น้ำหนักวิกฤตของคานเอียงต่างระดับที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงดึงที่จุดรองรับ

การันต์ คล้ายฉ่ำ*

มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ กำแพงแสน ต.กำแพงแสน อ.กำแพงแสน จ.นครปฐม 73140

** Corresponding Author: karun.kl@ku.ac.th*

อาจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ กำแพงแสน

ข้อมูลบทความ

ประวัติบทความ :

รับเพื่อพิจารณา : 13 พฤษภาคม 2562

แก้ไข : 30 สิงหาคม 2562

ตอบรับ : 17 กันยายน 2562

คำสำคัญ :

คานเอียงต่างระดับที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ / แรงดึงที่ปลาย / ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ / วิธียิงเป้า / แอ่นตัวมาก

บทคัดย่อ

คานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้เป็นโครงสร้างประเภทอิลาสติกคา ซึ่งปลายคานสามารถเลื่อนผ่านจุดรองรับเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกที่มากระทำ ส่งผลให้ค่าความยาวส่วนโค้งของคานเปลี่ยนไป เมื่อน้ำหนักบรรทุกมากเกินกว่าค่าวิกฤต คานจึงไม่สามารถรักษาสภาวะสมดุลได้ ด้วยเหตุนี้ จึงจำเป็นต้องมีการยึดรั้ง เช่น แรงดึงที่ปลายคาน งานวิจัยนี้ได้ตรวจสอบผลกระทบของแรงดึงที่ปลายคานต่อการแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับต่างระดับกันภายใต้น้ำหนักของคาน วิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาเชิงตัวเลขมี 2 วิธี ได้แก่ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธียิงเป้า เมื่อเปรียบเทียบคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จาก 2 วิธีนี้ พบว่าสอดคล้องกัน จากนั้นจึงนำเสนอผลกระทบของแรงดึงที่ปลายและความต่างระดับของจุดรองรับต่อการแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ซึ่งการตรวจสอบเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่า แรงดึงที่ปลายคานและการลดระดับของจุดรองรับด้านขวาลงช่วยเพิ่มสติฟเนสให้คาน และเพิ่มน้ำหนักบรรทุกวิกฤต รวมถึงเสถียรภาพของคานด้วย อย่างไรก็ดีคานอาจสูญเสียเสถียรภาพเมื่อยกจุดรองรับด้านขวาของคานขึ้น เนื่องจากน้ำหนักบรรทุกวิกฤตของคานลดลง น้ำหนักบรรทุกวิกฤตของคานที่นำเสนอในงานวิจัยนี้เป็นผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขใหม่ และสามารถใช้อ้างอิงสำหรับงานวิจัยในอนาคตได้

Critical Self-Weight of Inclined Variable-Arc-Length Beam under Applied Tension at Support

Karun Klaycham*

Kasetsart University, Kamphaeng Saen, Nakhon Pathom 73140

* *Corresponding Author: karun.kl@ku.ac.th*
Lecturer, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering at Kamphaeng Saen.

Article Info

Article History:
Received: May 13, 2019
Revised: August 30, 2019
Accepted: September 17, 2019

Keywords:
Applied Tension / Finite Element Method / Inclined Variable Arc-Length Beam / Large Deflection / Shooting Optimization Method

Abstract

Variable arc-length (VAL) beam is one of the elastica structures where its tip can slip through a support due to loadings, which results in turn in the alteration of the total arc-length. If the load exceeds than the critical value, VAL beam cannot keep its equilibrium. A restraint-like applied tension at the support is therefore necessary. This work investigated the effect of applied tension at the beam tip on large deflection of an inclined VAL beam subjected to uniform self-weight. Two different numerical approaches were utilized to obtain the numerical solutions, i.e., finite element method and shooting optimization method. The numerical results obtained from these two methods showed good agreement comparing to each other. The effects of applied tension and support inclination on the large deflection of VAL beam were then studied. The numerical investigation shows that the applied tension and shifting the right support down helped stiffen the inclined VAL beam system, increase its critical load as well as improve the beam stability. However, the beam could lose its stability by shifting the support up because of the reduced critical self-weight. The critical self-weight of an inclined VAL beam proposed in this study is a new result and could be used as a benchmark for future study.

1. บทนำ

คานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ (Variable-Arc-Length Beam) หรือเรียกแบบย่อว่า “VAL Beam” เป็นโครงสร้างคานประเภทอิลาสติกคา [1] ซึ่งความยาวส่วนโค้งที่เปลี่ยนไปขึ้นอยู่กับน้ำหนักของคาน [2] หรือแรงภายนอกที่มากระทำ และทำให้คานเกิดการแอ่นตัวมาก (Large Deflection) [1, 3-7] คานประเภทนี้อาจเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า “Unknown Length Beam” [8-9] สำหรับปัญหาคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ระยะห่างระหว่างจุดรองรับที่ปลายทั้ง 2 ข้างของคานหรือความยาวช่วงของคานจะมีค่าคงที่ ขณะที่ความยาวส่วนโค้งของคานสามารถแปรเปลี่ยนได้ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ได้แก่ วิธีอิลิปติกอินทิกรัล และวิธีเชิงตัวเลข ได้แก่ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธียิงเป้า

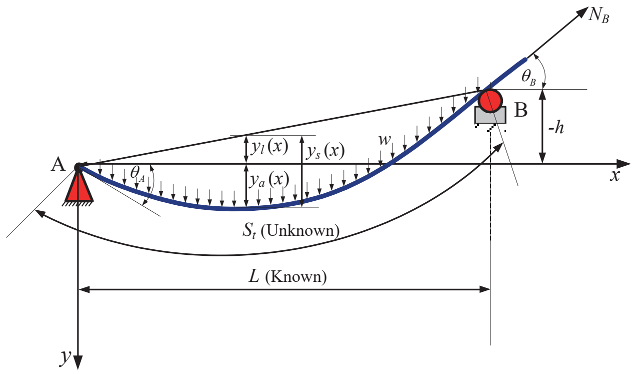
จากการทบทวนวรรณกรรม การวิเคราะห์ปัญหาคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำต่างๆ สามารถกระทำได้ทั้งโดยวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีเชิงตัวเลข โดยปกติแล้วในปัจจุบันมี 3 วิธีที่ได้รับความนิยม อาทิ วิธีอิลิปติกอินทริกรัล ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และวิธีการยิงเป้า สำหรับวิธีอิลิปติกอินทริกรัลเป็นวิธีเชิงวิเคราะห์ สามารถใช้หาผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาได้ [10-11] อย่างไรก็ดี วิธีการนี้ไม่เหมาะสำหรับใช้วิเคราะห์ปัญหาคานภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบแผ่กระจายหรือน้ำหนักของคานเองได้ สำหรับ 2 วิธีหลัง ได้แก่ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีการยิงเป้าเป็นการคำนวณบนพื้นฐานของระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีที่ได้รับความนิยมสำหรับวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนเมื่อแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของคานเขียนอยู่ในรูปของสมการอินทริกรัล ตัวอย่างบทความวิจัยที่นำเสนอแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ อาทิ Chucheepsakul และ Huang [1] Chucheepsakul และ Huang [10] และ Athisakul และ Chucheepsakul [12] เป็นต้น สำหรับวิธีการยิงเป้าเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมสำหรับการแก้ปัญหาค่าเงื่อนไขขอบเขตแบบ 2 จุด เมื่อแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของคานเขียนอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว จะสร้างสมการแบบจำลองโดยพิจารณาสมดุลของแรงและโมเมนต์ของคาน วิธีการนี้อาศัยกระบวนการอินทิเกรตเชิงตัวเลขร่วมกับกระบวนการกระทำซ้ำ Newton-Raphson เพื่อหาคำตอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนด [6]

งานวิจัยเกือบทั้งหมดที่เกี่ยวข้องกับปัญหาคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ หรือปัญหาที่ใกล้เคียงกันภายใต้แรงกระทำแบบไม่ติดตามการเสียรูปของคาน ได้แก่ แรงจากน้ำหนักของคาน [2, 8, 12-13] แรงกระทำแบบจุด [4, 10, 14-15] โมเมนต์คู่ควบกระทำที่ปลายคาน [3, 16-19] เป็นต้น นอกจากนั้นยังมีงานวิจัยที่มุ่งเน้นเพื่อศึกษาคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงกระทำแบบติดตามการเสียรูป [5, 11, 20-24] อย่างไรก็ดี มีเพียงงานวิจัยของ Pulngern และคณะ [5] ที่ศึกษาผลกระทบของค่าความโค้งเริ่มต้นต่อการแอ่นตัวมากของคานประเภทนี้ นอกจากนั้นการศึกษาได้ขยายผลไปยังการวิเคราะห์เพื่อศึกษาพฤติกรรมทางด้านพลศาสตร์ของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ซึ่งได้ศึกษาเปรียบเทียบทั้งในเชิงทฤษฎีและการทดลองในห้องปฏิบัติการโดย Pulngern และคณะ [25] และ Pulngern และคณะ [26]

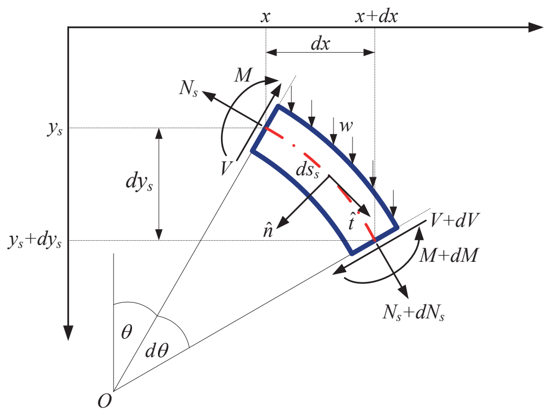
หากพิจารณากรณีที่คานรับน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอ Athisakul และ Chucheepsakul [12] ได้รายงานผลการศึกษาว่า ค่าน้ำหนักวิกฤตไร้หน่วยของ VAL Beam มีขีดจำกัดอยู่ที่ $\hat{w}_{cr}$ = 8.253 และเพิ่มขึ้นเป็น 8.809 เมื่อลดระดับของจุดรองรับด้านขวาลงจนกระทั่งทำมุม -45 องศากับแนวราบ อย่างไรก็ดี เมื่อยกระดับของจุดรองรับด้านขวาขึ้นจนกระทั่งทำมุม 45 องศากับแนวราบ จะทำให้ค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตไร้หน่วยลดลงเหลือ $\hat{w}_{cr}$ = 2.663 ทั้งนี้เนื่องจากปลายคานด้านขวาสามารถเลื่อนผ่านจุดรองรับได้อย่างอิสระ คานประเภทนี้จึงไม่สามารถคงอยู่ในสภาวะสมดุลสถิตยศาสตร์ได้เมื่อน้ำหนักบรรทุกมากกว่าค่าวิกฤต ในกรณีดังกล่าวนี้ การยึดรั้งที่ปลายคาน อาทิ ใช้แรงดึงยึดรั้งที่ตำแหน่งดังกล่าวไว้จะช่วยเพิ่มค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตได้

ดังนั้น การศึกษานี้ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของคานต่างระดับที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงดึงที่ปลายคาน การสร้างสมการครอบคลุมปัญหาของคานได้ใช้วิธีที่แตกต่างกัน 2 วิธี ได้แก่ 1) โดยใช้หลักการสมดุลของแรงและโมเมนต์ภายในชิ้นส่วนย่อยของคาน ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และความโค้ง และความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของคานซึ่งทำให้ได้เซตของสมการครอบคลุมปัญหาที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 สมการนี้สามารถหาคำตอบเชิงตัวเลขได้

ด้วยระเบียบวิธียิงเป้า (Shooting Optimization Method, SOM) และ 2) โดยใช้หลักการของงาน-พลังงาน เพื่อสร้างสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของสมการอินทิกรัล ซึ่งใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method, FEM) สำหรับคำนวณหาคำตอบเชิงตัวเลข โดยผลคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากทั้ง 2 วิธีนี้ จะนำมาเปรียบเทียบกันเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคำนวณเชิงตัวเลข งานวิจัยนี้นำเสนอผลกระทบจากแรงดึงที่ปลายคานต่อพฤติกรรมการดัดและการแอ่นตัวมากของคานที่มีจุดรองรับต่างระดับกัน แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของคานที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ สามารถประยุกต์และพัฒนาต่อยอดเพื่อใช้สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างอื่นๆ ที่มีความคล้ายคลึงกัน เช่น ท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเล (Marine Riser) โดยการจำลองแรงจากคลื่นและกระแสน้ำเพิ่มเข้าไป [27-28]



รูปที่ 1 ลักษณะการแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงดึงที่จุดรองรับ B



รูปที่ 2 ผังอิสระของชิ้นส่วนย่อยของคาน VAL beam

2. ความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตและแรงภายในของคาน

รูปที่ 1 แสดงคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอของคาน (w) โดยจุดรองรับทั้ง 2 ด้านของคานวางต่างระดับกัน จุดรองรับที่ปลายคานด้านซ้าย (จุด A) เป็นแบบยึดหมุน ขณะที่ปลายคานด้านขวา (จุด B) พาดอยู่บนจุดรองรับที่ยอมให้คานสามารถเลื่อนผ่านได้ภายใต้การยึดรั้งด้วยแรงดึง (N_B) ที่ปลายคาน

ระยะห่างในแนวราบระหว่างจุดรองรับทั้ง 2 ข้างมีค่าคงที่เท่ากับ L และอยู่ต่างระดับกันในแนวดิ่งเท่ากับ h โดยค่า h อาจมีค่าเป็นบวกหรือลบเมื่อลดระดับจุดรองรับด้านขวาให้ต่ำกว่าหรือยกให้สูงกว่าจุดรองรับด้านซ้าย ตามลำดับ เนื่องจากปลายคานสามารถเลื่อนไถลผ่านจุดรองรับ จึงทำให้ไม่ทราบค่าความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของคาน (s_t) ที่สภาวะสมดุลสถิตยศาสตร์ เมื่อมีน้ำหนักของคานมากระทำ ทำให้คานแอ่นตัวจากตำแหน่งก่อนการเสียรูป (y_l) โดยมีค่าการแอ่นตัวเท่ากับ y_a ดังนั้นตำแหน่งของคานที่สภาวะสมดุลสถิตยศาสตร์ (y_s) ที่พิกัดต่างๆ ในแนวราบ (x) คำนวณได้โดย

$$y_s = y_l + y_a \tag{1}$$

ณ สภาวะก่อนการเสียรูปของคาน ตำแหน่งของคานเป็นฟังก์ชันของพิกัดตามแนวราบ (x) ซึ่งสามารถคำนวณได้จาก $y_l = (h/L)x$ สำหรับค่าการแอ่นตัวของคาน (y_a) หลังจากรับน้ำหนักบรรทุกคำนวณได้โดยกระบวนการเชิงตัวเลข

จากการพิจารณาชิ้นส่วนย่อยของคานที่มีความยาวส่วนโค้งน้อยๆ (ds_s) ตามรูปที่ 2 สมการรูปร่างความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของเส้นโค้งในระนาบของคานโดยอ้างอิงทฤษฎีอิลาสติกคาสามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$ds_s = \sqrt{(dx^2 + dy_s^2)} = \sqrt{(1 + y_s'^2)}dx \tag{2ก}$$

$$\sin\theta = \frac{dy_s}{ds_s} = \frac{y_s'}{(1 + y_s'^2)^{1/2}} \tag{2ข}$$

$$\cos\theta = \frac{dx}{ds_s} = \frac{1}{(1 + y_s'^2)^{1/2}} \tag{2ค}$$

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds_s} = \frac{y_s''}{(1 + y_s'^2)^{3/2}} \tag{2ง}$$

โดยที่สัญลักษณ์ $(\ )'$ หมายถึงอนุพันธ์ของตัวแปรต่างๆ เทียบกับตัวแปร x (พิกัดตามแนวราบ) สัญลักษณ์ κ คือค่าความโค้งของคาน (Curvature) θ คือมุมระหว่างแนวราบกับแนวสัมผัสของคาน และตัวแปร s_s คือพิกัดตามความยาวส่วนโค้งของคาน จากการพิจารณาสมดุลของแรงและโมเมนต์ของคานในรูปที่ 2 ทำให้ได้สมการสมดุลของคานที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 ซึ่งประกอบด้วยสมการสมดุลของแรงตามแนวสัมผัสและแนวตั้งฉากกับเส้นโค้งการเสียรูปของคาน ดังสมการที่ (3ก) และ (3ข) ตามลำดับ ขณะที่สมการที่ (3ค) คือสมการสมดุลของโมเมนต์รอบจุด *O*

$$\frac{dN_s}{ds_s} = V\frac{d\theta}{ds_s} - w\sin\theta \tag{3ก}$$

$$\frac{dV}{ds_s} = -N_s\frac{d\theta}{ds_s} - w\cos\theta \tag{3ข}$$

$$\frac{dM}{ds_s} = V \tag{3ค}$$

ตัวแปร N_s M และ V คือแรงดึงตามแนวแกน โมเมนต์ดัด และแรงเฉือนที่ตำแหน่งต่างๆของคาน ตามลำดับ จากทฤษฎีความยืดหยุ่น และการเสียรูปของโครงสร้าง สมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและค่าความโค้งของคาน แสดงได้ดังนี้

$$M = -EI\kappa = -EI\frac{y_s''}{(1+y_s'^2)^{3/2}} \tag{4}$$

ในที่นี้ตัวแปร E และ I คือโมดูลัสยืดหยุ่นและโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดคาน ตามลำดับ จากสมการที่ (2ก) และ (4) ทำให้สามารถเขียนสมการสำหรับคำนวณหาค่าแรงเฉือนจากสมการที่ (3ค) ได้ใหม่ดังนี้

$$V = -\frac{EI}{(1+y_s'^2)^{1/2}}\frac{d}{dx}\left[\frac{y_s''}{(1+y_s'^2)^{3/2}}\right] = EI\left[\frac{3y_s'y_s''^2}{(1+y_s'^2)^3} \quad \frac{y_s'''}{(1+y_s'^2)^2}\right] \tag{5}$$

อินทริเกรตสมการที่ (3ก) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของแรงดึงตามแนวแกน และแทนค่าเงื่อนไขขอบเขต ($N_s = N_B$ ที่ตำแหน่งปลายคานด้านขวา $s_s = s_t$) ทำให้สามารถคำนวณหาแรงดึงตามแนวแกนที่พิกัดต่างๆ บนส่วนโค้ง (s_s) ของคานได้ดังนี้

$$N_s = N_B - \int_{s_s}^{s_t}\left(V\frac{d\theta}{ds_s} - w\sin\theta\right)ds_s \tag{6}$$

ในที่นี้ ตัวแปร N_B คือแรงดึงที่ปลายคานด้านขวา (จุด B) แทนค่าสมการที่ (2ก) (2ข) และ (2ง) ลงในสมการที่ (6) และเปลี่ยนตัวแปรอิสระที่ใช้สำหรับการอินทริเกรต ทำให้แรงดึงตามแนวแกนที่พิกัดต่างๆ ตามแนวราบ (x) ภายใต้แรงดึงที่จุดรองรับด้านขวา (N_B) สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$N_s = N_B - \int_x^L\left(V\frac{y_s''}{\left(1+y_s'^2\right)^{3/2}} - w\frac{y_s'}{\sqrt{\left(1+y_s'^2\right)}}\right)\sqrt{\left(1+y_s'^2\right)}dx \tag{7}$$

ทั้งนี้ แรงเฉือน (V) ในสมการที่ (7) สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (5)

3. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

สมการงานและพลังงานของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้น้ำหนักคาน [1] สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\pi = \int_0^L\left\{\frac{1}{2}\frac{EIy_s''^2}{\left(1+y_s'^2\right)^3} + \left(N_s+\lambda\right) - wy_s\right\}\sqrt{1+y_s'^2}\,dx \tag{8}$$

จากสมการที่ (8) พจน์แรกคือพลังงานความเครียดจากการเสียรูปเนื่องจากการดัด (Bending Strain Energy) พจน์ที่ 2 คืองานอันเนื่องจากแรงดึงตามแนวแกนจากสมการที่ (7) และแรงในรูปแบบ Configurational Force ที่เกิดจากการดัดที่ปลายที่สามารถเลื่อนไถลได้ และพจน์สุดท้ายคืองานภายนอกเนื่องจากแรงกระทำจากน้ำหนักคาน ตัวแปร $\lambda = EIy_s''^2 / 2\left(1+y_s'^2\right)^3$ คือตัวคูณที่คำนึงถึงพลังงานส่วนเพิ่มที่เกิดจากการเลื่อนไถลของปลายคานที่จุดรองรับด้านขวา ซึ่งนำเสนอโดยงานวิจัยของ Chucheepsakul และ Huang [1] จากหลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จากนั้นแบ่งคาน

ออกเป็นชิ้นส่วนย่อยเท่าๆ กันตามพิกัดในแนวราบ โดยแต่ละเอลิเมนต์จะยาวเท่ากัน ($l = L/nelem$) ตามพิกัดที่วัดตามแนวราบ (x) โดย $nelem$ คือจำนวนเอลิเมนต์ของคาน ดังนั้นสมการของงานและพลังงานของระบบทั้งหมดหาได้จากการรวมงานและพลังงานของแต่ละเอลิเมนต์ ($\pi = \sum_{k=1}^{nelem} \pi_k$) โดย π_k คืองานและพลังงานของแต่ละเอลิเมนต์ของคาน ดังนั้นค่าการแอ่นตัวภายในเอลิเมนต์ของคานตามสมการที่ (1) สามารถประมาณได้โดยใช้เมตริกซ์ฟังก์ชันรูปร่าง $\lfloor \mathbf{N} \rfloor$ และเวกเตอร์ดีกรีอิสระที่โหนดปลายทั้ง 2 ด้านของแต่ละเอลิเมนต์ $\{\mathbf{q}_s\}$ ดังนี้

$$y_a = \lfloor \mathbf{N} \rfloor \{\mathbf{q}_s\}, \quad y'_a = \lfloor \mathbf{N}' \rfloor \{\mathbf{q}_s\} \tag{9ก-ข}$$

$$y''_a = \lfloor \mathbf{N}'' \rfloor \{\mathbf{q}_s\} \tag{9ค}$$

โดยเวกเตอร์ $\{\mathbf{q}_s\}$ ประกอบด้วยค่าการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งของคาน และค่าอนุพันธ์อันดับที่ 1 และ 2 ของการเคลื่อนที่เทียบกับตัวแปร x

$$\{\mathbf{q}_s\} = \{y_{a1} \quad y'_{a1} \quad y''_{a1} \quad y_{a2} \quad y'_{a2} \quad y''_{a2}\}^T \tag{10}$$

และเวกเตอร์ $\lfloor \mathbf{N} \rfloor$ คือฟังก์ชันการประมาณซึ่งเป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี 5 ดังนี้

$$\lfloor \mathbf{N} \rfloor = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \rfloor \tag{11}$$

เมื่อแทนสมการที่ (9) ลงในสมการที่ (8) สมการสมดุลของคานแต่ละเอลิเมนต์จะสามารถหาได้เมื่อ $\partial \pi_k / \partial \mathbf{q}_s = \mathbf{0}$ (Stationary Condition) ดังนั้นสามารถเขียนสมการไฟไนต์-เอลิเมนต์ของแต่ละชิ้นส่วนย่อยได้ดังนี้

$$\left\{\frac{\partial \pi_k}{\partial \mathbf{q}_s}\right\} = \int_0^l \left\{ \frac{EIy''_s}{\left(1+y'^2_s\right)^{5/2}} \lfloor \mathbf{N}'' \rfloor^T - \frac{5EIy''^2_s y'_s}{2\left(1+y'^2_s\right)^{7/2}} \lfloor \mathbf{N}' \rfloor^T + \frac{\left(N_s + \lambda\right) y'_s}{\sqrt{1+y'^2_s}} \lfloor \mathbf{N}' \rfloor^T - w\sqrt{1+y'^2_s} \lfloor \mathbf{N} \rfloor^T \right\} dx = \{\mathbf{0}\} \tag{12}$$

สมการที่ (12) เป็นระบบสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นของแต่ละเอลิเมนต์ ซึ่งต้องนำสมการของทุกเอลิเมนต์มารวมกัน (Assembly) เพื่อให้ได้สมการของทั้งระบบของคาน การคำนวณเพื่อหารากของระบบสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นได้ใช้กระบวนการทำซ้ำ ตามวิธีของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson) ซึ่งได้กำหนดเงื่อนไขการลู่เข้าของค่าดีกรีอิสระเท่ากับ 10^{-7} สำหรับเงื่อนไขของจุดรองรับที่ปลายทั้ง 2 ข้างของคานคือ $y_a = y''_a = 0$ ที่ $x = 0$ และ $x = L$ ตามลำดับ เพื่อความสะดวกต่อการคำนวณตามหลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ งานวิจัยนี้ได้พัฒนาคอมพิวเตอร์โปรแกรมขึ้นมาโดยเขียนด้วยภาษาฟอร์แทรน 90 เพื่อใช้ในการวิเคราะห์คานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้

4. วิธีการยิงเป้า

สำหรับการศึกษานี้ได้ใช้คำตอบเชิงตัวเลขจากวิธียิงเป้า (SOM) เพื่อนำมาตรวจสอบคำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์-เอลิเมนต์ (FEM) โดยชุดสมการครอบคลุมปัญหาที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 ประกอบด้วย สมการความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของคาน สมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และความโค้งดังแสดงในสมการที่ (2) และสมการสมดุลของแรงและโมเมนต์ดังสมการที่ (3) ซึ่งจัดเป็นปัญหาเงื่อนไขขอบเขตแบบ 2 จุด และเหมาะที่จะหาคำตอบเชิงตัวเลขโดยอาศัยวิธีการยิงเป้าเพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ ตัวแปรต่างๆ ในสมการครอบคลุมปัญหาเหล่านี้จะจัดให้อยู่ในรูปแบบไร้หน่วย ตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$s^* = s_s / s_t \;,\; \hat{s}_t = s_t / L \;,\; \hat{x} = x / L \;,\; \hat{y} = y_s / L \;, \hat{s} = s_s / L \tag{13ก}$$

$$\hat{w} = wL^3 / EI \;,\; \hat{N} = N_s L^2 / EI \;,\; \hat{V} = VL^2 / EI \;,\; \hat{M} = ML / EI \tag{13ข}$$

จากสมการที่ (13) ทำให้สามารถเขียนสมการครอบคลุมปัญหา สมการที่ (2ข)-(2ง) และสมการที่ (3ก)-(3ค) ให้อยู่ในรูปของสมการไร้หน่วย ได้ดังนี้

$$\frac{d\hat{y}}{ds^*} = \hat{s}_t \sin\theta \tag{14ก}$$

$$\frac{d\hat{x}}{ds^*} = \hat{s}_t \cos\theta \tag{14ข}$$

$$\frac{d\theta}{ds^*} = \hat{s}_t \hat{M} \tag{14ค}$$

$$\frac{d\hat{N}}{ds^*} = \hat{V}\frac{d\theta}{ds^*} - \hat{s}_t \hat{w} \sin\theta \tag{14ง}$$

$$\frac{d\hat{V}}{ds^*} = -\hat{N}\frac{d\theta}{ds^*} - \hat{s}_t \hat{w} \cos\theta \tag{14จ}$$

$$\frac{d\hat{M}}{ds^*} = \hat{s}_t \hat{V} \tag{14ฉ}$$

จุดรองรับด้านซ้าย (จุด A) ของคานกำหนดให้อยู่ที่พิกัด $\hat{x} = 0$ และ $\hat{y} = 0$ ขณะที่จุดรองรับด้านขวา (จุด B) ของคานอยู่ที่พิกัด $\hat{x} = 1$ และ $\hat{y} = \hat{y}_B$ เนื่องจากจุดรองรับทั้ง 2 ข้างของคานเป็นแบบยึดหมุน ดังนั้นโมเมนต์ดัด ($\hat{M}$) ที่ปลายทั้ง 2 ข้างของคานเท่ากับศูนย์ อย่างไรก็ดี ค่ามุม (θ) และแรงเฉือน ($\hat{V}$) เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า แรงดึงตามแนวแกน ($\hat{N}$) ที่ปลาย B กำหนดให้เท่ากับ $\hat{N} = \hat{N}_B$ ขณะที่แรงดึงที่ปลายอีกด้านหนึ่งเป็นตัวแปรไม่ทราบค่า ดังนั้นในกระบวนการคำนวณ ค่าเงื่อนไขขอบเขตที่ปลายทั้ง 2 ข้างของคาน ทั้งที่ทราบค่า และไม่ทราบค่าสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบไร้หน่วยดังสมการต่อไปนี้

จุดรองรับ A $(s^* = 0)$; $\hat{x} = 0\,,\; \hat{y} = 0\,,\; \hat{M} = 0\,,\; \theta = \theta_A\,,\; \hat{V} = \hat{V}_A\,,\; \hat{N} = \hat{N}_A$ **(15ก)**

จุดรองรับ B $(s^* = 1)$; $\hat{x} = 1\,,\; \hat{y} = \hat{y}_B\,,\; \hat{M} = 0\,,\; \theta = \theta_B\,,\; \hat{V} = \hat{V}_B\,,\; \hat{N} = \hat{N}_B$ **(15ข)**

กระบวนการหาคำตอบเชิงตัวเลขสามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ดังต่อไปนี้ เริ่มแรกให้กำหนดค่าของตัวแปรควบคุม $\hat{s}_t$ (ความยาวส่วนโค้งของคานไร้หน่วย) และค่าเงื่อนไขขอบเขต ($\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{N}$ และ $\hat{M}$ ที่ $s^* = 1$) จากนั้นประมาณค่าเริ่มต้นของตัวแปรไม่ทราบค่าซึ่งประกอบด้วย θ และ $\hat{V}$ ที่ $s^* = 1$ ให้เท่ากับ θ_B และ $\hat{V}_B$ ตามลำดับ และประมาณค่าน้ำหนักของคานแบบไร้หน่วย ($\hat{w}$) โดยอาศัยทฤษฎีของคานที่แอ่นตัวน้อยแบบเป็นเชิงเส้นเพื่อใช้เป็นค่าเดาเริ่มต้น จากนั้น อินทริเกรตสมการครอบคลุมปัญหาทั้ง 6 สมการ (สมการที่ (14)) ตามพิกัดส่วนโค้งของคานจาก s^* = 1 ถึง s^* = 0 (จากจุด B ถึงจุด A) ด้วยวิธี Cash-Karp Runge-Kutta อันดับที่ 5 โดยควบคุม Step Size ของการอินทริเกรต เพื่อให้ได้คำตอบเชิงตัวเลขที่

มีความถูกต้องแม่นยำเพียงพอ การศึกษานี้ใช้ Step Size เท่ากับ 0.01 [29] จากนั้นใช้กระบวนการกระทำซ้ำ Newton-Raphson เพื่อทำการปรับแก้ค่าเริ่มต้นของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ($\theta_B, \hat{V}_B, \hat{w}$) จนกระทั่งผลลัพธ์ลู่เข้าและสอดคล้องกับเงื่อนไขในสมการที่ (16) โดยกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ (Tolerance) เท่ากับ 10^{-12} [29]

$$\underset{\theta_B, \hat{V}_B, \hat{w}}{\text{Min}}\ \Phi = \left|\hat{x}(0)\right| + \left|\hat{y}(0)\right| + \left|\hat{M}(0)\right| = 0 \tag{16}$$

ขั้นตอนสุดท้ายให้บวกส่วนเพิ่ม $\Delta\hat{s}_t$ เข้ากับค่าตัวแปรควบคุม $\hat{s}_t$ และทำซ้ำกระบวนการดังกล่าวข้างต้นทั้งหมดเพื่อสร้างเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่าง θ_A และ $\hat{w}$ ซึ่งค่าที่มากสุดของ $\hat{w}$ บนเส้นโค้งความสัมพันธ์ดังกล่าว คือค่าน้ำหนักวิกฤตของคาน ($\hat{w}_{cr}$)

5. ผลคำตอบเชิงตัวเลข

เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยนำคำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) มาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากวิธียิงเป้า (SOM) ดังแสดงในตารางที่ 1 และตารางที่ 2 สำหรับคานที่มีจุดรองรับทั้ง 2 อยู่ในระดับเดียวกัน (h / L = 0.0) และอยู่ต่างระดับกัน (h / L = 0.5) ตามลำดับ ซึ่งค่าต่างๆ ที่แสดงในตารางนี้เป็นค่าแบบไร้หน่วยซึ่งคำนวณได้จากสมการที่ (13) การตรวจสอบของตัวอย่างนี้ กำหนดให้น้ำหนักไร้หน่วยของคาน ($\hat{w}$) เท่ากับ 8 ขณะที่ค่าแรงดึงไร้หน่วยที่ปลายด้านขวา ($\hat{N}_B$) มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 8 ประกอบด้วย $\hat{N}_B$ = 0, 2, 4, 6 และ 8 ตามลำดับ คำตอบที่นำมาเปรียบเทียบกันได้แก่ ค่าการแอ่นตัวสูงสุด ($\hat{y}_{max}$) ค่าโมเมนต์ดัดสูงสุด ($\hat{M}_{max}$) ค่าแรงฉือนสูงสุด ($\hat{V}_{max}$) ค่าความยาวส่วนโค้งทั้งหมดของคาน ($\hat{s}_t$) มุมที่จุดรองรับ A (θ_A) และจุดรองรับ B (θ_B) จากการตรวจสอบพบว่าผลคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากทั้ง 2 วิธีนี้มีความถูกต้องและสอดคล้องกันเป็นอย่างดี ทั้งกรณีที่จุดรองรับอยู่ในระดับเดียวกัน (h / L = 0.0) และอยู่ต่างระดับกัน (h / L = 0.5)

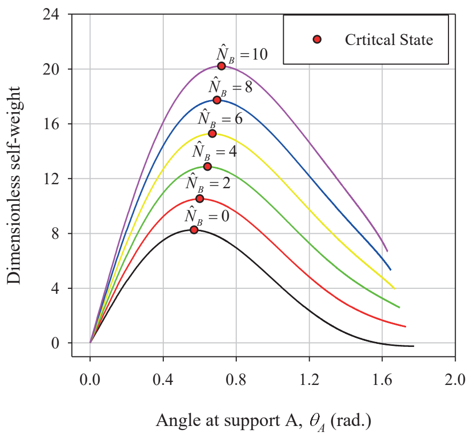
ตารางที่ 1 เปรียบเทียบผลคำตอบเชิงตัวเลขสำหรับกรณีที่จุดรองรับของคานอยู่ในระดับเดียวกัน (h / L = 0.0) ภายใต้น้ำหนักบรรทุก ($\hat{w}$ = 8.00)

$\hat{N}_B$	θ_A (-θ_B)		$\hat{y}_{max}$		$\hat{M}_{max}$		$\hat{V}_{max}$		$\hat{s}_t$	
	FEM	SOM	FEM	SOM	FEM	SOM	FEM	SOM	FEM	SOM
0	0.46764	0.46746	0.15177	0.15171	1.35551	1.35521	4.73301	4.73129	1.05597	1.05593
2	0.32008	0.32007	0.10149	0.10149	0.93871	0.93874	3.65840	3.65801	1.02537	1.02537
4	0.25969	0.25969	0.08159	0.08159	0.75993	0.75995	3.14446	3.14425	1.01648	1.01648
6	0.22134	0.22134	0.06911	0.06912	0.64471	0.64473	2.79864	2.79851	1.01187	1.01187
8	0.19391	0.19391	0.06026	0.06026	0.56170	0.56171	2.54235	2.54227	1.00904	1.00904

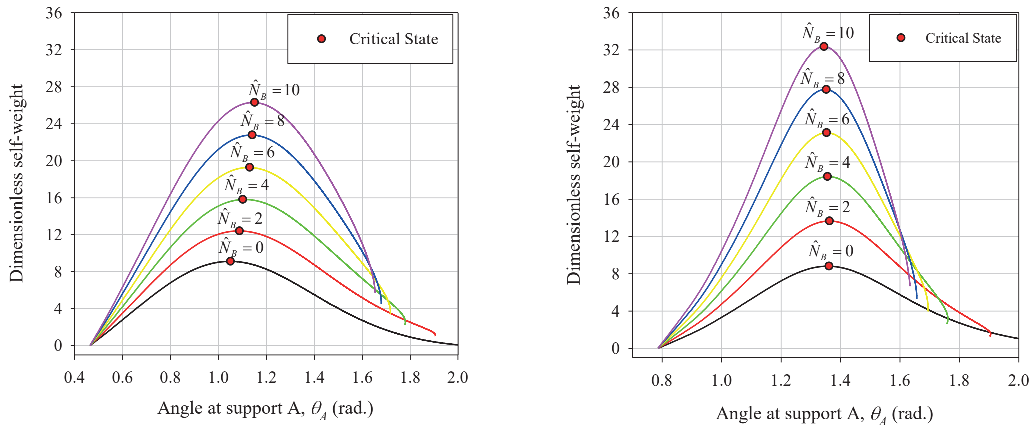
ตารางที่ 2 เปรียบเทียบผลคำตอบเชิงตัวเลขสำหรับกรณีที่จุดรองรับของคานอยู่ต่างระดับกัน (h/L = 0.5) ภายใต้น้ำหนักบรรทุก ($\hat{w}$ = 8.00)

$\hat{N}_B$	θ_A		θ_B		$\hat{M}_{max}$		$\hat{V}_{max}$		$\hat{s}_t$	
	FEM	SOM	FEM	SOM	FEM	SOM	FEM	SOM	FEM	SOM
0	0.01971	0.01967	0.87862	0.87858	1.11787	1.11804	-4.23402	-4.23457	1.17008	1.17008
2	0.76954	0.76949	0.13939	0.13936	0.82258	0.82281	-3.37801	-3.37868	1.14531	1.14531
4	0.71499	0.71496	0.19848	0.19846	0.67121	0.67128	-2.90887	-2.90944	1.13612	1.13612
6	0.67916	0.67914	0.23708	0.23706	0.57074	0.57088	-2.58750	-2.58801	1.13115	1.13115
8	0.65315	0.65314	0.26498	0.26497	0.49755	0.49778	-2.34797	-2.34845	1.12807	1.12807

สำหรับการศึกษาพารามิเตอร์ต่างๆ ที่มีผลต่อการแอ่นตัวมากของคานที่ความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ ค่าแรงดึงที่จุดรองรับ B กำหนดให้อยู่ในช่วงตั้งแต่ 0 ถึง 10 ค่าความต่างระดับของจุดรองรับทั้ง 2 ข้างของคาน (h/L) อยู่ในช่วงตั้งแต่ -1.0 ถึง 1.0 ซึ่งประกอบด้วย h/L = -0.5, 0.0, 0.5 และ 1.0 ตามลำดับ เส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกและการเคลื่อนที่ซึ่งพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักคาน ($\hat{w}$) และมุมที่จุดรองรับ A (θ_A) สำหรับคานที่มีจุดรองรับทั้ง 2 ข้างอยู่ในระดับเดียวกัน (h/L = 0.0) อยู่ต่างระดับกันโดยลดระดับจุดรองรับ B ลง (h/L > 0.0) และอยู่ต่างระดับกันโดยยกจุดรองรับ B ขึ้น (h/L < 0.0) ดังแสดงในรูปที่ 3-5 ตามลำดับ เสถียรภาพของคานสามารถตรวจสอบได้จากรูปดังกล่าวนี้ โดยใช้วิธีการสังเกตุเครื่องหมายของสติฟเนสของคานจากเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรรทุกและการเสียรูป โดยหากเครื่องหมายของสติฟเนสมีค่าเป็นบวก ศูนย์ และ ลบ หมายถึงสภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพ วิกฤต และไร้เสถียรภาพ ตามลำดับ จากรูปแสดงให้เห็นว่า ที่สภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพ (Stable Equilibrium) ค่า θ_A จะเพิ่มขึ้นเมื่อค่า $\hat{w}$ เพิ่มมากขึ้นจนกระทั่งถึงค่าสูงสุดของ $\hat{w}$ ซึ่งเรียกว่าค่าน้ำหนักวิกฤตของคาน ($\hat{w}_{cri}$) ที่จุดสูงสุดนี้คือ “สภาวะวิกฤต” (Critical State) ของคาน หลักจากเกิดสภาวะวิกฤตแล้ว ค่า $\hat{w}$ ไม่สามารถเพิ่มขึ้นได้อีกต่อไป และภายหลังการเกิดสภาวะวิกฤต เมื่อค่าของมุม θ_A เพิ่มขึ้นค่าน้ำหนักบรรทุกมีค่าลดลงอย่างต่อเนื่อง (ค่าสติฟเนสเป็นลบ) สภาวะเช่นนี้เรียกว่า “สมดุลแบบไม่มีเสถียรภาพ” (Unstable Equilibrium)

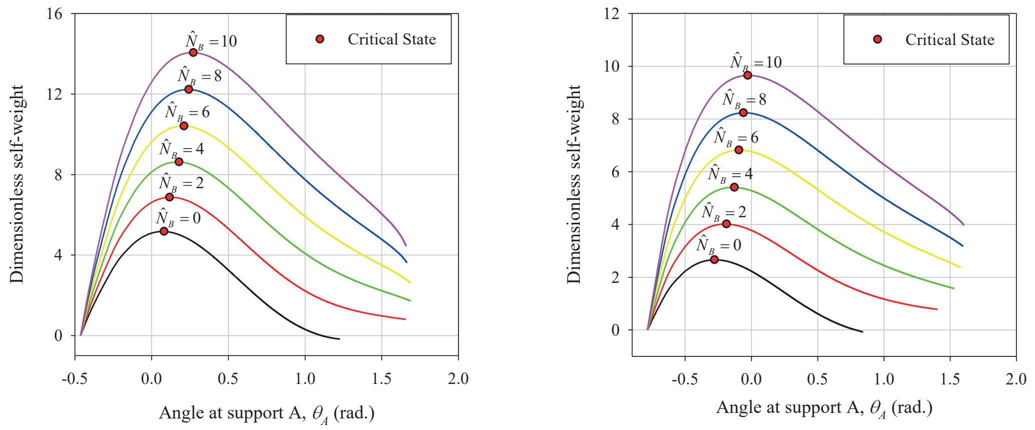


รูปที่ 3 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\hat{w}$ และ θ_A ของคานที่มีจุดรองรับอยู่ในระดับเดียวกัน (h/L = 0.0) สำหรับค่า $\hat{N}_B$ ต่างๆ



(ก) h/L = 0.5 (ข) h/L = 1.0

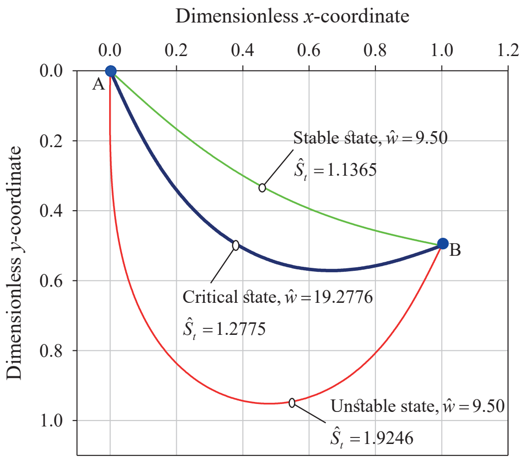
รูปที่ 4 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\hat{w}$ และ θ_A ของคานที่ลดระดับจุดรองรับด้านขวาลง ($h/L > 0.0$) สำหรับค่า $\hat{N}_B$ ต่างๆ



(ก) h/L = -0.5 (ข) h/L = -1.0

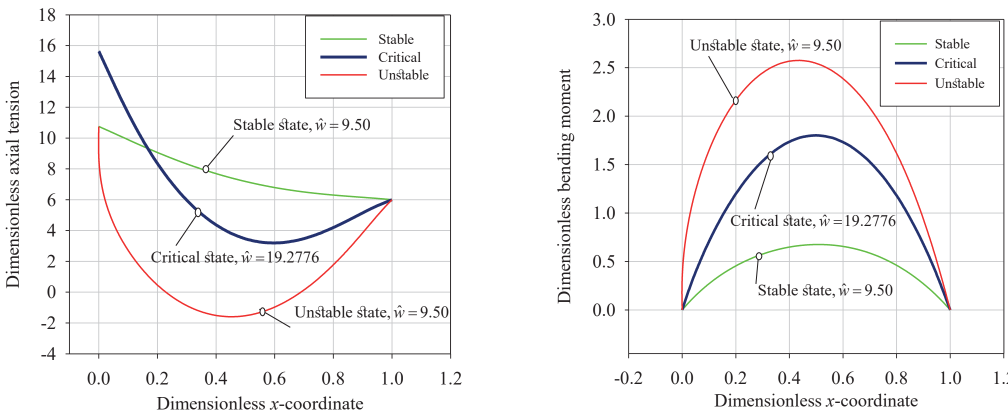
รูปที่ 5 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\hat{w}$ และ θ_A ของคานที่ยกระดับจุดรองรับด้านขวาขึ้น ($h/L < 0.0$) สำหรับค่า $\hat{N}_B$ ต่างๆ

เมื่อพิจารณาที่ค่า $\hat{N}_B$ = 6.0 และค่า h/L = 0.5 รูปร่างการแอ่นตัวของคานต่างละดับที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้แสดงในรูปที่ 6 ทั้งรูปร่างการแอ่นตัวที่สภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพ (Stable) แบบวิกฤต (Critical) และแบบไม่มีเสถียรภาพ (Unstable) สำหรับรูปร่างการแอ่นตัวของคานที่สภาวะวิกฤต คานจะรับน้ำหนักวิกฤตเท่ากับ $\hat{w}_{cri}$ = 19.27756 อย่างไรก็ดี ถ้าน้ำหนักบรรทุกน้อยกว่าน้ำหนักวิกฤต ($\hat{w} < \hat{w}_{cri}$) ยกตัวอย่างเช่น $\hat{w}$ = 9.5 จะทำให้เกิดรูปร่างการแอ่นตัวได้ 2 รูปแบบ ได้แก่ รูปร่างที่มีการแอ่นตัวที่น้อยกว่าคือสภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพ และรูปร่างที่มีการแอ่นตัวที่มากกว่าคือสภาวะสมดุลแบบไม่มีเสถียรภาพ ดังแสดงในรูปที่ 6



รูปที่ 6 รูปร่างการแอ่นตัวที่สภาวะสมดุลต่างๆ ของคานที่ลดระดับจุดรองรับด้านขวาลง h/L = 0.5 และ $\hat{N}_B$ = 6.0

จากรูปแบบการแอ่นตัวของคานที่สภาวะสมดุลทั้ง 3 แบบ ในรูปที่ 6 ค่าแรงดึงตามแนวแกนไร้หน่วยและค่าโมเมนต์ดัดไร้หน่วย ที่ตำแหน่งต่างๆ ตามแนวราบของคานได้แสดงในรูปที่ 7(ก) และ 7(ข) ตามลำดับ ซึ่งแสดงทั้งสภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพ ไร้เสถียรภาพ และสภาวะวิกฤต จากรูปที่ 7(ก) ค่าแรงดึงที่จุดรองรับ B (ด้านขวา) ของสภาวะสมดุลทั้ง 3 รูปแบบมีค่าเท่ากัน เนื่องจากกำหนดแรงดึงที่ด้านขวาให้เท่ากันตั้งแต่แรก อย่างไรก็ดี แรงดึงตามแนวแกนระหว่างจุดรองรับของแต่ละสภาวะจะไม่เท่ากัน แต่ทว่า แรงดึงที่จุดรองรับ A (ด้านซ้าย) ณ สภาวะสมดุลแบบมีเสถียรภาพเท่ากับสภาวะสมดุลแบบไม่มีเสถียรภาพเนื่องจากน้ำหนักกระทำทั้ง 2 สภาวะนี้เท่ากัน ($\hat{w}$ = 9.5) จากรูปที่ 7(ข) โมเมนต์ดัดที่สภาวะสมดุลต่างๆ จะแตกต่างกันโดยสิ้นเชิง ซึ่งสอดคล้องกับการแอ่นตัวของคาน ที่สภาวะสมดุลแบบไม่มีเสถียรภาพ คานเกิดการแอ่นตัวมากที่สุดส่งผลให้เกิดโมเมนต์ดัดสูงกว่าสภาวะสมดุลอื่น

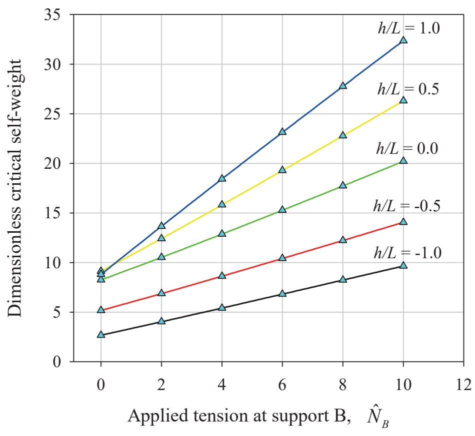


รูปที่ 7 แรงภายในที่สภาวะสมดุลต่างๆ ของคานเมื่อลดระดับจุดรองรับด้านขวาลง h/L = 0.5 และ $\hat{N}_B$ = 6.0

น้ำหนักวิกฤตของคาน ($\hat{w}_{cri}$) เนื่องจากผลกระทบของแรงดึงที่จุดรองรับ B ($\hat{N}_B$) และค่าระดับตามแนวดิ่งของจุดรองรับ B (h / L) แสดงในรูปที่ 8 และผลคำตอบเชิงตัวเลขของ $\hat{w}_{cri}$ แสดงในตารางที่ 3 สำหรับกรณีที่ $\hat{N}_B$ = 0 พบว่าค่าน้ำหนักวิกฤตของคานเท่ากับ $\hat{w}_{cri}$ = 8.25298, 2.66360 และ 8.80873 เมื่อ h / L = 0, -1.0 และ 1.0 ตามลำดับ ซึ่งค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตนี้สอดคล้องกับผลงานวิจัยของ Athisakul และ Chucheepsakul [12] อย่างไรก็ดี เมื่อคานได้รับแรงดึงที่จุดรองรับ B ($\hat{N}_B$ > 0) ผลคำตอบเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่า ผลของแรงดึงที่ปลายคาน ($\hat{N}_B$) ทำให้น้ำหนักวิกฤตของคานเพิ่มขึ้น สำหรับผลกระทบจากความต่างระดับของจุดรองรับทั้ง 2 ข้าง (h / L) ผลคำตอบเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่า การลดระดับของจุดรองรับด้านขวาลงช่วยเพิ่มสติฟเนสให้คานและทำให้ค่า $\hat{w}_{cri}$ เพิ่มขึ้น ในทางตรงกันข้ามค่า $\hat{w}_{cri}$ จะลดลงเมื่อยกระดับของจุดรองรับ B ขึ้น [12] นอกจากนั้นผลการศึกษาพบว่า ค่าความต่างระดับของจุดรองรับทั้ง 2 ข้างทำให้ค่าความยาวส่วนโค้งที่สภาวะวิกฤตของคานเปลี่ยนแปลง และส่งผลให้เส้นกราฟความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักวิกฤตและแรงดึงที่ปลายมีความชันที่แตกต่างกันดังแสดงในรูปที่ 8

ตารางที่ 3 น้ำหนักวิกฤตของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ (VAL Beam) และมีจุดรองรับต่างระดับ (h / L) ภายใต้แรงดึงที่จุดรองรับ B

$\hat{N}_B$	น้ำหนักวิกฤตของคาน ($\hat{w}_{cri}$)				
	h / L = -1.0	h / L = -0.5	h / L = 0.0	h / L = 0.5	h / L = 1.0
0	2.66360	5.17197	8.25298	9.12237	8.80873
2	4.01910	6.87157	10.52264	12.41394	13.65632
4	5.41125	8.62371	12.86973	15.81466	18.42518
6	6.82003	10.41185	15.27489	19.27756	23.12103
8	8.23559	12.22515	17.72431	22.77671	27.76229
10	9.65308	14.05631	20.20796	26.29759	32.36303



รูปที่ 8 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักวิกฤต ($\hat{w}_{cri}$) และแรงดึงที่จุดรองรับ B ($\hat{N}_B$) สำหรับค่า h / L ต่างๆ

6. สรุป

บทความวิจัยนี้นำเสนอผลกระทบของแรงดึงที่จุดรองรับต่อการแอ่นตัวมากของคานที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้และมีจุดรองรับทั้ง 2 ด้านที่มีระดับต่างกัน แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของคานที่พัฒนาขึ้นมาได้ใช้ 2 วิธีที่ต่างกัน วิธีแรกใช้หลักการสมดุลของแรงและโมเมนต์ของชิ้นส่วนย่อยของคานซึ่งทำให้ได้เซตของสมการครอบคลุมปัญหาที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 เซตของสมการดังกล่าวนี้ สามารถหาคำตอบเชิงตัวเลขได้ด้วยระเบียบวิธียิงเป้า วิธีที่ 2 ใช้หลักการของงาน-พลังงาน เพื่อสร้างสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของสมการอินทริกรัล ซึ่งอาศัยระเบียบวิธีไฟไนต์-เอลิเมนต์ในการหาคำตอบเชิงตัวเลข การเปรียบเทียบคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จาก 2 วิธีนี้มีความสอดคล้องกัน ผลกระทบของแรงดึงที่ปลายและความต่างระดับของจุดรองรับต่อการแอ่นตัวของคานได้ถูกนำเสนอ การตรวจสอบเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าแรงดึงที่ปลายคานและการลดระดับของจุดรองรับด้านขวาลงช่วยเพิ่มสติฟเนสให้คาน และเพิ่มน้ำหนักบรรทุกวิกฤตรวมถึงเสถียรภาพของคานด้วย อย่างไรก็ดี คานจะสูญเสียเสถียรภาพเมื่อยกจุดรองรับด้านขวาของคานขึ้น เพราะทำให้น้ำหนักบรรทุกวิกฤตของคานลดลง แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของคานที่ได้รับการพัฒนาขึ้นมา สามารถประยุกต์และพัฒนาต่อยอดเพื่อใช้สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างอื่นๆ ที่มีความคล้ายคลึงกัน ได้แก่ 1) ท่อลำเลียงของไหลใต้ทะเล โดยการจำลองแรงจากคลื่นและกระแสน้ำเพิ่มเข้าไป และ 2) ประยุกต์ใช้สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างประเภทเคเบิล โดยการตัดพจน์ของสติฟเนสต้านการดัดออก เป็นต้น

7. กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยใคร่ขอขอบคุณสำนักกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.) และสำนักงานคณะกรรมการอุดมศึกษา (สกอ.) สำหรับทุนสนับสนุนโครงการพัฒนาศักยภาพการทำวิจัยของอาจารย์รุ่นใหม่ (สัญญาเลขที่ MRG6280051) ที่ทำให้งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

8. เอกสารอ้างอิง

1. Chucheepsakul, S. and Huang, T., 1992, "Finite Element Solution of Large Deflection Analysis of a Class of Beams," *Proceedings of Computer Methods in Engineering: Advance and Applications*, 1, pp. 45-50.

2. Pulngern, T., Halling, M.W. and Chucheepsakul, S., 2005, "Large Deflection of Variable-arc-length Beams under Uniform Self-weight: Analytical and Experimental," *Journal of Structural Engineering Mechanics*, 19, pp. 413-423.

3. Chucheepsakul, S., Buncharoen, S. and Wang, C.M., 1994, "Large Deflection of Beams under Moment Gradient," *Journal of Engineering Mechanics*, 120, pp. 1848-1860.

4. Chucheepsakul, S., Thepphitak, G. and Wang, C.M., 1996, "Large Deflection of Simple Variable-Arc-Length Beam Subjected to a Point Load," *Journal of Structural Engineering Mechanics*, 4 (1), pp. 49-59.

5. Pulngern, T., Sudsanguan, T., Athisakul, C. and Chucheepsakul, S., 2013, "Elastica of a Variable-Arc-Length Circular Curved Beam Subjected to an End Follower Force," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 49, pp. 129-136.

6. Phungpaingam, B. and Chucheepsakul, S., 2018, "Postbuckling Behavior of Variable-Arc-Length Elastica Connected with a Rotational Spring Joint Including the Effect of Configurational Force," *Meccanica*, 53 (10), pp. 2619-2636.

7. Liakou, A. and Detournay, E., 2018. "Constrained Buckling of Variable Length Elastica: Solution by Geometrical Segmentation," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 99, pp. 204-217.

8. Humer, A. and Irschik, H., 2011, "Large Deformation and Stability of an Extensible Elastica with an Unknown Length," *International Journal of Solids and Structures*, pp. 481301-1310.

9. Thongyothee, C. and Chucheepsakul, S., 2015, "Postbuckling of Unknown-Length Nanobeam Considering the Effects of Nonlocal Elasticity and Surface Stress," *International Journal of Applied Mechanics,*

7 (3), pp. 1550042.

10. Chucheepsakul, S. and Huang, T., 1997, "Finite Element Solution of Variable-Arc-Length Beams under a Point Load," *Journal of Structural Engineering*, 123 (7), pp. 968-970.

11. Chucheepsakul, S. and Phungpaingam, B., 2004, "Elliptic Integral Solution of Variable-Arc-Length Elastica under an Inclined Follower Force," *Zeitschriftfur Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*, 84, pp. 29-38.

12. Athisakul, C. and Chucheepsakul, S., 2008, "Effect of Inclination on Bending of Variable-Arc-Length-Beams Subjected to Uniform Self-Weight," *Engineering Structure*, 30, pp. 902-908.

13. Plaut, R.H., Dillard, D.A. and Borum, A.D., 2011, "Collapse of Heavy Cantilevered Elastic with Frictional Internal Support," *Journal of Applied Mechanics*, 78, pp. 041011.

14. Wang, C.M., Lam, K.Y., He, X.Q. and Chucheepsakul, S., 1997, "Large Deflections of an End Supported Beam Subjected to a Point *Load," International Journal of Nonlinear Mechanics*, 32, pp. 63-72.

15. Zhang, X. and Yang, J., 2005, "Inverse Problem of Elastica of a Variable-Arc-Length Beam Subjected to a Concentrated Load," *Acta Mechanica Sinica*, 21, pp. 444-450.

16. Chucheepsakul, S., Buncharoen, S. and Huang, T., 1995, "Elastica of Simple Variable-Arc-Length Beam Subjected to End Moment," *Journal of Engineering Mechanics*, 121, pp. 767-772.

17. Chucheepsakul, S., Thepphitak, G. and Wang, C.M., 1997, "Exact Solution of Variable-Arc-Length Elasticas under Moment Gradient," *Journal of Structural Engineering Mechanics*, pp. 529-539.

18. Chucheepsakul, S., Wang, C.M. and He, X.Q., 1999, "Double Curvature Bending of Variable-Arc-Length Elastica," *Journal of Applied Mechanics*, 66 (1), pp. 87-97.

19. Phungpaingam, B., Athisakul, C. and Chucheepsakul, S., 2012, "Instability of Variable-Arc-Length Elastica Subjected to End Moment," *IES Journal Part A: Civil and Structural Engineering*, 5 (2), pp. 85-89.

20. Wang, C.M., Lam, K.Y. and He, X.Q., 1998, "Instability of Variable-Arc-Length Elastica under Follower Force," *Mechanics Research Communications*, 25, pp. 189-194.

21. Hartono, W., 2000, "Behavior of Variable Length Elastica with Frictional Support under Follower Force," *Mechanics Research Communications*, 27, pp. 635-658.

22. Chucheepsakul, S. and Monprapussorn, T., 2000, "Divergence Instability of Variable-Arc-Length Elastica Pipes Transporting Fluid," *Journal of Fluids and Structures*, 14, pp. 895-916.

23. Chen, J.S. and Ro, W.C., 2010, "Deformations and Stability of an Elastica Subjected to an Off-Axis Point Constraint," *Journal of Applied Mechanics*, 77, pp. 031006.

24. Phungpaingam, B., Chucheepsakul, S. and Wang, C.M., 2006, "Postbuckling of Beam Subjected to Intermediate Follower Force," *Journal of Engineering Mechanics*, 132 (1), pp. 16-25.

25. Pulngern, T., Chucheepsakul, S. and Halling, M.W., 2004, "Analytical and Experimental Studies on Free Vibration of Variable-Arc-Length Beams," *The 2nd International Conference on Structural Engineering, Mechanics, and Computations*, pp. 473-478.

26. Pulngern, T., Chucheepsakul, S. and Halling, M.W., 2005, "Analytical and Experimental Studies on the Large Amplitude Free Vibrations of Variable-Arc-length Beams," *JVC/Journal of Vibration and Control*, 11 (7), pp. 923-947.

27. Klaycham, K., Athisakul, C. and Chucheepsakul, S., 2014, "Finite Element Method for Critical Top Tension Analysis of Neutrally Buoyant Riser," *KMUTT*

Research and Development, 37 (4), pp. 429-446. (In Thai)

28. Yosamornsoontorn, A., Athisakul, C., Chucheepsakul, S. and Klaycham, K., 2019, "Free Vibration of Hang-off Riser," *KMUTT Research and Development*, 42 (1), pp. 69-93. (In Thai)

29. Athisakul, C., Klaycham, K. and Chucheepsakul, S., 2014, "Critical Top Tension for Static Equilibrium Configuration of a Steel Catenary Riser," *China Ocean Engineering*, 28 (6), pp. 829-842.