานการณ์ที่หลากหลายทั้งที่ง่ายและซับซ้อนที่ข้ามพ้นขอบเขตของรายวิชาใดวิชาหนึ่ง จากรูปที่ 6 รายละเอียดเกี่ยวกับหลักการสำคัญในกลศาสตร์ของแข็งมีดังนี้

3.1.1 การสมดุล (equilibrium)

หลักการนี้แสดงถึงสภาพสมดุลของวัตถุทั้งที่เป็นสภาพหยุดนิ่ง (at rest) และที่เคลื่อนที่ (in motion) ด้วยความเร็วคงตัว หลักการนี้คือกฎการเคลื่อนที่ข้อที่หนึ่งของนิวตัน (Newton's first law of motion) ซึ่งกล่าวไว้ว่าวัตถุจะอยู่ในสภาพนั้นได้ก็ต่อเมื่อผลรวมของภาระภายนอกคือ แรงภายนอก (external force) และโมเมนต์ภายนอก (external moment) รอบแกนหรือจุดใดๆ ที่กระทำกับวัตถุนั้นมีค่าเป็นศูนย์ กฎข้อนี้แสดงเป็นสมการในรูปเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \text{และ} \quad \sum \mathbf{M}_O = 0 \qquad (1)$$

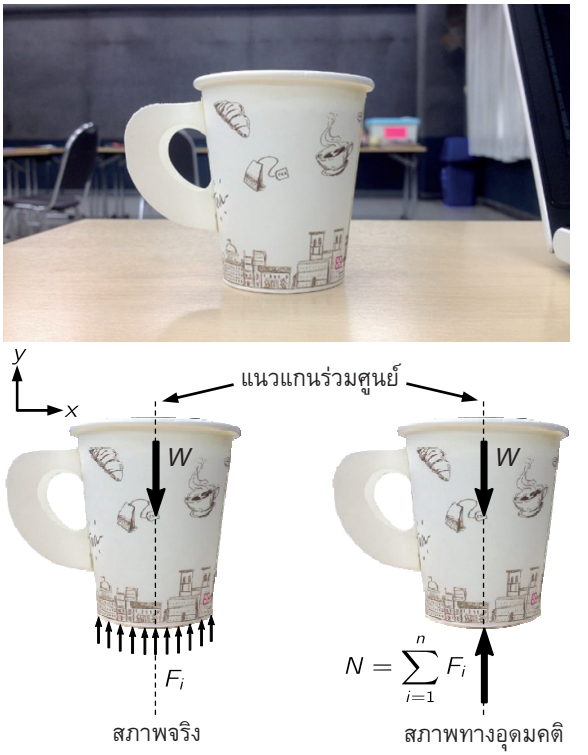
โดยที่ $\mathbf{F}$ และ $\mathbf{M}_O$ คือ เวกเตอร์แรงภายนอกและเวกเตอร์โมเมนต์ภายนอกที่หมุนรอบจุด O ใดๆ ตามลำดับ

สมการข้างต้นแสดงให้เห็นการสมดุลเชิงเส้นและสมดุลเชิงมุมตามลำดับกล่าวคือ หากสมดุลแรงและอยู่กับที่ก็หมายถึงความพยายามไม่ให้วัตถุเลื่อนขนานไปตามแนวแกน (axial translation) ใดๆ และสมดุลโมเมนต์และอยู่กับที่ก็หมายถึงความพยายามไม่ให้วัตถุหมุนรอบแกน (rotation about axis) ใดๆ นั่นเอง เราสามารถนำสมการ (1) ไปประยุกต์ใช้กับสภาพปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็งทั้งในแบบสองมิติและสามมิติ (bi-axial and tri-axial problems)

เราสามารถจัดหมวดหมู่ระบบแรง (force system) ที่กระทำกับชิ้นส่วนหรือโครงสร้างตามสมการสมดุลในรูปของสเกลาร์ได้ดังตารางที่ 2 และจะเห็นได้ว่าเนื่องด้วยมีสมการ

ตารางที่ 2 การจัดกลุ่มของระบบแรงและสมการสมดุลในรูปสเกลาร์ตามระบบอ้างอิงคาร์ทีเซียน

ระบบแรง	สมการสมดุล
ร่วมระนาบและร่วมศูนย์ (coplanar and concurrent)	$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$
ร่วมระนาบและไม่ร่วมศูนย์ (coplanar and non-concurrent)	$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M_z = 0$
ไม่ร่วมระนาบและร่วมศูนย์ (non-coplanar and concurrent)	$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum F_z = 0$
ไม่ร่วมระนาบและไม่ร่วมศูนย์ (non-coplanar and non-concurrent)	$\sum F_x = 0 \; \sum M_x = 0$ $\sum F_y = 0 \; \sum M_y = 0$ $\sum F_z = 0 \; \sum M_z = 0$



รูปที่ 7 แก้วบรรจุกาแฟที่ตั้งอยู่บนพื้นโต๊ะโดยมีแรงกระทำสองแรง คือ น้ำหนักของแก้วและกาแฟ (*W*) เนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกกับแรงที่พื้นโต๊ะกระทำต่อขอบแก้วด้านล่าง (*N*) แรงทั้งสองเป็นระบบแรงร่วมระนาบและไม่ร่วมศูนย์ (ล่างขวา) และเป็นไปตามสมการ (1)

สมดุลจำนวนสูงสุด 6 สมการในระบบแรงลำดับสุดท้าย ดังนั้นตัวแปรที่เราไม่ทราบค่าจะมีได้ไม่เกิน 6 ตัวแปร

เราสามารถพบเห็นสภาพการสมดุลของวัตถุหยุดนิ่งได้โดยง่ายในชีวิตประจำวัน อาทิ ถ้วยกาแฟบนพื้นโต๊ะ (รูปที่ 7) แก้วกาแฟจะอยู่ในสภาพสมดุลเนื่องด้วยผลรวมของแรงภายนอกและผลรวมของโมเมนต์ภายนอกที่กระทำมีค่าเป็นศูนย์ ความหมายในเชิงกายภาพก็คือว่า น้ำหนักของแก้วและกาแฟอันเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (force of gravity) จะกระทำต่อแก้วในทิศทางลงด้านล่างขณะที่พื้นโต๊ะก็ออกแรงกระทำต่อแก้วในทิศทางสวนขึ้นด้านบนโดยที่แรงทั้งสองนี้จะมีขนาดเท่ากันอยู่ในแนวเดียวกันและมีทิศทางตรงกันข้าม ดังนั้นขณะที่แก้ววางอยู่บนพื้นโต๊ะจะมีแรงกระทำต่อแก้วตลอดเวลาแต่ผลรวมของแรงทั้งหมดในแนวนั้นจะต้องมีค่าเป็นศูนย์คือ $N - W = 0$ หรือ $N = W$ ทั้งนี้หากแก้วไม่อยู่ในสภาพสมดุลแล้วแก้วก็จะต้องเลื่อนที่ทันทีกล่าวคือ อาจจะจมลงไปในพื้นโต๊ะ นอกจากนี้ หากพิจารณาขนาดของแรงก็จะเห็นได้ว่าสภาพสมดุลนี้เป็นไปตามกฎข้อที่สามของนิวตัน

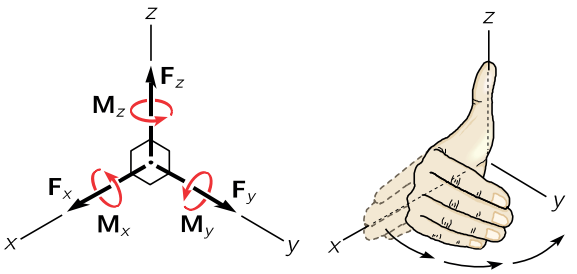
พิจารณารูปที่ 7 ประกอบตารางที่ 2 เราจะพบว่าในสภาพจริง แรงที่พื้นโต๊ะกระทำต่อแก้วนั้นจะกระทำที่ขอบก้นแก้ว จึงทำให้ระบบแรงเป็นระบบแรงร่วมระนาบและไม่ร่วมศูนย์ กล่าวคือ ต้องมีโมเมนต์กระทำต่อแก้วเนื่องจากแรง F_i อย่างไรก็ตามเนื่องจากความสมมาตรของรูปทรงแก้ว (ตัดส่วนกระดาษสำหรับถือแก้วออกไป) ผลรวมของโมเมนต์เหล่านั้น

จะมีค่าเป็นศูนย์และเราจึงสามารถกำหนดสภาพทางอุดมคติได้ดังรูปซึ่งทำให้ง่ายต่อการวิเคราะห์ปัญหา (ดูหัวข้อที่ 3.1.3)

โดยสรุปการสมดุลเป็นหลักการสำคัญที่เราสามารถพบเห็นได้ในชีวิตประจำวัน ในกรณีวัตถุหยุดนิ่งการสมดุลจะเกิดขึ้นเมื่อวัตถุไม่มีการเลื่อนขนาน (translational equilibrium) และการหมุนรอบแกน (rotational equilibrium)

3.1.2 ระบบอ้างอิงและเครื่องหมาย (coordinate system and sign convention)

การกำหนดแกนอ้างอิงในกลศาสตร์วิศวกรรมเป็นเรื่องสำคัญอย่างยิ่งเนื่องด้วยจะช่วยกำหนดทิศทางของภาระภายนอกเพื่อประโยชน์ในการวิเคราะห์ปัญหารูปที่ 8 แสดงแกนอ้างอิงคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate) ตามกฎมือขวา (right-handed rule) พร้อมด้วยการกำหนดทิศทางของแรงและโมเมนต์ที่เป็นบวก (positive sense) การกำหนดแกนอ้างอิงตามกฎมือขวาสามารถทำได้โดยอาศัยการกำมือดังรูป กล่าวคือ



รูปที่ 8 แกนอ้างอิงคาร์ทีเซียนตามกฎมือขวาพร้อมด้วยการกำหนดทิศทางของแรงและโมเมนต์ที่เป็นบวก (positive sense)

เมื่อกำหนดแกน *x* ได้แล้ว ให้แบฝ่ามือทาบทับกับแกน *x* จากนั้นก็กำมือเข้าหาแกน *y* หัวแม่มือชี้ไปทิศใดทิศนั้นก็จะเป็นแกน *z*

จากประสบการณ์การสอนของผู้เขียน สิ่งซึ่งผู้เรียนมักจะสับสนและส่งผลให้เกิดข้อผิดพลาดในการอธิบายหรือแปลความและการแก้ปัญหา ก็คือ ความหมายของสัญลักษณ์ที่เป็นตัวห้อย *xyz* ในรูปที่ 8 ตารางที่ 3 แสดงรายละเอียดเกี่ยวกับความหมายของสัญลักษณ์ดังกล่าว ทั้งนี้จากสมการ (1) ทิศทางของแรงและโมเมนต์ซึ่งเป็นปริมาณเวกเตอร์จึงเป็นเรื่องที่สำคัญอย่างยิ่งและต้องให้ความใส่ใจอย่างมาก

ตารางที่ 3 ความหมายของสัญลักษณ์ที่เป็นตัวห้อย

		ความหมายของตัวห้อย		
		ลักษณะ	ทิศทาง	เครื่องหมาย
ภาระ	แรง	ขนานแกน	ตามแกน	บวก
	โมเมนต์	หมุนรอบแกน	ตามแกน	บวก

ความแตกต่างสำคัญที่ผู้เรียนจะต้องจดจำและระลึกไว้ก็คือลักษณะการกระทำของแรงและโมเมนต์ กรณีแรงจะหมายถึงการกระทำขนานกับแกนอ้างอิง (parallel to axis) ขณะที่กรณีโมเมนต์จะหมายถึง การกระทำที่หมุนรอบแกนอ้างอิง (rotation about axis) ลักษณะการกระทำของแรงและโมเมนต์ดังกล่าวจะส่งผลต่อการวิเคราะห์ขนาดและทิศทางของพารามิเตอร์ออกแบบทั้งสามซึ่งในท้ายสุดก็จะส่งผลอีกทอดหนึ่งต่อวัตถุประสงค์ของการออกแบบทั้งการวิเคราะห์ความปลอดภัยของและการสังเคราะห์ขนาดหรือรูปร่างของชิ้นส่วนหรือโครงสร้าง (รูปที่ 2 และ 3) ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดเจนถึงความสำคัญของหลักการนี้ คือ ในการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกล ผู้ออกแบบจำเป็นต้องระบุหน้าตัดวิกฤต (critical cross secection) และจุดวิกฤติ (critical point) ซึ่งหมายถึง หน้าตัดที่ภาระภายในมีค่าสูงสุด และจุดที่เกิดความเค้นผสมสูงสุดบนหน้าตัดวิกฤตินั้น ตามลำดับ การระบุจุดที่มีความเค้นผสมมีค่าสูงสุด (combined stresses) ต้องอาศัยทิศทางของภาระภายในที่ถูกต้อง ด้วยเหตุนี้หากกำหนดทิศทางของภาระภายในไม่ถูกต้องก็จะส่งผลให้ทั้งค่าความเค้นผสมและจุดวิกฤติที่ได้ไม่ถูกต้องซึ่งในท้ายที่สุดก็จะทำให้การออกแบบผิดพลาดและเกิดความเสียหายตามมาได้ การวิเคราะห์ปัญหาใดๆ ในกลศาสตร์ของแข็งอาจใช้แกนอ้างอิงอื่นใดที่เหมาะสมนอกเหนือจากแกนอ้างอิงคาร์ทีเซียนก็ได้ทั้งนี้แนวทางดังที่กล่าวข้างต้นก็ยังคงเหมือนเดิม

การสร้างความเข้าใจที่ถ่องแท้ในเรื่องนี้ให้กับผู้เรียนจึงเป็นเรื่องที่สำคัญอย่างยิ่ง จากรูปที่ 2 และคำอธิบายข้างต้นแสดงให้เห็นว่าการให้เหตุผลผู้เรียนเพียงแค่ว่า ‘ต้องระบุทิศทางของภาระให้ถูกต้อง’ นั้นยังไม่เพียงพอ แต่หากอธิบายพร้อมเหตุผล

ที่เชื่อมโยงในระดับศาสตร์หรือข้ามรายวิชาจะทำให้ผู้เรียนเห็นความสำคัญและความจำเป็นได้อย่างชัดเจน

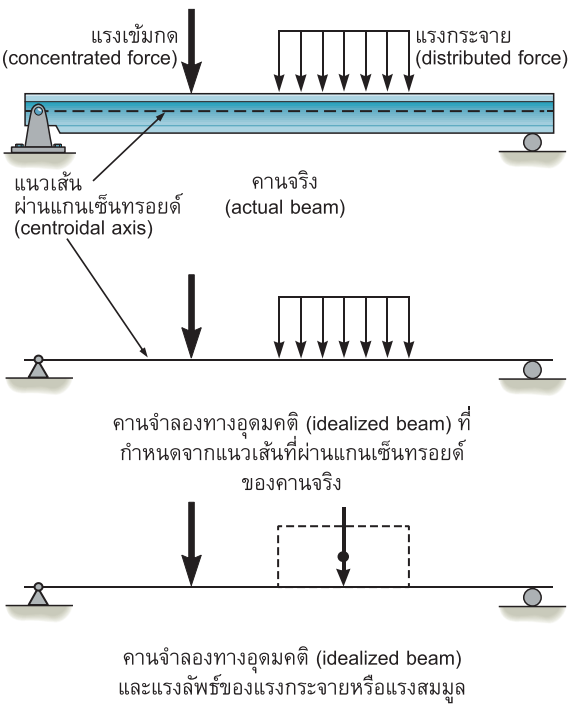
โดยสรุปการกำหนดแกนอ้างอิงตามกฎมือขวาและเครื่องหมายเป็นหลักสำคัญที่ผู้เรียนจะต้องตระหนักรู้ เข้าใจอย่างลึกซึ้ง และนำไปประยุกต์ใช้ให้ได้เพื่อให้เกิดความสอดคล้องในกระบวนการแก้ปัญหาและสามารถปรับเปลี่ยนสัญลักษณ์ในสูตรใดๆ ซึ่งพิสูจน์ได้มาแล้วภายใต้แกนอ้างอิงลักษณะหนึ่งให้เหมาะสมและสอดคล้องกับแกนอ้างอิงที่ตัวผู้เรียนอาจกำหนดขึ้นเอง

3.1.3 การจำลองชิ้นส่วนและภาระสมมูล (modelling of members and equivalent loads)

กลศาสตร์ของแข็งเป็นศาสตร์ที่มุ่งเน้นศึกษาการตอบสนองของวัสดุเมื่อมีแรงกระทำเพื่อการออกแบบทางกล เพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์ปัญหา จึงมีความจำเป็นต้องกำหนดให้วัตถุที่ทำจากวัสดุหนึ่ง ๆ มีลักษณะบางอย่าง และวิธีการให้ได้มาซึ่งลักษณะดังกล่าวเรียกว่า การจำลองทางอุดมคติ (idealization) เมื่อพิจารณาการศึกษาในสาขากลศาสตร์ของวัตถุแข็งเกร็ง ลักษณะสำคัญของการจำลองทางอุดมคติก็คือ การกำหนดให้วัตถุที่กำลังพิจารณาอยู่นั้นเป็นวัตถุที่มีรูปทรงและขนาดคงตัวภายใต้การกระทำของแรงภายนอกหากจะพิจารณาว่าวัตถุนั้นๆ ประกอบด้วยอนุภาค (particle) จำนวนมากวัตถุแข็งเกร็งก็หมายถึง วัตถุที่ระยะห่างระหว่างอนุภาคคู่หนึ่งๆ ที่ประกอบกันขึ้นเป็นวัตถุนั้นจะไม่เปลี่ยนแปลงไปทั้งก่อนและหลังแรงกระทำ

ในการวิเคราะห์โครงสร้างหรือชิ้นส่วนในโครงสร้างโดยเฉพาะในรายวิชาสถิตศาสตร์และพลศาสตร์ เราจะกำหนดให้วัตถุเป็นวัตถุแข็งเกร็งและมักจะแทนด้วยเส้นที่ลากผ่านแกนศูนย์กลางวัตถุหรือแกนเซ็นทรอยด์ (centroidal axes) (รูปที่ 9) สมมติฐานสำคัญที่ถูกกำหนดขึ้นเพื่อช่วยการวิเคราะห์ปัญหาให้เป็นไปโดยง่าย (simplified problem analysis) คือ 1) การไม่คิดน้ำหนักของคาน 2) แรงเข้มกดกระทำเป็นจุด (point load) และ 3) การแทนแรงกระจายด้วยแรงเข้มกด

กรณีที่ 1) เมื่อกำหนดให้คานเป็นวัตถุแข็งเกร็งและไม่คิดน้ำหนักของคาน เราจึงแทนคานได้ด้วยเส้นตรงที่ลากผ่านแกนเซ็นทรอยด์ อย่างไรก็ตาม หากคิดน้ำหนักของคานด้วยแล้ว



รูปที่ 9 คานจริงที่รับแรงเข้มกดและแรงกระจาย และคานจำลองทางอุดมคติที่สมมติให้คานเป็นเส้นตรงที่ลากผ่านแกนเซ็นทรอยด์

เราก็ยังคงแทนคานด้วยเส้นตรงได้แต่ขนาดของแรงปฏิกิริยาจะมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนกรณีที่ 2) ณ จุดสัมผัสที่แรงกระทำ แรงจะกระจายตัวบนหน้าตัดที่มีขนาดเล็กมากและส่งผลต่อความเข้มของแรงภายในที่เกิดขึ้นเฉพาะส่วนนั้น (localized intensity of force) อย่างไรก็ตามเนื่องด้วยเราสมมติให้คานเป็นวัตถุแข็งเกร็งจึงไม่ต้องนำผลกระทบนี้มาพิจารณา และแม้ว่ารายวิชากลศาสตร์ของวัสดุจะพิจารณาวัตถุให้เปลี่ยนรูปผลของกระจายตัวของแรงก็จะไม่ส่งผลต่อความเข้มของแรงภายในณ บริเวณที่ห่างออกไป [37-39] (ดูหัวข้อ 3.1.8) นอกจากนี้ในกรณีที่ 3) เมื่อแทนแรงกระจายด้วยแรงเข้มกดโดยที่ขนาดของแรงเข้มกดจะเท่ากับขนาดพื้นที่ของแรงกระจายนั้น ตำแหน่งและทิศทางของแรงเข้มกดจะต้องกระทำผ่านจุดเซ็นทรอยด์ของรูปร่างของแรงกระจาย (areal centroid) และด้วยเหตุนี้เนื้อหาสำคัญชุดหนึ่งที่ผู้เรียนจะต้องเรียนรู้ในรายวิชาสถิตศาสตร์ก็คือ เซ็นทรอยด์ และสมบัติของหน้าตัด (sectional properties) ซึ่งถือเป็นพารามิเตอร์สำคัญเช่นกันก่อนที่จะมาเรียนรู้ต่อใน

รายวิชากลศาสตร์ของวัสดุ [1-6]

อย่างไรก็ตามในรายวิชากลศาสตร์ของวัสดุสิ่งที่เราสนใจคือภาระภายในและการแทนแรงกระจายด้วยแรงเข้มกดนี้จะทำให้ได้ค่าภาระภายในที่ไม่เท่ากัน ดังนั้นเพื่อความถูกต้องในการวิเคราะห์ปัญหา หากเราต้องการหาแรงภายนอกหรือแรงปฏิกิริยาใดๆ ที่กระทำกับชิ้นส่วนหรือระบบทางกล เราสามารถแทนแรงกระจายด้วยแรงเข้มกดได้ แต่เมื่อต้องการหาภาระภายในซึ่งเป็นเรื่องที่สำคัญอย่างยิ่งในรายวิชากลศาสตร์ของวัสดุ เราควรใช้แรงหรือระบบแรงภายนอกเดิม

โดยสรุป เราสามารถจำลองชิ้นส่วนหรือโครงสร้างด้วยเส้นที่ลากผ่านแกนเซ็นทรอยด์รวมทั้งแทนแรงกระจายด้วยแรงเข้มหรือแรงเดี่ยวเมื่อพิจารณาให้วัตถุเป็นวัตถุแข็งเกร็ง อย่างไรก็ตามเมื่อพิจารณาวัตถุให้เป็นวัตถุที่เปลี่ยนรูปได้ ผลของการแทนแรงกระจายด้วยแรงเข้มจะเปลี่ยนไปซึ่งจะส่งผลต่อการวิเคราะห์ค่าพารามิเตอร์ที่เกี่ยวกับการออกแบบ

3.1.4 แผนภาพวัตถุอิสระ (free body diagram)

ในการวิเคราะห์ปัญหาด้านการออกแบบชิ้นส่วนทางกล การเขียนหรือวาดภาพลักษณะทางกายภาพของระบบหรือองค์ประกอบในระบบที่เกี่ยวข้องกับปริมาณทางฟิสิกส์ใดๆ ที่เราสนใจจะช่วยให้การวิเคราะห์เป็นไปโดยง่าย

จากหลักการสมดุลที่กล่าวแล้วในหัวข้อที่ 3.1.1 ผลรวมของแรงและโมเมนต์ที่กระทำต่อวัตถุหรือระบบของวัตถุนั้นจะต้องมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นหากเราแยกชิ้นส่วนหนึ่งๆ ออกจากระบบมาพิจารณา ชิ้นส่วนนั้นหรือส่วนใดส่วนหนึ่งของชิ้นส่วนนั้นก็จะต้องอยู่ในสภาพสมดุลด้วยเช่นกัน (รูปที่ 7 และ 10) การเขียนแผนภาพวัตถุอิสระ (free body diagram) ที่แสดงแรงและโมเมนต์ภายนอกที่กระทำต่อวัตถุ รวมทั้งแรงที่เกิดจากจุดรองรับด้วยนั้นเป็นเรื่องที่สำคัญมากเนื่องด้วยจะช่วยให้เรามองเห็นภาพรวมได้อย่างชัดเจนและจะนำไปสู่การวิเคราะห์หาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับการออกแบบได้อย่างถูกต้อง การเขียนแผนภาพวัตถุอิสระมีข้อดีหลายประการ เช่น [31]

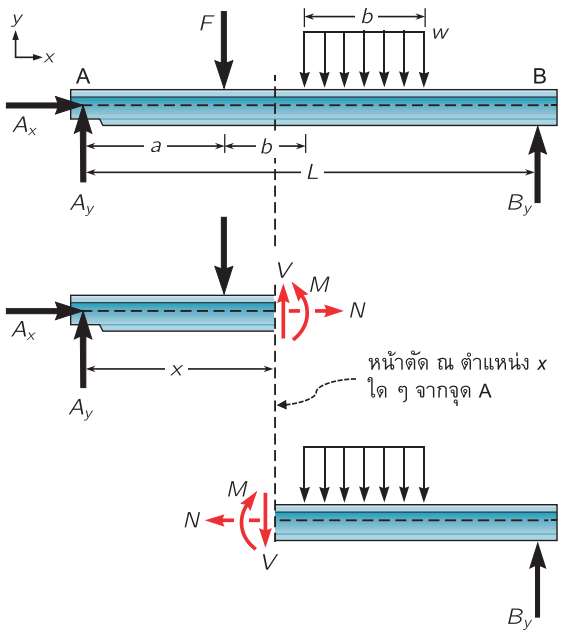
- ช่วยให้เข้าใจสภาพปัญหาได้ครบถ้วนทุกมิติเนื่องจากเป็นการแปลงข้อความออกมาเป็นภาพ (ดูหัวข้อที่ 3.3)
- ช่วยให้เห็นแนวทางในการกำหนดแกนอ้างอิง (ดูหัวข้อที่ 3.1.2) และทิศทางของแรงและโมเมนต์ทั้งที่ทราบค่าและไม่ทราบค่า
- ช่วยให้กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรกับพารามิเตอร์ที่สนใจในทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง และวางแผนการแก้ปัญหา
- ช่วยให้ทวนสอบการแก้ปัญหาหรือการคำนวณได้ตลอดเวลาโดยเฉพาะอย่างยิ่งการกำหนดทิศทางของลูกศร

การเขียนภาพวัตถุอิสระมีขั้นตอนดังนี้

1) เลือกวัตถุที่สนใจในโครงสร้างหรือระบบที่กำลังพิจารณาและวาดเส้นโครงร่างของวัตถุนั้นหรือวาดเส้นแทนโครงร่างวัตถุลากผ่านแกนเซ็นทรอยด์ (รูปที่ 7 และ 9)

2) กำหนดแกนอ้างอิงที่เหมาะสม

3) ระบุทั้งแรงและโมเมนต์ที่กระทำต่อวัตถุนั้นรวมภาระปฏิกิริยา ณ ตำแหน่งและทิศทางที่เป็นจริง ทั้งนี้หากไม่ทราบทิศทางของแรงหรือโมเมนต์ก็ให้สมมติไปตามทิศทางบวกของ



รูปที่ 10 แผนภาพวัตถุอิสระคานในรูปที่ 9 เนื่องด้วยจุดรอบรับด้านซ้ายเป็นแบบหมุด (pin) จึงมีสองแรงปฏิกิริยา ส่วนที่จุดรองรับด้านขวาเป็นจุดรองรับแบบลูกกลิ้งจึงมีแรงปฏิกิริยาเพียงแรงเดียวในแนวดิ่ง แผนภาพวัตถุอิสระทั้งสามจะอยู่ในภาวะสมดุล หากนำคานส่วนซ้ายและขวามาประกบกันภาระภายในที่เป็นแรงตั้งฉาก N แรงเฉือน V และโมเมนต์ดัด M จะหักล้างกันไป ทั้งนี้ระบบแรงในปัญหานี้จะเป็นแบบร่วมระนาบไม่ร่วมศูนย์

แกนอ้างอิง รวมทั้งกำหนดสัญลักษณ์แทนแรงและโมเมนต์นั้นๆ ตามความเหมาะสม

4) กำหนดมิติที่สอดคล้องกับวัตถุนั้น

การกำหนดภาระปฏิกิริยาตามขั้นตอนในข้อ 3) เป็นเรื่องที่ยากพอควร ดังนั้นหนังสือด้านสถิตศาสตร์มักจะกำหนดรูปแบบภาระปฏิกิริยาสำหรับชิ้นส่วนพื้นฐานมาให้แล้ว [1-6] ซึ่งมีทั้งจุดรองรับในสองและสามมิติ ความสำคัญของรูปแบบภาระปฏิกิริยาจะช่วยให้เราทราบได้ว่ามีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเป็นจำนวนเท่าใดและเพียงพอต่อการวิเคราะห์ปัญหาหรือไม่

โดยสรุป แผนภาพวัตถุอิสระเป็นพื้นฐานสำหรับทุกสาขาวิชาด้านวิศวกรรมที่เกี่ยวข้องกับศึกษาผลกระทบของภาระที่มีต่อวัตถุ การเขียนหรือสร้างแผนภาพวัตถุอิสระเป็นขั้นตอนสำคัญที่จะช่วยแปลงปัญหาทางกายที่เรากำลังพิจารณาให้อยู่ในรูปแบบที่สามารถวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง

3.1.5 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด (stress-strain relation)

รายวิชากลศาสตร์ของวัสดุและการออกแบบชิ้นส่วนทางกลมุ่งเน้นศึกษาพฤติกรรมของวัสดุที่ใช้ทำวัตถุหรือชิ้นส่วนว่าจะตอบสนองอย่างไรต่อการกระทำของภาระภายนอก ดังนั้นการค้นหาการตอบสนองของวัสดุจึงเป็นเรื่องที่สำคัญอย่างมาก Robert Hooke นักฟิสิกส์ชาวอังกฤษได้เริ่มต้นค้นหาตั้งแต่ปี พ.ศ. 2221 และเป็นที่มาของกฎของฮุค (Hooke's law)

พิจารณาแท่งวัตถุสามแท่งที่ทำจากวัสดุเดียวกันซึ่งมีลักษณะของความเป็นเนื้อเดียว (homogeneous) และมีสมบัติเท่ากันทุกทิศทาง (isotropic) (รูปที่ 11) หากใส่แรงดึง P กระทำต่อแท่งวัตถุทั้งสามที่มีพื้นที่หน้าตัดและความยาวที่แตกต่างกัน (geometry) ผลที่เกิดขึ้นก็คือแท่งวัตถุยืดตัวออกเป็นระยะที่แตกต่างกัน การทดลองนี้เปิดเผยให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแรงดึงกับการเปลี่ยนรูปหรือการยืดตัว (force-deformation relation) ของแท่งวัตถุทั้งสามซึ่งสร้างเป็นกราฟได้ดังรูปที่ 11 ข เมื่อพิจารณากราฟ เราจะพบว่าแรงดึงเป็นสัดส่วนกับการยืดตัวในช่วงหนึ่งและที่แรงดึงขนาดเท่ากันการยืดตัวของแท่งวัตถุดังกล่าวจะไม่เท่ากัน ซึ่งทำให้ได้เส้นความสัมพันธ์สามเส้น ลักษณะดังกล่าวทำให้เราไม่สามารถระบุได้อย่างชัดเจนว่าการตอบสนองของวัสดุต่อแรงดึง จะเป็นอย่างไรทั้งนี้หากเราทดสอบกับแท่งวัตถุที่มีลักษณะทางรูปทรงเรขาคณิตเหมือนกันแต่ทำจากวัสดุที่ต่างกัน กราฟที่ได้ก็จะมีลักษณะคล้ายกับรูปที่ 11 ข ซึ่งก็ทำให้ยังไม่สามารถระบุการตอบสนองของวัสดุได้ในทำนองเดียวกัน

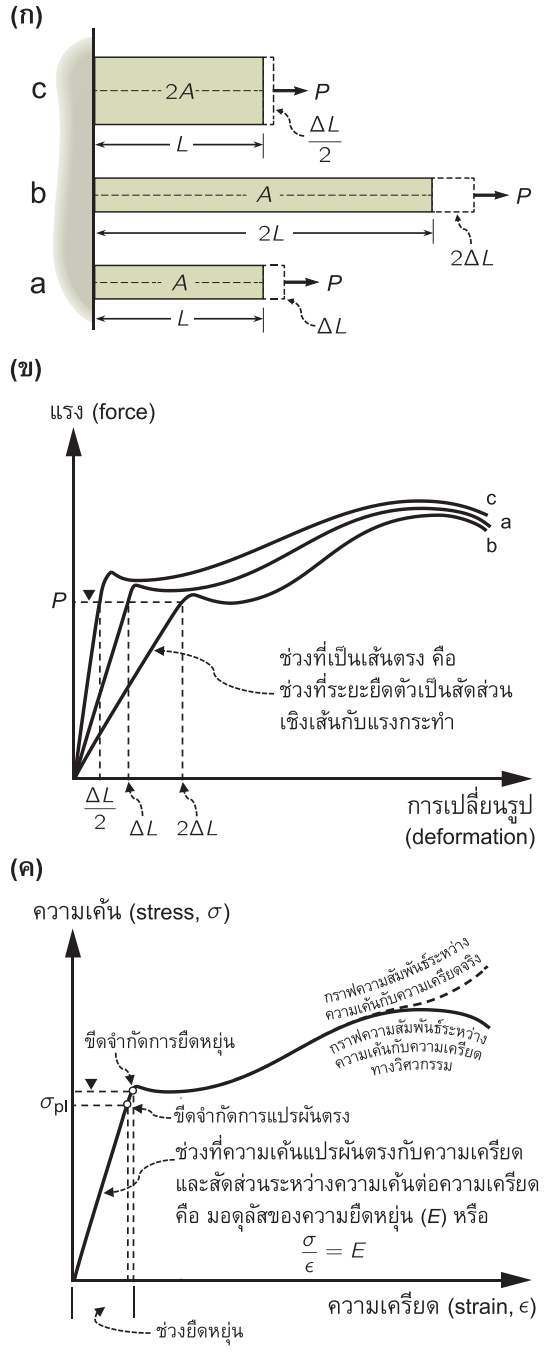
หากพิจารณาโดยละเอียดเพิ่มเติมเราจะพบว่า การตอบสนองของวัสดุนี้ต่อแรงดึง P จะขึ้นกับสมบัติและลักษณะทางรูปทรงเรขาคณิตของวัตถุเอง เมื่อเป็นดังนี้หากเราสามารถกำจัดพารามิเตอร์ที่แสดงถึงลักษณะรูปทรงทางเรขาคณิตของวัตถุออกไปได้แล้วเราก็จะได้สมบัติทางกลของวัสดุ

หากเรากำจัด (eliminate) พื้นที่หน้าตัดออกไปโดยกำหนดอัตราส่วนระหว่างแรงภายใน N (หาได้จากหลักการสมดุลในหัวข้อที่ 3.1.1 ซึ่งเท่ากับ P) ต่อพื้นที่หน้าตัด A โดยที่ $N \perp A$ และกำจัดความยาวเดิม L ออกไปโดยกำหนดอัตราส่วนระหว่างความยาวที่เปลี่ยนแปลงไป ΔL ต่อความยาวเดิม L ก็จะได้ว่า

$$\frac{\frac{N}{A}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{\frac{N}{A}}{\frac{2\Delta L}{2L}} = \frac{\frac{N}{2A}}{\frac{\Delta L}{2L}} = \text{constant} \qquad (2)$$

ทั้งนี้อัตราส่วนแรกเป็นกรณีที่ ① ② และ ③ ตามลำดับ (รูปที่ 11 ข) เมื่อนับจากซ้ายไปขวา

ด้วยผลลัพธ์ของอัตราส่วนเป็นค่าคงตัว สมการ (2) จึงแสดงให้เห็นว่าจะต้องมีกราฟเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่มีลักษณะเด่นเฉพาะตัวและแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วน N/A กับ $\Delta L/L$ สำหรับวัสดุใดๆ ที่เราสนใจหรือต้องการทดสอบ (รูปที่ 11 ค) เพื่อความสะดวกในการศึกษาเชิงลึกต่อไป หากกำหนดให้สัญลักษณ์กรีก σ และ ϵ แทนอัตราส่วน N/A และ $\Delta L/L$ ตามลำดับ โดยเรียกชื่ออัตราส่วนแรกว่า ความเค้น (stress) ซึ่งถูกนิยามว่าเป็นความเข้มของแรงภายใน (intensity of internal froce) บนพื้นที่หน้าตัดที่ตั้งฉากระหว่างกันและเรียกชื่ออัตราส่วนที่สองว่า ความเครียด (strain) ซึ่งถูกนิยามว่าเป็นความเข้มของการเปลี่ยนรูป (intensity of deformation) เราก็จะได้เส้นกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด (stress-strain relation) ทั้งนี้ในหนังสือบางเล่มใช้คำเรียก 'หน่วยแรงเค้น' แทนคำว่าความเค้นแต่ก็ยังไม่เป็นที่นิยมมากเท่าใดนัก เนื่องด้วยคำว่าความเค้นถูกใช้มาอย่างยาวนาน



รูปที่ 11 (ก) การทดสอบดึงวัตถุที่ทำจากวัสดุเดียวกันแต่มีขนาดหน้าตัด A และความยาว L ต่างกัน (ข) กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับการกระจัด และ (ค) กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดซึ่งสามารถใช้ระบุ ค่ายังมอดุลัส E ซึ่งแสดงระดับความสามารถในการต้านทานการเปลี่ยนรูปของวัสดุ σ_{pl} คือความเค้นที่ขีดจำกัดสัดส่วน

สมการ (2) เป็นจุดเริ่มต้นที่สำคัญยิ่งของการศึกษาเชิงลึกเกี่ยวกับมโนทัศน์ของความเค้นและความเครียด (concepts of stress and strain) ด้วยเหตุนี้เราจึงสามารถแยกการศึกษาความเค้นออกจากความเครียดได้แต่เมื่อเข้าสู่การออกแบบทางชิ้นส่วนทางกลและจำเป็นต้องใช้สมบัติทางกลของวัสดุนั้นๆ เราจำเป็นต้องใช้ทั้งสองมโนทัศน์ไปพร้อมๆ กัน ลักษณะเช่นนี้มีให้เห็นโดยทั่วไปในหนังสือกลศาสตร์ของวัสดุที่เรียงลำดับเนื้อหาเป็นความเค้น ความเครียด และสมบัติทางกลของวัสดุ นอกจากนี้เนื้อหาเกี่ยวกับความเค้นมักจะมาก่อนความเครียด เนื่องจากเรามักจะคุ้นเคยกับการวิเคราะห์แรงหรือระบบแรงมาแล้วในรายวิชาสถิตศาสตร์และที่สำคัญเราสมมติให้วัตถุที่พิจารณาเป็นวัตถุแข็งเกร็งซึ่งไม่สนใจเรื่องการเปลี่ยนรูป

สมบัติทางกลสำคัญของวัสดุที่ได้จากกราฟโดยเฉพาะในช่วงยืดหยุ่น (elastic range) คือ มอดุลัสของความยืดหยุ่น (modulus of elasticity) หรือยังมอดุลัส (Young's modulus) ที่แสดงถึงความสามารถในการต้านทานการเปลี่ยนรูป ด้วยเหตุนี้หนังสือด้านกลศาสตร์ของวัสดุทั้งหมดจึงมีเนื้อหาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ดังกล่าว ในทางปฏิบัติค่าของวัสดุจะได้มาจากการทดสอบโดยอาศัยเครื่องทดสอบดึงเอนกประสงค์ (universal tensile test) โดยใช้ชิ้นทดสอบที่ผ่านการเตรียมมาอย่างดีจากวัสดุและเป็นไปตามมาตรฐานที่กำหนด เช่น ASTM DIN JIS ฯ โดยเฉพาะขนาดพื้นที่หน้าตัดและความยาว

สภาพจริงของปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในการทดสอบวัสดุเปิดเผยให้เราเห็นว่า ด้วยคำนิยามของความเค้นและความเครียดที่กล่าวข้างต้นจะมีเส้นกราฟอีกเส้นหนึ่งที่ซ้อนทับกับเส้นกราฟทึบในรูปที่ 11 ค และจะค่อยๆ เริ่มแยกออกจากกันทีละน้อย ณ จุดต่ำสุดหลังจากผ่านขีดจำกัดการยืดหยุ่นไปแล้วและจะเห็นอย่างชัดเจน ณ จุดสูงสุดของกราฟเส้นทึบซึ่งเป็นจุดที่วัตถุเกิดคอคอด (necking) โดยเส้นกราฟประนี้จะปรากฏอยู่เหนือเส้นกราฟทึบขึ้นไป เส้นกราฟทั้งสองนี้ก็คือ กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดทางวิศวกรรม (engineering stress-strain relation) และกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดจริง (true stress-strain relation)

โดยปกติแล้วกราฟเส้นประจะค่อนข้างระบุได้ยากเพราะการระบุค่าพื้นที่หน้าตัดที่ลดลงในแต่ละช่วงเวลาจะกระทำได้ยาก อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติเรามักจะใช้เส้นกราฟทึบเป็นเส้นอ้างอิงเนื่องด้วยในทางวิศกรรมนั้นชิ้นส่วนหรือโครงสร้าง

มักจะได้รับการออกแบบให้อยู่ภายใต้ขีดจำกัดการยืดหยุ่น และเมื่อพิจารณารูปที่ 3 ตามวัตถุประสงค์ของการออกแบบด้วยการสังเคราะห์ที่ต้องเลือกหรือกำหนดทั้งรูปร่างและขนาดแล้ว การอ้างอิงกับพื้นที่หน้าตัดเดิมก่อนการนำชิ้นส่วนไปใช้งานเป็นเรื่องที่เหมาะสมกว่า

สมบัติทางกลอีกตัวหนึ่งที่สามารถหาได้จากการทดสอบดึงนี้ คือ ค่าอัตราส่วนปัวซอง (Poisson's ratio) หากพิจารณาช่วงยืดหยุ่น (รูปที่ 11 ค) พร้อมกับการสังเกตขณะดำเนินการทดสอบดึงเราจะพบว่ามีการเปลี่ยนแปลงความยาวในแนวขวาง (หดตัว) เกิดขึ้นพร้อมกันด้วย ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ความเครียดในแนวขวาง (transverse strain) จะแปรผันเป็นสัดส่วนกับความเครียดในแนวแกน (axial strain) Simeon D. Poisson นักคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ชาวฝรั่งเศสซึ่งมีชีวิตอยู่ในช่วง พ.ศ. 2324-2383 ได้ค้นพบปรากฏการณ์นี้และกำหนดให้สัดส่วนระหว่างความเครียดทั้งสองเป็นหนึ่งในค่าคงตัวยืดหยุ่น (elastic constant) ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\nu = -\frac{\epsilon_{\text{transverse}}}{\epsilon_{\text{axial}}} \qquad (3)$$

เครื่องหมายลบในสมการ (3) ทำให้ค่า ν เป็นบวก และค่า ν สำหรับโลหะทางวิศวกรรมทั่วไปจะมีค่าอยู่ในช่วง 0.25 ถึง 0.35

วัตถุเมื่ออยู่ภายใต้การกระทำของแรงภายนอกจะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในสองลักษณะคือ การยืดหรือหดตัวและการบิด กราฟในรูปที่ 11 แสดงแค่เพียงการทดสอบดึงซึ่งเป็นการยืดตัวของวัสดุเพียงเท่านั้น ยังมีการทดสอบบิด (torsional test) เพื่อหาค่ามอดุลัสของความยืดหยุ่นของการบิดหรือมอดุลัสเฉือน G (shear modulus) ในทางปฏิบัติการทดสอบบิดจะยุ่งยากมากกว่าการทดสอบดึง ดังนั้นการหาค่า G โดยทั่วไปจึงนิยมใช้วิธีการวิเคราะห์ดังสมการ

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (4)$$

พึงสังเกตว่าค่าคงตัวในสมการ (4) จะเป็นอิสระต่อกันสองค่าและเนื่องด้วยสมการ (4) นี้ตารางสมบัติทางกลของวัสดุต่างๆ ทั้งในหนังสือตำรากลศาสตร์ของวัสดุหรือการออกแบบชิ้นส่วนทางกลจะแสดงค่าเชิงตัวเลขของค่าคงตัว E และ ν

โดยสรุป ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดเป็นหลักการสำคัญที่บ่งชี้ถึงการได้มาซึ่งสมบัติทางกลของวัสดุ E, G, และ ν สมบัติทางกลเหล่านี้เป็นพารามิเตอร์สำคัญที่จะช่วยให้ผู้ออกแบบตัดสินใจได้เมื่อออกแบบเพื่อความต้านแรง ความแข็งแกร่งและเสถียรภาพ

3.1.6 หลักการของเซนต์วีแนนท์ (SaintVenant's principle)

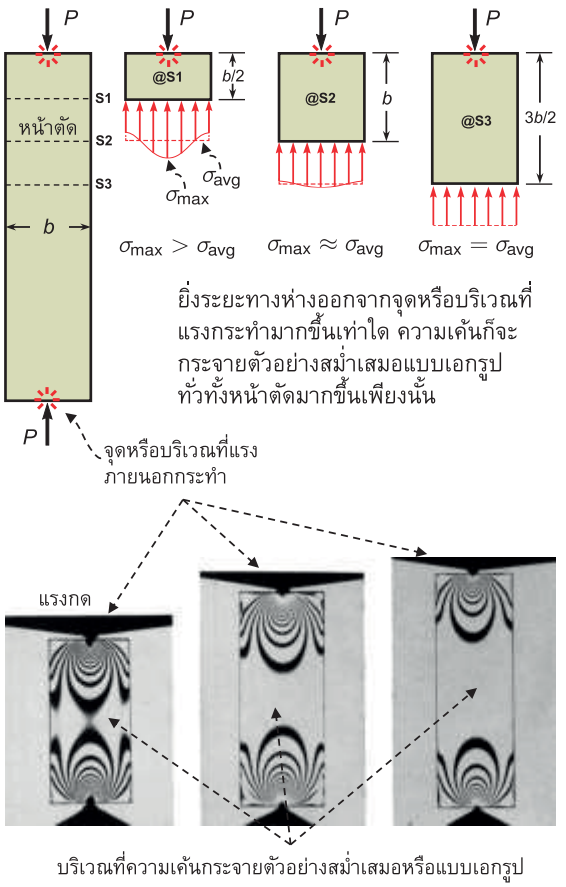
พารามิเตอร์สำคัญที่ใช้ในการออกแบบชิ้นส่วนทางกลเพื่อความต้านแรงคือ ความเค้น ซึ่งเป็นพารามิเตอร์สำคัญที่แสดงถึงความเข้มของภาระภายในบนหน้าตัดหนึ่งๆ ของวัตถุ

พิจารณาตัวอย่างสูตรความเค้นฉากเฉลี่ย σ_{avg} (average normal stress) เนื่องจากแรงภายในที่ตั้งฉากกับพื้นที่หน้าตัดที่กำลังพิจารณาและตั้งฉากกับแรง คือ

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{N}{A} \qquad (5)$$

จากประสบการณ์ของผู้เขียนที่ได้สอบถามหรือทวนสอบความเข้าใจของผู้เรียนพบว่า ผู้เรียนส่วนใหญ่เข้าใจว่าสามารถนำสมการ (5) ไปใช้ในการหาค่าความเค้นฉากเนื่องจากแรงภายในที่ตั้งฉากกับพื้นที่หน้าตัดได้กับทุกๆ ลักษณะรูปร่างของชิ้นส่วน (geometry) อย่างไรก็ตามจากหลักฐานที่ได้จากการทดลองด้านกลศาสตร์ (experimental mechanics) ด้วยวิธีการที่หลากหลายโดยเฉพาะวิธีโฟโตอิลาสติกซิตี [41-42] แสดงให้เห็นว่าไม่ได้เป็นเช่นนั้น

สภาพการณ์เช่นนี้อธิบายได้ด้วยหลักการของเซนต์วีแนนท์ ซึ่งกล่าวไว้ว่า การกระจายตัวของความเค้น ณ บริเวณหนึ่งที่มีระยะห่างเพียงพอจากจุดหรือบริเวณที่แรงหรือระบบแรงหนึ่งๆ กระทำ (points of applied loads) จะไม่ขึ้นกับลักษณะของระบบแรงหากแต่จะขึ้นกับผลลัพธ์ของระบบแรงเท่านั้น คำถามที่เกิดขึ้นก็คือว่า ระยะทางที่ยาวเพียงพอนั้นจะมีค่าเป็นเท่าใด? จากการทดลองพบว่า ระยะทางที่ยาวเพียงพอเทียบได้กับขนาดที่กว้างที่สุดของหน้าตัดนั้น [41-42] (รูปที่ 12)



รูปที่ 12 หลักการของเซนต์วีแนนท์: (ส่วนบน) ภาพจำลองการกระจายตัวของความเค้นในวัตถุเมื่อรับแรงกด และ (ส่วนล่าง) ภาพความเค้นที่เกิดขึ้นในวัตถุโปร่งใสด้วยวิธีโฟโต-อิลาสติกซิตี [42] ความเค้นจะกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอและมีค่าเท่ากับ σ_{avg} ณ บริเวณที่ห่างจากจุดแรงกระทำเป็นระยะทางเท่ากับหรือมากกว่าความกว้างของวัตถุ

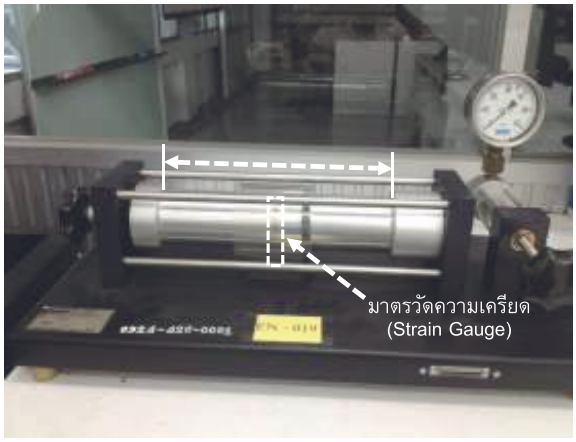
พิจารณารูปที่ 12 ส่วนบน เราจะพบว่าที่ระยะทางประมาณขนาดความกว้างของหน้าตัด b ค่าความเค้น σ_{max} ที่เกิดขึ้นจะใกล้เคียงกับ σ_{avg} และที่ระยะทางห่างออกไปมากกว่า b การกระจายตัวของความเค้น σ_{max} จะเหมือนกับการกระจายตัวของ σ_{avg} และคำตอบนี้ได้มาจากรายวิชาทฤษฎีสภาพยืดหยุ่น (รูปที่ 1) นอกจากนี้ รูปที่ 12 ส่วนล่างแสดงให้เห็นว่า ณ บริเวณใกล้กับจุดที่แรงภายนอกกระทำความเค้นจะมีค่าสูงมากกว่าความเค้นฉากเฉลี่ย หรือกล่าวได้ว่า สมการ (5) จะให้ค่าที่คลาดเคลื่อนไปจากความเป็นจริง ณ บริเวณที่แรงกระทำ เรื่องนี้เป็นเรื่องที่สำคัญอย่างยิ่งที่ผู้เรียนจะต้องระลึกไว้เสมอขณะประยุกต์ใช้สมการ (5) หรือสมการหาความเค้นอื่นใดในรายวิชากลศาสตร์ของวัสดุ (ดูแผนที่ศาสตร์ในหัวข้อที่ 3.2) หลักการของเซนต์วีแนนท์เป็นข้อความที่อธิบายสภาพการณ์ที่เกิดขึ้นจริงและจะไม่มีสูตรหรือสมการไว้ทำนายอย่างชัดเจน เนื่องจากระยะทางที่ยาวเพียงพอนั้นจะเปลี่ยนไปตามมิติของรูปร่างของวัตถุ

รูปที่ 13 แสดงชุดประลองการหาความเค้นในภาชนะทรงกระบอกผนังบางที่ใช้ในรายวิชาการประลองทางวิศวกรรม สิ่งที่น่าสนใจและเป็นคำถามก็คือ เหตุใดผู้ผลิตจึงต้องติดตั้งมาตรวัดความเครียด (strain gauge) ไว้บริเวณตรงกลางท่ออลูมินัม คำตอบของคำถามนี้ก็คือ การติดตั้งต้องเป็นไปตามหลักการเซนต์วีแนนท์กล่าวคือ ให้มีระยะห่างจากบริเวณหัวและท้ายที่เป็นเกลียวอย่างน้อย 1.5 เท่าของเส้นผ่านศูนย์กลางภาชนะทรงกระบอก

โดยสรุป หลักการเซนต์วีแนนท์บ่งชี้ว่า สูตรความเค้นมูลฐาน (fundamental formulas of stress) ที่เรียนในกลศาสตร์ของวัสดุจะใช้ได้ก็ต่อเมื่อจุดที่กำลังพิจารณาอยู่ห่างจากจุดที่แรงกระทำ ด้วยเหตุนี้ผู้สอนจึงต้องสร้างความเข้าใจเชิงลึกให้กับผู้เรียนว่าต้องใช้สูตรเหล่านี้ด้วยความระมัดระวังอย่างยิ่งและระลึกถึงสมมติฐานของการได้มาซึ่งสูตรไว้เสมอ

3.1.7 ความหนาแน่นของความเค้น (stress concentration)

หลักการของเซนต์วีแนนท์ในหัวข้อที่ผ่านบ่งชี้สภาพการณ์การกระจายตัวของความเค้น ณ บริเวณที่ใกล้เคียงกับจุดที่แรงกระทำซึ่งส่งผลให้ความเค้น ณ บริเวณนั้นมีค่าสูงมากกว่า σ_{avg} นอกเหนือจากบริเวณที่กล่าวถึงข้างต้นหากชิ้นส่วนเครื่องจักรกลใดมีหน้าตัดที่เปลี่ยนแปลงไปอย่างกะทันหัน (abrupt change of cross-sectional areas) แล้ว (รูปที่ 14) ความเค้น ณ บริเวณนั้นก็จะมีค่าเพิ่มขึ้นและมากกว่า σ_{avg}



รูปที่ 13 ชุดประลองการหาความเค้นในภาชนะทรงกระบอกผนังบาง: ตำแหน่งการติดตั้งมาตรวัดความเครียดจะเป็นไปตามหลักการของเซนต์วีแนนท์และจะห่างจากจุดปลายทั้งสองด้านในระยะทางที่เท่ากัน คือ อย่างน้อย 1.5 เท่าของเส้นผ่านศูนย์กลาง

เมื่อแรง P กระทำต่อวัตถุในรูปที่ 14 ข ที่มีการเปลี่ยนแปลงหน้าตัดอย่างกะทันหัน แรงซึ่งจำลองด้วยเส้นการไหล (force flow line) จะต้องเคลื่อนผ่านหน้าตัดที่มีขนาดลดลงนั้นเพื่อให้เกิดการสมดุลกับแรงอีกด้านหนึ่ง เนื่องจากเส้นการไหลของแรงต้องเคลื่อนผ่านพื้นที่แคบๆ จึงทำให้ต้องเบียดชิดเข้าหากันอย่างกะทันหัน สภาพการณ์ดังกล่าวเรียกว่า ‘ความหนาแน่นของความเค้น’ ลักษณะทางรูปร่างใดๆ ก็ตามของชิ้นส่วน เช่น การตกบ่า (fillet) การเจาะรู (hole) การเซาะร่องบาก (notch) หรือร่องลิ่ม (key) ฯ ที่จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างทันทีทันใดหรือเกิดความไม่ต่อเนื่องของหน้าตัดจะถูกเรียกว่า ‘ตัวกระตุ้นความเค้น’ (stress raiser) (รูปที่ 14 ข และ 14 ค) ทั้งนี้ในการออกแบบชิ้นส่วนการสร้างตัวกระตุ้นความเค้นเป็นสิ่งที่หลีกเลี่ยงไม่ได้เนื่องจากสภาพการใช้งานจริงของชิ้นส่วน

พิจารณารูปที่ 14 พร้อมด้วยหลักการสมดุลในหัวข้อ 3.1.1 จะเห็นว่า แรงภายใน N จะมีค่าเท่ากันในทุกๆ หน้าตัดและจะมีค่าเท่ากับแรงดึงภายนอก P ทั้งนี้ในอาณาบริเวณหน้าตัดดังกล่าวจะต้องไม่มีแรงภายนอกอื่นใดมากระทำ ดังนั้น $N = \sigma_{avg} A = \text{constant}$ หรือ

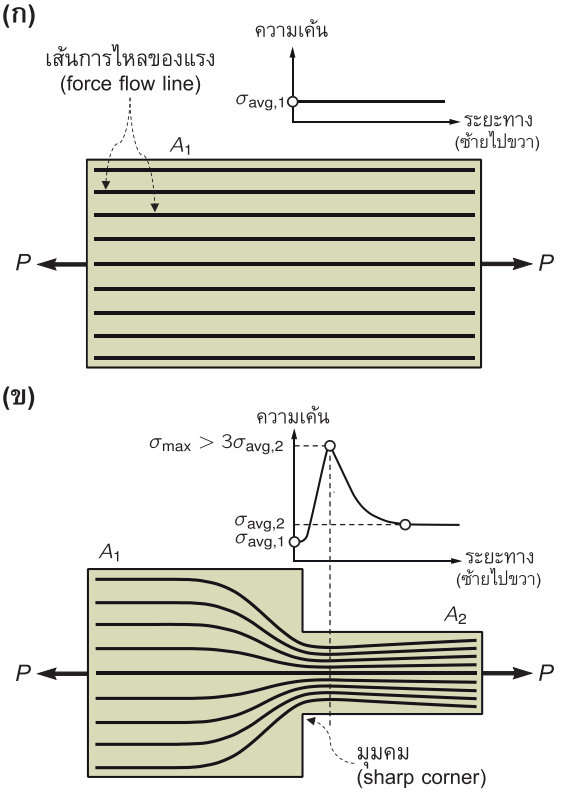
$$\sigma_{avg,1} A_1 = \sigma_{avg,2} A_2 \qquad (6)$$

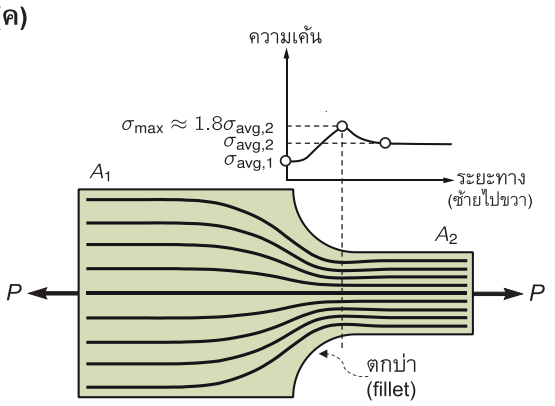
จากสมการ (6) เราจะพบว่า

$$\sigma_{avg,2} = \frac{A_1}{A_2} \sigma_{avg,1} \qquad (7)$$

สมการ (7) แสดงให้เห็นว่า ความเค้นที่เปลี่ยนแปลงไประหว่างหน้าตัดจะมีค่าขึ้นกับอัตราส่วนระหว่างพื้นที่หน้าตัดซึ่งเป็นฟังก์ชันของมิติของหน้าตัดเท่านั้น

อย่างไรก็ตาม สมการ (7) ยังไม่ถูกต้องมากนักในเชิงความหมายทางกายภาพเนื่องด้วยเพียงแค่แสดงให้เห็นว่าการเปลี่ยนแปลงของขนาดพื้นที่หน้าตัดจะส่งผลอย่างไรต่อค่าความเค้นจากหลักการของเซนต์วีแนนท์ σ_{avg} ในสมการ (5) หรือสมการ (7) เป็นค่าความเค้น ณ บริเวณที่อยู่ห่างจากจุดที่แรงภายนอกกระทำหรือจุดที่มีตัวกระตุ้นความเค้น ดังนั้นคำถามจึงมีอยู่ว่า ความเค้นจะมีค่าเท่าใด ณ จุดกระตุ้นความเค้น? (รูปที่ 14 ข และ 14 ค) จากสมการ (7) ได้ว่า





รูปที่ 14 เส้นการไหลของแรงในชิ้นส่วน: (ก) ที่ไม่มีการลดขนาดหน้าตัด (ข) ที่ลดขนาดหน้าตัดอย่างกะทันหัน และ (ค) ที่ลดขนาดหน้าตัดด้วยการตกบ่า เส้นการไหลของแรงในรูป (ค) จะเบียดชิดและชันน้อยกว่าเส้นการไหลของแรงในรูป (ข) การตกบ่าช่วยให้ความหนาแน่นของความเค้นลดลง ค่าตัวเลขใน σ_{max} ไม่ใช่ค่าจริงและใช้เพื่อแสดงให้เห็นผลของการตกบ่าเท่านั้น ค่าตัวเลขที่แท้จริงจะหาได้จากการเปิดตารางหรือกราฟโดยอาศัยความสัมพันธ์ทางขนาดหรือมิติของชิ้นส่วนและเงื่อนไขของภาระกระทำ

$$\sigma_{@raiser} = k\sigma_{avg} \qquad (8)$$

โดยที่ k คือ ค่าคงตัวเรียกว่าตัวประกอบความหนาแน่นของความเค้น (stress concentration factor) ค่า k เป็นฟังก์ชันของมิติหรือขนาดของหน้าตัดเท่านั้นและหาได้จากรายวิชาทฤษฎีสภาพยืดหยุ่น (รูปที่ 1) หรือรายวิชาการทดลองทางกลศาสตร์ของแข็ง (ไม่ได้แสดงในรูปที่ 1) ในทางปฏิบัติเราสามารถหาค่า k ได้จากสมการหรือกราฟ หนังสือตำรา หรือคู่มือการออกแบบหลากหลายเล่ม [9, 10, 43] เราอาจแสดงสมการ (8) ให้อยู่ในรูป $\sigma_{max} = k_t\sigma_{nom}$ โดยที่ σ_{nom} คือ ความเค้นระบุ (nominal stress) หรือความเค้น σ_{avg} และ k_t ก็คือ k ทั้งนี้ความเค้น $\sigma_{@raiser}$ เป็นพารามิเตอร์สำคัญในการออกแบบชิ้นส่วนทางกลโดยอาศัยทฤษฎีความเสียหาย (failure theories) ทั้งนี้เราไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงการกระจายตัวที่แท้จริงของความเค้น ณ บริเวณนั้น [12]

เนื่องจาก k เป็นค่าที่แสดงถึงปริมาณที่ความเค้นเพิ่มขึ้นและเป็นฟังก์ชันของมิติของหน้าตัดเท่านั้น ผู้ออกแบบสามารถลดความรุนแรง (mitigate) ความหนาแน่นของความเค้นได้โดยลดค่า k หรือการปรับเปลี่ยนขนาดของหน้าตัดไม่ให้เปลี่ยนแปลงแบบฉับพลันมากเกินไป (รูปที่ 14 ค) เนื่องจากตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 14 เป็นเพียงปัญหาแรงดึงในแนวแกนเท่านั้น ยังคงมีลักษณะการกระทำของภาระภายนอกอื่นๆ เช่น การดัด (bending) การบิด (torsion) ฯ ด้วยเหตุนี้การหาค่า k จึงต้องอาศัยสมการหรือกราฟที่หลากหลาย [28-31, 43-44]

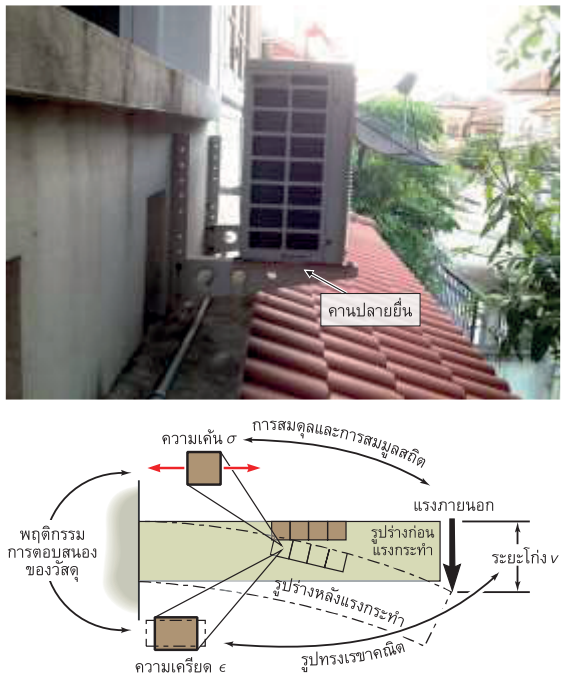
เส้นการไหลของแรงเป็นหลักการพื้นฐานที่สำคัญอย่างยิ่งในการกำหนดหรือระบุรูปร่างของชิ้นส่วนหรือโครงสร้าง (principles of form synthesis) [45] สองหลักการสำคัญที่สามารถใช้เส้นการไหลของแรงเป็นสิ่งอ้างอิงได้ คือ หากเป็นไปได้ให้เราออกแบบให้การกระจายตัวของความเค้นเป็นแบบเอกรูปทั่วทั้งหน้าตัดและชิ้นส่วน (uniform stress distribution) และหากเป็นไปได้ให้เราใส่หรือเพิ่มวัสดุตรงที่แรงจะต้องไหลผ่าน ทั้งสองหลักการพื้นฐานนี้ยืนยันได้โดยการตกบ่าซึ่งเป็นการเพิ่มเนื้อวัสดุดังรูปที่ 14 ค

โดยสรุปความหนาแน่นของความเค้นจะเกิดขึ้นเสมอในการออกแบบชิ้นส่วนทางกลที่มีการเปลี่ยนแปลงหน้าตัดอย่างทันทีทันใดซึ่งในทางปฏิบัติแล้วเป็นสิ่งที่ไม่อาจหลีกเลี่ยงได้ดังนั้นผู้เรียนจึงต้องระลึกไว้เสมอว่า ความเค้นที่จะนำไปออกแบบเพื่อความต้านแรงนั้นไม่ใช่ความเค้นที่ได้จากสมการความเค้นพื้นฐานหากแต่ต้องรวมอิทธิพลของการเปลี่ยนแปลงหน้าตัดเข้าไปด้วย

3.2 แผนที่ศาสตร์

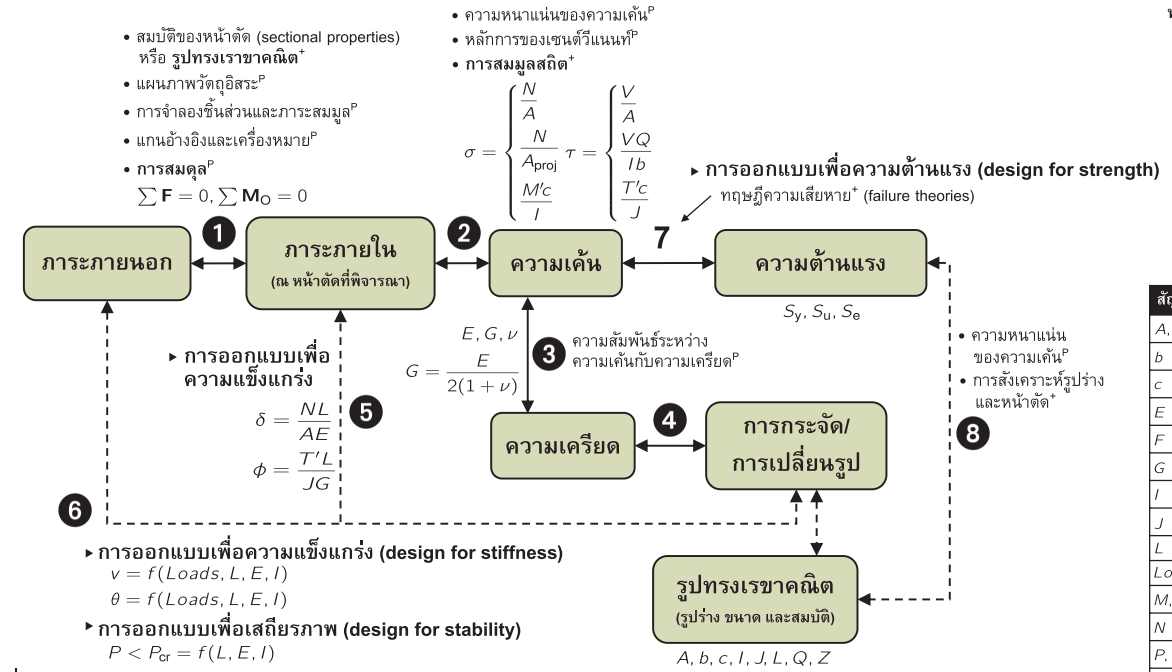
รูปที่ 15 แสดงปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นกับคานภายใต้แรงกดที่ตำแหน่งเกือบปลายทั้งนี้ในความเป็นจริงเราอาจจะไม่เห็นการโก่งตัวของคานด้วยตาเปล่าก็ได้ แต่การโก่งจะเกิดขึ้นจริงและปริมาณการโก่งจะขึ้นกับพารามิเตอร์ที่หลากหลายดังที่กล่าวแล้วในหลักการสำคัญ พึงสังเกตว่าคานจริงจะมีรูปร่างคล้ายลิ่มและหน้าตัดแปรเปลี่ยนตลอดความยาว (nonprismatic member) ซึ่งการวิเคราะห์หาค่าความเค้นหรือการโก่งจะมีความยุ่งยากซับซ้อนมากกว่าคานที่มีหน้าตัดเท่ากันตลอดความยาว นอกจากนี้ในคานจริงยังมีการเจาะรูเพื่อใช้เป็นที่ใส่ท่อสำหรับการไหลเวียนสารทำความเย็นในระบบ ลดน้ำหนักของคาน และช่วยให้วัสดุขยายตัวได้อย่างเสรี อย่างไรก็ตามผลที่เกิดขึ้นก็คือความหนาแน่นของความเค้น (หัวข้อที่ 3.1.7)

แผนที่ศาสตร์ช่วยอธิบายการเกิดขึ้นของปรากฏการณ์ดังกล่าวและช่วยให้ผู้เรียนได้เห็นความสัมพันธ์ที่ซ่อนอยู่เบื้องหลังปรากฏการณ์นี้พร้อมทั้งความจำเป็นโดยนัยว่าเหตุใดผู้เรียนจึงต้องเรียนรู้เนื้อหานั้นๆ ซึ่งจะนำไปสู่การบรรลุเป้าหมายการออกแบบทั้งสามเส้นทาง (รูปที่ 3)



รูปที่ 15 ส่วนบนเป็นภาพคานปลายยื่นรองรับเครื่องระบายความร้อนของระบบปรับอากาศภายในบ้านและส่วนล่างเป็นแบบจำลองของคานที่ถูกกระทำด้วยแรงเข้มกดที่ตำแหน่งเกือบปลายโดยการโก่งตัวถูกขยายให้ใหญ่ขึ้นเกินจริงเพื่อให้เห็นได้ชัดเจน ทั้งนี้แรงจากเครื่องระบายความร้อนจะเป็นแรงกระจาย แต่เราสามารถใช้แนวทางหลักการภาระสมมูล (หัวข้อที่ 3.1.3) กำหนดให้เป็นแรงเข้มกดได้ (รูปด้านล่างดัดแปลงจาก [46])

เมื่อมีแรงหรือภาระภายนอกกระทำต้องวัตถุหรือชิ้นส่วน หากไม่เกิดความเสียหายแล้ว ชิ้นส่วนนั้นจะต้องพยายามรักษาสภาพเดิมไว้ กล่าวคืออยู่ในภาวะสมดุล ดังนั้นจุดที่ ❶ จึงเป็นการสมดุลทั้งโครงสร้างและระหว่างภาระภายนอกกับภาระภายใน ณ จุดหรือตำแหน่งที่สนใจในชิ้นส่วน และสมการ (1) หรือสมการย่อยๆ ในตารางที่ 1 จึงมีบทบาทสำคัญ ด้วยเหตุนี้การสมดุล, ระบบอ้างอิงและเครื่องหมาย, การจำลองชิ้นส่วนและภาระสมมูล และแผนภาพวัตถุอิสระ (รูปที่ 6) จึงถือเป็นหัวใจสำคัญในรายวิชาสถิตศาสตร์ เมื่อทราบค่าภาระภายในต่างๆ ณ จุดที่สนใจแล้ว ความเค้นจะเป็นพารามิเตอร์ถัดไปที่ต้องถูกวิเคราะห์เนื่องจากเป็นพารามิเตอร์ออกแบบสำหรับการออกแบบเพื่อความต้านแรง ดังนั้นจุดที่ ❷ จึงแสดงการเชื่อมโยงระหว่างภาระภายในกับความเค้นและภาวะนี้เรียกว่าการสมมูลสถิต (static equivalency) ผลลัพธ์ที่ได้ก็คือ สูตรความเค้นพื้นฐานทั้ง σ และ τ จุดที่ ❸ เป็นการทดลองเพื่อหาสมบัติทางกลของวัสดุและผลลัพธ์ที่ได้คือความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดซึ่งได้อธิบายแล้วในหัวข้อที่ 3.1.5



หมายเหตุ :

- ความสัมพันธ์เชิงตรรกะเป็นแนวทางในการได้มาซึ่งสูตรหรือสมการความเค้นพื้นฐาน σ และ τ และการวิเคราะห์ปัญหา
- ตัวเลขในวงกลม**ไม่ได้**หมายถึงลำดับ แต่เป็นเพียงตำแหน่งที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างคู่ปริมาณทางฟิสิกส์เท่านั้น
- เส้นประ แสดงให้เห็นว่า ความสัมพันธ์ในคู่นั้น ๆ ไม่สามารถแสดงได้หากปราศจากความสัมพันธ์ที่แสดงด้วยเส้นทึบโดยเฉพาะหมายเลข 3 ทั้งนี้ยังมีสมบัติทางกลอื่น ๆ อีกที่จำเป็นต่อการออกแบบแต่ไม่ได้แสดงในที่นี้
- สัญลักษณ์ด้วยก P และ + หมายถึง หลักการสำคัญระดับศาสตร์ และหลักการสำคัญในรายวิชา ตามลำดับ
- การออกแบบทั้งสามเส้นทางอยู่ในรายวิชาการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกล ซึ่งเป็นการประยุกต์ใช้รายวิชาสถิตศาสตร์ และกลศาสตร์ของวัสดุ

สัญลักษณ์	ความหมาย
A, A_{proj}	พื้นที่หน้าตัดที่แรงกระทำ, พื้นที่ภาพฉาย
b	ระยะกว้างสุดของหน้าตัดที่ตั้งฉากกับแรงเฉือน
c	ระยะจากแกนสะเทินจนถึงผิวนอกสุดของวัตถุ
E	ยังมอดุลัส
F	แรงกระทำ
G	มอดุลัสการเฉือน
I	โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่รอบแกนที่ขนานกับพื้นที่หน้าตัด
J	โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่เชิงขั้วรอบแกนที่ตั้งฉากกับพื้นที่หน้าตัด
L	ความยาว
$Loads$	ภาระ (หมายถึง แรง และโมเมนต์)
M, M'	โมเมนต์ดัดภายนอก, โมเมนต์ดัดภายใน
N	แรงภายในตั้งฉากกับพื้นที่หน้าตัด
P, P_{cr}	แรงกดในแนวแกน, แรงกดในแนวแกนวิกฤต สำหรับเสา
Q	โมเมนต์ของพื้นที่รอบแกนสะเทิน
S_y, S_u, S_e	ความต้านแรงคราก, ความต้านแรงสูงสุด, ขีดจำกัดความทนทาน
T, T'	โมเมนต์บิดภายนอก, โมเมนต์บิดภายใน
V, v	แรงเฉือนกระทำขนานกับพื้นที่หน้าตัด, ระยะโก่งของคาน
Z	มอดุลัสของหน้าตัดของคาน ($= I/c$)
δ	ระยะยืด/หดในแนวแกน
ν	อัตราส่วนปัวซอง
ϕ	มุมบิด ($= dv/dx$)
θ	ความชันที่จุดรองรับ

ชื่อเรียก:

1. การสมดุล (equilibrium) หรือ ความสัมพันธ์ระหว่างภาระภายนอกกับภาระภายใน *(รายวิชาสถิตศาสตร์)*
2. การสมมูลสถิต (static equivalency) หรือ ความสัมพันธ์ระหว่างภาระภายในกับความเค้น *(รายวิชากลศาสตร์ของวัสดุ)*
3. การทดสอบทางกลและแบบจำลองวัสดุ (mechanical tests and material models) *(รายวิชากลศาสตร์ของวัสดุ)*
4. จลนศาสตร์หรือความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเปลี่ยนรูป (kinematics or strain-displacement relations)
5. ความเข้ากันได้ทางรูปร่าง (compatibility conditions) และการยืด/หด/บิด (elongation/contraction/twisting) ในการออกแบบเพื่อความแข็งแกร่ง *(รายวิชากลศาสตร์ของวัสดุ)*
6. การโก่ง (deflection) ในการออกแบบเพื่อความแข็งแกร่ง และการโก่งเดาะ (buckling) ในการออกแบบเพื่อเสถียรภาพ *(รายวิชากลศาสตร์ของวัสดุ)*
7. ทฤษฎีความเสียหาย (failure theories) หรือทฤษฎีการวิบัติ สำหรับการออกแบบเพื่อความต้านแรง *(รายวิชาการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกล)*
8. ความหนาแน่นของความเค้น (stress concentration) และการสังเคราะห์รูปร่างและหน้าตัด *(รายวิชาการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกล และสถิตศาสตร์)*

รูปที่ 16 แสดงแผนที่ศาสตร์ที่ร้อยเรียงพารามิเตอร์ต่างๆ เข้าด้วยกัน และแสดงให้เห็นเหตุและผลของเนื้อหาสาระที่ต้องเรียนในรายวิชาต่างๆ ภายใต้กลศาสตร์ของแข็ง

จุดที่ ❹ ระบุการเชื่อมโยงระหว่างความเครียดกับการกระจัดหรือการเปลี่ยนรูปรูปที่ 16 แสดงให้เห็นว่า จุดที่ ❺ และ ❻ จะไม่มีหากปราศจากจุดที่ ❸ ทั้งนี้จุดที่ ❺ และ ❻ ต่างก็เป็นจุดสำคัญสำหรับการออกแบบเพื่อความแข็งแกร่งและเพื่อเสถียรภาพตามลำดับ เนื่องด้วยในสูตรหาระยะโก่ง/บิด หรือแรงวิกฤติจะมีค่า E และ G อยู่ด้วย ดังนั้น ตั้งแต่จุดที่ ❶ ถึง ❻ จะสัมพันธ์กันเป็นวงจร

นอกจากนี้จุดที่ ❹ ยังเป็นจุดเริ่มต้นของการได้มาซึ่งสูตรความเค้นพื้นฐาน กล่าวคือ การได้มาซึ่งสูตรความเค้น ระยะยืด/หด และมุมบิดจะเริ่มต้นด้วยการวิเคราะห์การกระจัดหรือการเปลี่ยนรูปพร้อมกับสมมติฐานต่างๆ และนำมาสู่ความเครียดและความเค้นทั้งนี้สูตรความเค้นที่ได้จะยังไม่สมบูรณ์เนื่องด้วยจะถูกอธิบายให้อยู่ในรูปของความเครียดหรือในรูปของพารามิเตอร์ต่างๆ ของการเปลี่ยนรูป และยังไม่มีเชื่อมโยงใดๆ กับภาระภายใน ดังนั้นความสมบูรณ์ของสูตรความเค้นจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อมีการเชื่อมโยง ณ จุดที่ ❷ อย่างไรก็ตาม ความเชื่อมโยง ณ จุดที่ ❷ ไม่สามารถเกิดขึ้นได้โดยอิสระเนื่องด้วยต้องสอดคล้องกับจุดที่ ❺ และจะเกิดขึ้นในทำนองเดียวกันกับจุดที่ ❶ และ ❻ ทั้งนี้ความเชื่อมโยง ณ จุดที่ ❺ และ ❻ นั้นถูกแสดงด้วยเส้นประซึ่งหมายความว่า ความเชื่อมโยงระหว่างคู่พารามิเตอร์นั้นๆ จะไม่สามารถสร้างขึ้นได้หากไม่มีความเชื่อมโยงระหว่างพารามิเตอร์อื่นในเส้นทึบ ดังตัวอย่างสูตรระยะยืด/หด $\delta = NL/AE$ หรือสูตรมุมบิด $\phi = T'L/JG$ ที่จะต้องมีค่ายังมอดุลัสและมอดุลัสเฉือน (ได้มาจากจุดที่ ❸) อยู่ด้วยเสมอตามลำดับ โดยที่ T' และ J คือ โมเมนต์บิดภายใน และโมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้วของพื้นที่หน้าตัดตามลำดับ นอกจากนี้สูตรทั้งสองยังมีบทบาทสำคัญอีกอย่างหนึ่งคือเป็นเงื่อนไขความเข้ากันได้ทางรูปร่าง (compatibility conditions) สำหรับใช้แก้ปัญหาที่ไม่สามารถหาคำตอบได้ด้วยสมการสมดุลเพียงอย่างเดียวหรือปัญหาอินดีเทอร์มิเนต (indeterminate problems) ณ จุดที่ ❶ จากที่กล่าวข้างต้น การได้มาซึ่งสูตรต่างๆ จะมีรูปแบบที่แน่นอน [13] ซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจได้อย่างถ่องแท้ว่าเหตุใดในการพิสูจน์หรือหาที่มาของสูตรต่างๆ จึงเริ่มที่การกระจัดหรือการเปลี่ยนรูป และสัมพันธ์อย่างไรกับภาระภายนอกที่กระทำกับวัตถุนั้น

รายละเอียดทั้งหมดที่ได้กล่าวข้างต้นแสดงถึงการได้มาซึ่งสูตรของพารามิเตอร์ต่างๆ ที่จะนำไปใช้ในการออกแบบ (รูปที่ 2) จุดที่ ❼ จึงเป็นการประยุกต์ใช้พารามิเตอร์เหล่านั้นเพื่อการออกแบบตามฟังก์ชันการออกแบบ โดยการออกแบบเพื่อความต้านแรงโดยอาศัยความเค้นและทฤษฎีความเสียหายเพื่อไม่ให้ชิ้นส่วนเกิดการเสียหายแบบครากหรือแตกหัก จุดที่ ❽ เป็นการพิจารณาสภาพจริงของชิ้นส่วนที่ต้องมี เช่น การเจาะรู ทำร่องบาก หรือเซาะร่องเพื่อใส่ลิ่ม ดังนั้นการเลือกรูปร่างและขนาดหน้าตัดของชิ้นส่วน (germetries) ที่เหมาะสมก็จะทำให้ชิ้นส่วนสามารถรับความเค้น การเปลี่ยนรูปยืดหยุ่น และแรงกดในแนวแกนได้เป็นอย่างดีและปลอดภัย

โดยทั่วไปรายละเอียดของทั้งสองจุดนี้มักจะถูกอธิบายในรายวิชาการออกแบบชิ้นส่วนทางกล อย่างไรก็ตามมีหนังสือกลศาสตร์ของวัสดุหลายเล่ม [10-12] ที่พยายามเชื่อมโยงการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกลเข้ากับกลศาสตร์ของวัสดุโดยการนำเนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีความเสียหายมาเป็นหัวข้อพิเศษสำหรับผู้สนใจที่จะเรียนรู้เพิ่มเติม อย่างไรก็ตามการนำมานั้นเป็นเพียงเนื้อหาโดยย่อที่มุ่งเน้นเพียงแค่การใช้งานสูตรเท่านั้นเนื่องด้วยข้ามพ้นขอบเขตรายวิชากลศาสตร์ของวัสดุ

โดยสรุป แผนที่ศาสตร์ในรูปที่ 16 แสดงความสัมพันธ์ของพารามิเตอร์ต่างๆ พร้อมด้วยหลักการสำคัญจะช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจได้และตระหนักรู้ได้ตลอดเวลาว่าตนเองกำลังอยู่ที่ใด (เรียนวิชาใด) ในแผนที่ศาสตร์นี้รายวิชาสถิตศาสตร์จะครอบคลุมจุดที่ ❶ และเรื่องสมบัติของหน้าตัด รายวิชากลศาสตร์ของวัสดุมีอาณาเขตครอบคลุมจุดที่ ❷ ถึง ❻ และรายวิชาการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกลจะครอบคลุมจุดที่ ❼ และ ❽ โดยประยุกต์ใช้จุดที่ ❶ ถึง ❻

3.3 กลยุทธ์การแก้ปัญหา

ด้วยเป้าหมายที่ต้องการให้ผู้เรียนได้เรียนรู้และเข้าใจแนวทางการแก้ปัญหาทางฟิสิกส์และวิศวกรรมอย่างเป็นระบบการจัดการเรียนการสอนที่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกฝนแนวทางการแก้ปัญหาอย่างมืออาชีพจึงเป็นเรื่องที่สำคัญและจำเป็นอย่างยิ่ง [47-49]

Heller [47, 48] กล่าวว่า ‘ผู้เชี่ยวชาญหรือมืออาชีพ (expert) จะเห็นว่าการแก้ปัญหาต้องอาศัยกระบวนการการตัดสินใจที่เชื่อมโยงอย่างมีเหตุผลระหว่างสถานการณ์ที่พบกับเป้าหมายโดยใช้หลักการพื้นฐานขณะที่ผู้ใหม่ (novice) จะเห็นว่าการแก้ปัญหาคือการทำตามขั้นตอนหรือเคล็ดลับ (recipe)

ที่เชื่อมโยงระหว่างสถานการณ์ที่พบกับเป้าหมาย'

ความแตกต่างระหว่างผู้เชี่ยวชาญกับผู้ใหม่มีหลายลักษณะ ลักษณะสำคัญสองประการคือ ประการแรกผู้เชี่ยวชาญมักจะสำรวจสภาพปัญหาก่อนจะแก้หรือกำหนดสูตร และจัดกลุ่มรายละเอียดต่างๆ โดยอิงกับหลักการสำคัญที่เกี่ยวข้อง ขณะที่ผู้ใหม่มักจะไม่ค่อยสนใจสภาพปัญหา แต่จะมุ่งเน้นเฉพาะการค้นหาสูตรหรือตัวอย่าง (recipe) ที่ใกล้เคียงกับสภาพปัญหาที่พบอยู่ และประการที่สองผู้เชี่ยวชาญมักจะตรวจสอบความถูกต้อง ความสมเหตุสมผล และความสอดคล้องของคำตอบกับสภาพปัญหาโดยอาศัยหลักการสำคัญ ขณะที่ผู้ใหม่มักจะไม่ค่อยตรวจสอบคำตอบและจะถือว่าการแก้ปัญหานั้นสิ้นสุดทันทีเมื่อได้รับคำตอบจากการคำนวณ [49] ลักษณะดังกล่าวยืนยันคำอธิบายที่กล่าวแล้วในหัวข้อที่ 1.2 เกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างทักษะการคำนวณกับการแก้ปัญหา

เพื่อให้บรรลุเป้าหมายที่จะให้ผู้เรียนได้เรียนรู้และเข้าใจแนวทางการแก้ปัญหาอย่างมืออาชีพและเป็นระบบ ผู้เขียนจึงได้นำแนวทางของ [21, 47, 48] มาปรับปรุงและเรียบเรียงใหม่ให้สะท้อนถึงทักษะสำคัญทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย 5 ส่วนหลักๆ และข้อคำถามย่อยๆ ดังนี้

ส่วนที่ 1: ทำความเข้าใจกับสภาพปัญหา (understand the problem/situation) ซึ่งประกอบด้วย

ⓐ สภาพหรือลักษณะของปัญหาที่พบเป็นอย่างไร?

ⓑ สิ่งใดคือปัญหาที่แท้จริงหรือคำตอบที่ต้องการ?

ⓒ มีหลักการสำคัญใดบ้างที่อาจจะช่วยให้เราแก้ปัญหานี้ได้?

ⓓ มีสมมติฐานใดบ้างที่เกี่ยวข้องที่เราต้องใส่ใจ?

ⓔ มีแผนภาพใดบ้างที่เกี่ยวข้องซึ่งเราต้องวาดให้เห็นชัดเจนและถูกต้อง?

ⓕ มีสูตรใดบ้างที่เกี่ยวข้องที่เราต้อง/ควรระบุให้เห็นชัดเจน? และสูตรเหล่านี้สัมพันธ์อย่างไรกับข้อ cd และ e

ส่วนที่ 2: วางแผน (make a plan to solve problem) ซึ่งประกอบด้วย

ⓖ สูตรที่เราได้กำหนดในข้อf สัมพันธ์กันอย่างไรที่จะนำไปสู่ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าและที่เป็นคำตอบ?และมีจำนวนเพียงพอหรือไม่?

ⓗ หน่วยทั้งสองข้างของสูตรในข้อfมีความสอดคล้องกันหรือไม่?

ส่วนที่ 3: ลงมือแก้ปัญหา (execute the plan)

ⓘ คำนวณตรวจสอบหน่วย และระบุตัวเลขนัยสำคัญได้ถูกต้องหรือไม่?

ส่วนที่ 4: ประเมินผลการแก้ปัญหา (evaluate the solution) ซึ่งประกอบด้วย

ⓙ คำตอบที่ได้มาสมเหตุสมผลหรือไม่? เราจะแปลความคำตอบนั้นว่าอย่างไร? หรือเรารู้ได้อย่างไรว่าคำตอบที่ได้ถูกต้อง?

ⓚ เราได้คำตอบแล้วหรือไม่?

ⓛ มีส่วนย่อยใดบ้างของส่วนที่ 1 ถึง 3 ที่อาจจะก่อให้เกิดข้อผิดพลาดได้มากที่สุดและเราจะมีวิธีการป้องกันได้อย่างไร?

ส่วนที่ 5: คาดการณ์สภาพปัญหา (make predictions) mหากสถานการณ์ของปัญหาเปลี่ยนไป อาทิ ตัวแปรต้นตัวใดตัวหนึ่งหรือหลายตัวมีค่าเปลี่ยนแปลงไปจะเกิดผลกระทบอย่างไรบ้างต่อคำตอบหรือวิธีการที่ใช้แก้ปัญหา?

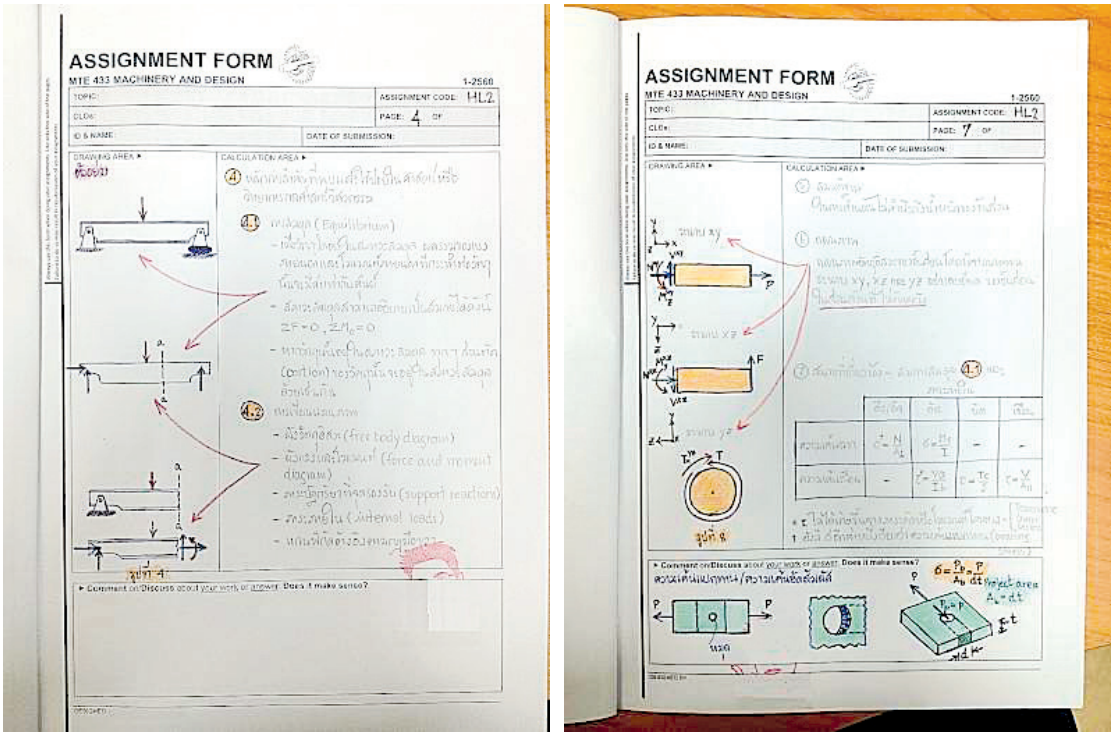
สถานการณ์หรือสภาพปัญหาในส่วนที่ ⓐ ข้อ a สามารถจำแนกออกได้ ดังนี้

- สภาพปัญหาชัดแจ้ง (explicit problem)
- สภาพปัญหาพร้อมบริบท (context-rich problem)

สภาพปัญหาแบบชัดแจ้งเป็นปัญหาที่พบได้บ่อยในแบบฝึกหัดในหนังสือสถิตศาสตร์ และกลศาสตร์ของวัสดุโดยเป็นสภาพปัญหาที่บอกรายละเอียดและสิ่งที่ต้องการให้หาคำตอบมาให้เห็นได้อย่างชัดเจน ขณะที่สภาพปัญหาพร้อมบริบทนั้นจะอธิบายหรือให้ข้อมูลสภาพแวดล้อมที่หลากหลายและไม่ระบุชัดเจนว่าต้องการให้หาคำตอบอะไร แต่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกการตัดสินใจด้วยตนเอง นอกจากนี้ข้อ ⓒ ถึง ⓕ ยังสัมพันธ์โดยตรงกับแผนที่ศาสตร์ (รูปที่ 16) ดังนั้นการฝึกฝนแก้ปัญหาด้วยแนวทางข้างต้นนอกจากจะช่วยให้ผู้เรียนมีความชำนาญมากขึ้นแล้ว ยังเป็นการเสริมสร้างความเข้าใจเชิงลึกในหลักการสำคัญของศาสตร์ให้กับผู้เรียนซึ่งเป็นเรื่องที่สอดคล้องกับแนวทางการออกแบบแบบย้อนกลับ (หัวข้อที่ 2.1 และรูปที่ 4)

โดยทั่วไปแล้ว ผู้เรียนซึ่งเป็นผู้ใหม่มักจะมุ่งเน้นเฉพาะส่วนที่ 3 รวมทั้งการสอนในชั้นเรียนส่วนใหญ่มักจะไม่ได้เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบเท่าที่ควร อีกทั้งยังมีตัวอย่างในหนังสือหลากหลายเล่มที่มุ่งเน้นแค่เพียงการทำ

ส่วนที่ 3 การกล่าวเช่นนี้ไม่ได้หมายความว่าการใช้หนังสือดังกล่าวจะไม่เกิดประโยชน์ใดๆ แต่หากเป็นไปได้การเน้นย้ำให้ผู้เรียนได้ฝึกฝนการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบที่สะท้อนถึงวิธีคิดหรือความสามารถทางปัญญา (cognitive ability) เพิ่มเติมด้วยแล้วก็จะช่วยให้ผู้เรียนมีความสามารถเพิ่มขึ้นได้ รูปที่ 17 เป็นตัวอย่างหนึ่งที่ผู้เขียนได้ทดลองใช้กลยุทธ์การแก้ปัญหาเพื่อเป็นตัวอย่างให้แก่ผู้เรียนซึ่งอยู่ในรายวิชาการเครื่องจักรกลและการออกแบบที่หนึ่งในทีมผู้เขียนเคยได้ศึกษาไว้แล้ว [37] ทั้งนี้การศึกษาดังกล่าวได้แสดงแนวทางที่สอดประสานกัน (alignment) ด้วยการกำหนดผลลัพธ์การเรียนรู้ (learning outcome) การประเมินและการประเมินผล (assessment and evaluation) และการจัดการเรียนการสอน (teaching and learning process) ไว้แล้วแต่ก็ยังอยู่ภายใต้ขอบเขตของรายวิชาเท่านั้น ทีมผู้เขียนกำลังอยู่ในขั้นวางแผนการประยุกต์ใช้ภาพความเข้าใจนี้ทั่วทั้งศาสตร์ ซึ่งเป็นเรื่องที่ต้องใช้เวลาระยะหนึ่งและทีมผู้เขียนจะนำเสนอในโอกาสต่อไป

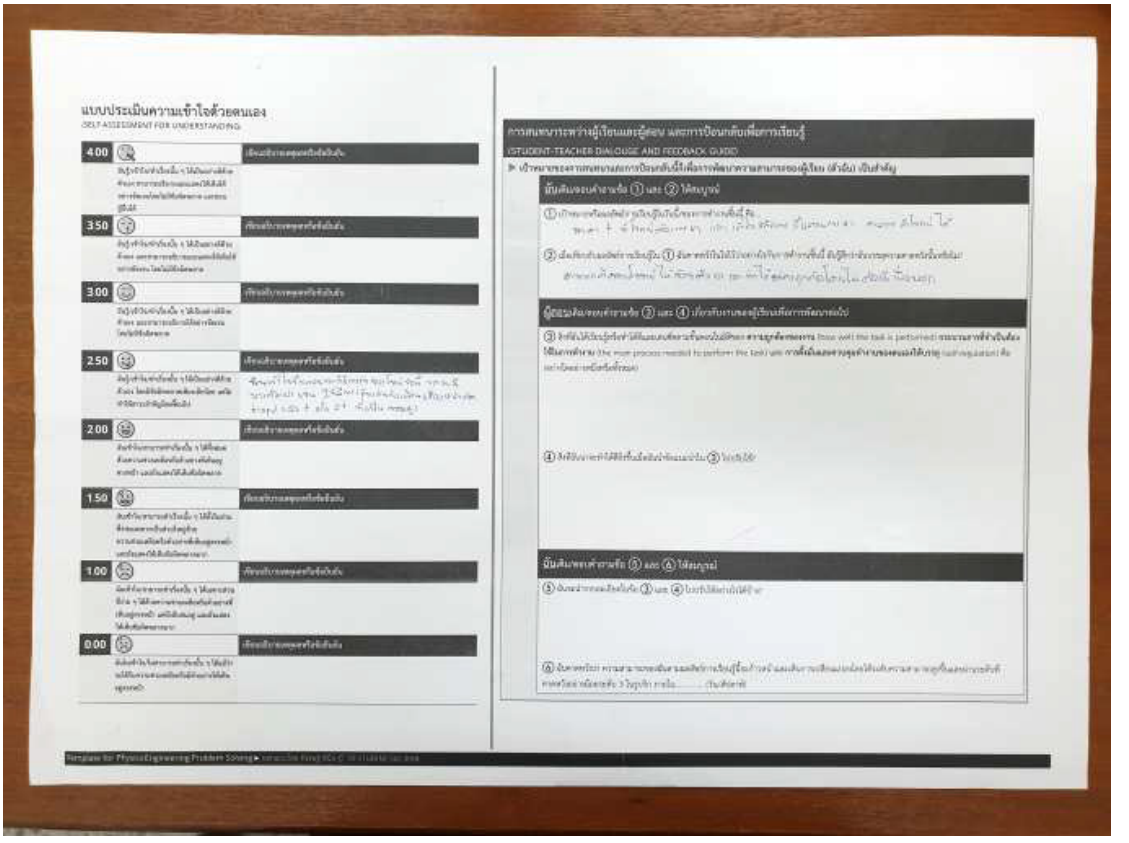


รูปที่ 17 ตัวอย่างการทดลองใช้กลยุทธ์การแก้ปัญหาที่ผู้เขียนได้เริ่มทดลองใช้เพื่อเป็นแนวปฏิบัติให้แก่ผู้เรียนในรายวิชาการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกล [37]

ผู้สอนสามารถประยุกต์ใช้แนวทางการแก้ปัญหาได้ทั้งในและนอกชั้นเรียนโดยสามารถกำหนดสภาพปัญหาทั้งแบบชัดแจ้งและแบบพร้อมบริบท นอกจากนี้ผู้สอนยังสามารถใช้เป็นแนวทางการให้ผลป้อนกลับ (feedback) กับผู้เรียนเพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกฝนการแก้ปัญหานี้อย่างจริงจัง โดยเฉพาะส่วนที่ 4 และ 5 ที่แสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่าการแก้ปัญหาไม่ใช่เพียงแค่การคำนวณ

5. ตัวอย่างการประยุกต์ใช้แนวคิด

ในเบื้องต้นทีมผู้วิจัยได้ให้ผู้เรียนทดลองใช้หลักการสำคัญ แผนที่ศาสตร์ และกลยุทธ์การแก้ปัญหา และสืบค้นการเรียนรู้ของผู้เรียนผ่านการสังเกต การให้ผลป้อนกลับจากผู้สอน (feedback) และการสะท้อนคิดด้วยตัวผู้เรียนเอง (self reflection) รูปที่ 18 แสดงแบบฟอร์มขนาด a3 ซึ่งแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหา 7 ขั้นตอน (ด้านหน้า) ที่สะท้อนถึง 5 ส่วนหลักที่กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 3.3 และแสดงที่ว่างสำหรับการให้ผลป้อนกลับและระดับการสะท้อนคิดด้วยตนเอง (ด้านหลัง) ทั้งนี้ผู้เขียนสามารถเขียนผลป้อนกลับการแก้ปัญหาของผู้เรียนลงในที่ว่างด้านหลังหรือเขียนลงไปในแต่ละส่วนที่ด้านหน้าก็ได้ ทั้งนี้เรื่องที่สำคัญอย่างยิ่งตามหลักการให้ผลป้อนกลับ [50] คือการที่ผู้เรียนเข้าใจความหมายของผลป้อนกลับว่าเป็นการพัฒนาทักษะของตนเองให้ก้าวหน้าและเรียนรู้หลักการสำคัญ และความสัมพันธ์ของปริมาณต่างๆ ในแผนที่ศาสตร์ รวมทั้งจะต้องนำผลป้อนกลับนั้นไปทบทวนและปรับใช้ทันที



รูปที่ 18 ตัวอย่างการทดลองใช้กลยุทธ์การคิดแก้ปัญหา และการให้ผลป้อนกลับให้แก่ผู้เรียนโดยอิงกับหลักการสำคัญและแผนที่ศาสตร์ (ก) ด้านหน้าที่แสดงขั้นตอนการแก้ปัญหา และ (ข) ด้านหลังที่แสดงการประเมินตนเองของผู้เรียน

ผู้เขียนตรวจผลงานการแก้ปัญหาของผู้เรียนและให้ผลป้อนกลับโดยเปรียบเทียบกับหลักการสำคัญและแผนที่ศาสตร์ ทั้งนี้การให้ผลป้อนกลับมักจะเป็นไปในรูปของคำถามชวนคิด และแนะนำต่อไปว่าควรทำอย่างไร จากรูปที่ 18 (ส่วนที่ ⓑ) เราจะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า ผู้เรียนเริ่มมีความเข้าใจเกี่ยวกับเส้นทางการออกแบบ (รูปที่ 2) และวัตถุประสงค์การออกแบบ (รูปที่ 3) นอกจากนี้ผู้เรียนยังใช้แผนที่ศาสตร์ในส่วนที่ ⓒ เกี่ยวกับการสมมูลสถิต (static equivalency) แต่ไม่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างภาระภายในกับการกระจายตัวของความเค้นให้เห็นอย่างชัดเจน

ข้อค้นพบในเบื้องต้นอีกประการหนึ่งคือ ผู้เรียนมุ่งเขียนเพื่อตอบคำถามนำในแต่ละส่วน อาทิ ส่วนที่ ⓐ ซึ่งในความมุ่งหวังของผู้เขียนก็คือ คำถามเหล่านี้เป็นคำถามนำความคิดหรือเป็นคำถามให้ผู้เรียนฉุกคิดก่อนลงมือทำ ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนน่าสะท้อนออกมาให้เห็นเชิงประจักษ์เมื่อเวลาที่ผู้เรียนกำลังแก้ปัญหาโจทย์ข้อนี้ กล่าวคือ ผู้เรียนส่วนใหญ่มักจะเริ่มจากการคำนวณในส่วนที่ ⓓ ก่อนและมักจะเปิดหนังสือหรือค้นในอินเทอร์เนตเพื่อหาตัวอย่างเทียบเคียงแต่เมื่อผู้เขียนตั้งคำถามว่า เหตุใดจึงคำนวณแบบนั้นหรือใช้หลักการใด ผู้เรียนก็ไม่สามารถตอบคำถามได้ ซึ่งเป็นภาวะที่ได้กล่าวไว้แล้วข้างต้น คือ การวิเคราะห์คำตอบ (answer analysis) ผู้เรียนมักจะเริ่มต้นการแก้ปัญหาจากตัวอย่างหรือคำตอบที่ทราบแล้วและย้อนกลับไปค้นหาวิธีการที่เหมาะสม เรื่องเหล่านี้เป็นสิ่งที่ทีมผู้เขียนจะต้องร่วมกันปรับและวางแผนให้ในรัดกุมยิ่งขึ้นและสื่อสารกับผู้เรียนในสิ่งที่ถูกต้องและควรปฏิบัติ กล่าวคือ ต้องคิดแก้ปัญหาโดยอาศัยกลยุทธ์การแก้ปัญหา

ในด้านหลังของแบบฟอร์มการแก้ปัญหา (รูปที่ 18 ข) ผู้เรียนประเมินความเข้าใจของตนเองและกำหนดให้อยู่ในระดับ 2.50 ซึ่งหมายถึง ‘ฉันรู้/เข้าใจ/ทำเรื่องนั้นๆ ได้เป็นอย่างดีด้วยตนเอง โดยมีข้อผิดพลาดเพียงเล็กน้อย แต่ไม่ทำให้สาระสำคัญผิดเพี้ยนไป’ และให้เหตุผลประกอบ ซึ่งเหตุผลที่ให้นั้นแสดงให้เห็นว่า ผู้เรียนยังสับสนกับการใช้ปริมาณหนึ่งในสูตรความเค้นที่เกิดจากโมเมนต์ดัดภายใน (ดูรูปที่ 16 ในส่วนการสมมูลสถิต 2 และความเค้น) ข้อมูลนี้เป็นสิ่งที่สำคัญอย่างยิ่งต่อการสอนของผู้เขียนเนื่องด้วยรู้ว่า ผู้เรียนติดขัดหรือเข้าใจคลาดเคลื่อนตรงจุดใด ซึ่งจะทำให้ผู้สอนสามารถปรับการจัดการสอนหรือให้คำปรึกษาเป็นรายบุคคลได้อย่างเหมาะสมเพื่อบรรลุผลลัพธ์การเรียนรู้ที่กำหนดไว้ และเรื่องนี้เป็นเรื่องที่ผู้สอนที่เกี่ยวข้องในศาสตร์กลศาสตร์วิศวกรรม สาขากลศาสตร์ของแข็งซึ่งรับผิดชอบแต่ละส่วนภายใต้รายวิชาจะต้องตระหนักและสร้างการสอดประสาน (alignment) ร่วมกัน

6. บทสรุปและงานในอนาคต

กลศาสตร์วิศวกรรมสาขากลศาสตร์ของแข็งถือเป็นส่วนสำคัญอย่างยิ่งในหลายหลักสูตรที่เกี่ยวข้องกับการออกแบบทางกลหรือชิ้นส่วนเครื่องจักรกล ในมิติของวิศวศึกษาที่มุ่งพัฒนาแนวทางการเรียนการสอนศาสตร์ทางวิศวกรรมให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น โดยอาศัยคำถามนำทางทั้งสามข้อบทความนี้ได้นำเสนอแนวคิดใหม่ที่เชื่อมโยงเนื้อหาสาระต่างๆ เข้าด้วยกันผ่านสามองค์ประกอบ คือ หลักการสำคัญ แผนที่ศาสตร์ และกลยุทธ์การแก้ปัญหาซึ่งประกอบเป็นภาพความเข้าใจในศาสตร์

การเชื่อมโยงดังกล่าวชี้นำไปสู่การบรรลุเป้าหมายของการออกแบบทางกลหรือชิ้นส่วนทางกล กล่าวคือ เพื่อความต้านแรง เพื่อความแข็งแกร่ง และเพื่อเสถียรภาพ ทั้งการวิเคราะห์และการสังเคราะห์และช่วยทำให้เห็นเป้าหมายการเรียนรู้ในสาขากลศาสตร์ของแข็ง รวมทั้งเหตุผลในการจัดแบ่งเนื้อหาและรายละเอียดที่สอดคล้องกันลงในรายวิชาต่างๆ ข้างต้นได้อย่างชัดเจน

การเชื่อมโยงขององค์ประกอบทั้งสามสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้หลายประการและเป็นสิ่งที่ผู้เขียนสนใจและจะดำเนินการในอนาคต ดังนี้

1) เป็นกรอบหรือแนวทางให้ผู้สอนได้ร่วมกันกำหนดผลลัพธ์การเรียนรู้ทั่วทั้งศาสตร์ (discipline-wide learning outcomes)

2) เป็นกรอบหรือแนวทางให้ผู้สอนวางแผนการจัดการเรียนรู้ที่เหมาะสมให้กับผู้เรียนภายใต้ระบบการจัดการศึกษาแบบเน้นผลลัพธ์การเรียนรู้โดยเฉพาะการออกแบบรายวิชาด้วยการกำหนดผลลัพธ์การเรียนรู้ (course learning outcomes) ทั้งระดับรายวิชาและระดับศาสตร์บนพื้นฐานของอนุกรมวิธานการเรียนรู้ตามรูปแบบโซโล (SOLO) มาร์ซาโนและเคนดอลล์ (Marzano and Kendall) หรือรูปแบบอื่นใด

3) ช่วยเป็นแนวทางการทวนสอบความเข้าใจเชิงลึกของผู้เรียน [51-53] และการให้ผลป้อนกลับที่เหมาะสมและตรงกับเป้าหมายเพื่อขจัดความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในแนวคิดหรือหลักการสำคัญ (misconceptions) รวมทั้งการปรับปรุงและพัฒนาหลักสูตรและกระบวนการจัดการเรียนการสอน

4) เป็นเครื่องชี้นำที่จะทำให้เกิดการสอนเชิงบูรณาการ (integrative teaching) หรือการสอนเป็นทีม (team teaching) ด้วยการร่วมกันวางแผนกระบวนการจัดการเรียนการสอนและการประเมินที่สอดคล้องสัมพันธ์และเหมาะสมในศตวรรษที่ 21 [54] ดังตัวอย่างที่ได้อธิบายแล้วในหัวข้อที่ 5

5) เป็นกรอบคิดในการสร้างสรรค์เอกสาร หนังสือ ตำรา หรือสื่อประกอบการเรียนการสอนในศาสตร์นี้และ

6) เป็นแนวทางในการกำหนดหลักการสำคัญและแผนที่

ศาสตร์ในศาสตร์อื่นๆ ที่มีอยู่ในหลักสูตร

7. เอกสารอ้างอิง

1. Pytel, A. and Kiusalaas, J., 2010, Engineering Mechanics: Statics, 3rd ed., Cengage Learning, Stamford.

2. Hibbeler, R.C., 2016, Engineering Mechanics: Statics, 14th ed., Pearson, Hoboken.

3. Jayakumar, V. and Kumar, M., 2012, Engineering Mechanics, PHI Learning Private Limited, New Delhi.

4. Plesha, M.E., Gray, G.L. and Costanzo, F., 2010, Engineering Mechanics: Statics, McGraw-Hill Education, New York.

5. Meriam, J.L. and Kraige, L.G, 2012, Engineering Mechanics: Statics, 7th ed., John Wiley and Sons.

6. Ferdinand, P.B., Johnston Jr., E.R. and Mazurek, D., 2015, Vector Mechanics: Statics, 11th ed., McGraw-Hill Education.

7. Hibbeler, R.C., 2016, Engineering Mechanics: Dynamics, 14th ed., Pearson, Hoboken.

8. Ferdinand, P.B., Johnston Jr., E.R. and Mazurek, D., 2015, Vector Mechanics: Dynamics, 11th ed., McGraw-Hill Education.

9. Gere, J.M. and Goodno, B.J., 2009, Mechanics of Materials, 7th ed., Cengage Learning, Toronto.

10. Pytel, A. and Kiusalaas, J, 2012, Mechanics of Materials, 2nd ed., Cengage Learning, Stamford.

11. Ferdinand, P.B., Johnston Jr., E.R., Dewolf, J. and Mazurek, D., 2015, Mechanics of Materials, 7th ed., McGraw-Hill Education, New York.

12. Hibbeler, R.C., 2017, Mechanics of Materials, 10th ed., Pearson, Hoboken.

13. Vable, M., 2010, Mechanics of Materials, 2nd ed., Michigan Technological University.

14. Singhatanadgid, P., 2012, Mechanics of Materials, 2nd ed., Chulalongkorn University Press, Bangkok. (In Thai)

15. Wright, D., 2005, Design and Analysis of Machine Elements [Online], Available: http://www-mdp.eng.cam.ac.uk/web/library/enginfo/textbooks_dvd_only/DAN/SSS/safety/safety.html [23 October 2017].

16. George, C.Y., Keng-Chang, K., Cheng-Luen, H. and Yao, T., 2016, "A New Approach to Teach Mechanics of Material throughTouching Experience," *American Journal of Civil Engineering*, 4 (4), pp. 143-148.

17. Sadid, H. and Wabrek, R., 2009, "A New Approach To Teaching Mechanics Of Materials," *Proceedings of the 2009 Annual Conference and Exposition*, Austin, Texas. https://peer.asee.org/5745 [11 November 2017].

18. Boylan-Ashraf, P.C., Freeman, S.A. and Shelley, M.C., 2014, A Case for a Reform in Teaching Introductory, Fundamental Engineering Mechanics Courses[Online], Available:http://lib.dr.iastate.edu/abe_eng_conf/405 [11 November 2017].

19. Pierre-Antoine, R., Sheppard, S.D. and Schar, M., 2014, Utilizing Concept Maps to Improve Engineering Course Curriculum in Teaching Mechanics [Online], Available:https://peer.asee.org/23286 [11 November 2017].

20. Rencis, J.J. and Grandir, H.T. Jr., 2005, A New Approach for an Undergraduate Mechanics of Materials Course that Integrates Theory, Analysis, Verification and Design [Online], Available: https://www.asee.org/documents/sections/midwest/2005/Rencis_and_Grandin.pdf [11 November 2017].

21. Mott, R.L., 2008, Applied Strength of Materials, 5thed.,Pearson/Prentice-Hall, Upper Saddle River.

22. Soffel, J., 2016, What are the 21st-Century Skills every Student Needs? [Online], Available: https://www.weforum.org/agenda/2016/03/21st-century-skills-future-jobs-students/. [12 January 2018].

23. Biggs, J.B. and Collis, K.F., 1982, Evaluating the

Quality of Learning - the SOLO Taxonomy, Academic Press, New York.

24. Biggs, J.B., 1995, "Assessing for Learning: Some Dimensions Underlying New Approaches to Educational Assessment," *The Alberta Journal of Educational Research*, 41 (1), pp. 1-17.

25. Biggs, J. and Tang, C., 2007, Teaching for Quality Learning at University, The Society of Research into Higher Education, 4th ed., McGraw-Hill, London.

26. Marzano, R.J. and Kendall, J.S., 2006, The New Taxonomy of Educational Objectives, 2nd ed., Corwin Press, Thousand Oaks.

27. Rans, C. and Freitas, S.T., 2016, Aerospace Mechanics of Materials [Online], Available: https://ocw.tudelft.nl/course-readings/four-principles-mechanics-materials-2/[11 November 2017].

28. Markova, S.L., Mladensk, A. and Petrova, D.K., 2014, Selected Topics on Strength of Materials [Online], Available: http://uacg.bg/filebank/att_6146.pdf [11 November 2017].

29. Mott, R.L., Vavrek, E.M. and Wang, J., 2004, Machine Elelments in Mechanical Design, 4th ed., Pearson, Upper Saddle River.

30. Bhandari, V.B., 2014, Introduction to Machine Design, 2nd ed., McGrawHill Education, New Delhi.

31. Budynas, R.G. and Nisbett, J.K., 2015, Shigley's Mechanical Engineering Design, 10th ed., McGrawHill Education, NewYork.

32. Ugural, A.C., 2015, Mechanical Design of Machine Components, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton.

33. Pirunkaset, M., 2010, Mechanicsof Materials, Witthayaphat, Bangkok. (In Thai)

34. Wantang, T., 2017, Strengthof Materials, SE-ED, Bangkok. (In Thai)

35. McTighe, J. and Wiggins, G., 1999, The Understanding by Design Handbook, ASCD, Alexandria.

36. Tienkul, N. and Pinit, P., 2016, "Member Stiffness of Standard Bolted Joint Member: Comparing Results Obtained by Analytical Methods and by Photoelasticity," *KMUTT Research and Development Journal*, 39 (4), pp. 545-561. (In Thai)

37. Pinit, P., 2017, "Pedagogical Course Design and Implementation: First Attempt of Outcome-Referenced Assessment in Undergraduate Course of Machinery and Design," *KMUTT Research and Development Journal*, 40 (4), pp. 545-567. (In Thai)

38. Frocht, M.M., 1948, Photoelasticity, Vol. 2, John Willey and Sons, New York.

39. Pinit, P., 2011, "Photoelastic Simulation towards a Study of a Simply Supported Rectangular Beam Carrying a Central Concentrated Force," *KMUTT Research and Development Journal*, 34 (2), pp. 89-103.

40. Sadd, M.H., 2005, Elasticity: Theory, Applications, and Numerics, Elsevier Butterworth-Heinemann, Burlington.

41. Younis, N.T., 2003, Stress Analysis Experiments for Mechanical Engineering Students [Online], Available:https://peer.asee.org/12411 [11 November 2017].

42. Karp, B.B. and Durban, D.D., 2011, "Saint-Venant's Principle in Dynamics of Structures," *ASME Applied Mechanics Reviews*, 64 (2), doi:10.1115/1.4004930.

43. Pilkey, W.D. and Pilkey, D.F., 2008, Peterson's Stress Concentration Factors, 3rd ed., John Wiley and Sons, Hoboken.

44. Pilkey, W.D., 2005, Formulas for Stress, Strain, and Structural Matrices, 2nd ed., John Wiley and Sons, Hoboken.

45. Spotts, M.F. and Shoup, T.E., 1998, Design of Machine Elements, 7th ed., Prntice-Hall, Upper Saddle River.

46. Steif, P.S., 2012, Mechanics of Materials, Pearson Higher Education: New Jersey.

47. Heller, P., Keith, R. and Anderson, S., 1992, "Teaching Problem Solving through Cooperative Grouping. Part I: Group versus Individual Problem Solving," *American Association of Physics Teachers*, 60 (7), pp. 627–636.

48. Heller, P. and Hollabaugh, M., 1992, "Teaching Problem Solving through Cooperative Grouping. Part II: Designing Problems and Structuring Groups," *American Association of Physics Teachers*, 60 (7), pp. 637–644.

49. Chi, M.T., Feltovich, P.J. and Glaser, R., 1981, "Categorization and Representation of Physics Problem by Experts and Novices," *Cognitive Science*, 5 (2), pp. 121–152.

50. Hattie, J. and Timperley, H., 2007, "The Power of Feedback," *Review of Educational Research*, 77 (1), pp. 81-112.

51. Steif, P.S. and Dantzler, J.A., 2005, "A Statics Concept Inventory: Development and Psychometric Analysis," *Journal of Engineering Education*, 94 (4), pp. 363–371.

52. Steif, P.S. and Dollar, A., 2005, "Reinventing the Teaching of Statics," *International Journal of Engineering Education*, 21 (4), pp. 723–729.

53. Montfort, D., Herman, G.L., Brown, S., Matusovich, H.M., Streveler, R.A. andAdesope, O., 2015, "Patterns of Student Conceptual Understanding across Engineering Content Areas," *International Journal of Engineering Education*, 31 (6A), pp. 1587–1604.

54. Bellanca, J. and Brandt, R., 2010, 21st Century Skills: Rethink How Students Learn, Solution Tree Press, Bloomington.