พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของ Elastica ที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้โดยมีสปริงต้านทานการหมุนแบบอิลาสติก-พลาสติกภายในช่วงความยาวของ Elastica

ณัฐพัชร์ จันทรกุลมณี[1] บุญชัย ผึ้งไผ่งาม[2*] และ กำธรเกียรติ มุสิเกต[2]
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ต.คลองหก อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12110

** Corresponding Author: boonchai_p@rmutt.ac.th*
[1] นักศึกษาปริญญาโท ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์
[2] ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์

ข้อมูลบทความ

ประวัติบทความ :
รับเพื่อพิจารณา : 23 มกราคม 2563
แก้ไข : 1 มิถุนายน 2563
ตอบรับ : 4 มิถุนายน 2563

คำสำคัญ :
Elastica / หลังการโก่งเดาะ / Shooting Method / อิลาสติก-พลาสติก / สปริงต้านทานการหมุน

บทคัดย่อ

บทความนี้รายงานการศึกษาพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของ Elastica ที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ที่เชื่อมต่อกันด้วยสปริงต้านทานการหมุน โดยสปริงต้านทานการหมุนมีทั้งหมดสามแบบ ได้แก่ ยืดหยุ่นเชิงเส้น ยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ และอิลาสติก-พลาสติก ปลายด้านหนึ่งของ Elastica ยึดติดกับจุดรองรับแบบหมุนได้อย่างอิสระปลายอีกด้านวางอยู่บนจุดรองรับแบบรางเลื่อนในแนวราบ สปริงต้านทานการหมุนวางห่างจากจุดรองรับแบบหมุนได้อย่างอิสระตามระยะที่กำหนด แรงอัดกระทำที่ปลายด้านจุดรองรับแบบรางเลื่อนในแนวราบเพื่อดันความยาวส่วนโค้งของ Elastica เข้าไปในระบบและสังเกตพฤติกรรมหลังการโก่งเดาะได้ชุดของสมการอนุพันธ์ครอบคลุมปัญหาสามารถหาได้จากสมการสมดุล ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และความโค้ง และความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิต เนื่องจากปัญหานี้เป็นปัญหาแบบขอบเขตสองจุดจึงใช้วิธี Shooting Method ในการศึกษา การคำนวณผลเฉลยใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบ Runge-Kutta จนกระทั่งสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต จากผลการคำนวณ พบว่า Elastica อยู่ในสภาวะไร้เสถียรภาพหลังการโก่งเดาะ และเมื่อสปริงต้านทานการหมุนเกิดการคราก แรงอัดอาจลดลงอย่างทันที ซึ่งขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของสติฟเนส $r = \overline{k}_2 / \overline{k}_1$ และ Elastica สามารถเปลี่ยนกลับมาอยู่ในสภาวะที่มีเสถียรภาพได้ในช่วงใดช่วงหนึ่งของความยาวส่วนโค้งทั้งหมด นอกจากนั้น ยังพบว่าสามารถเกิดการหมุนกลับด้านของสปริงต้านทานการหมุนได้ซึ่งเป็นอีกประเด็นหนึ่งที่น่าสนใจ

Postbuckling Behavior of Variable-Arc-Length Elastica Linked with Elastic-Plastic Rotational Spring Joint within the Span-Length of the Elastica

Nattaphat Chantarakunmanee[1], Boonchai Phungpaingam[2*] and Kamtornkiat Musiket[2]
Rajamangala University of Technology Thanyaburi, Klong 6, Thanyaburi, Pathumthani, 12110

** Corresponding Author: boonchai_p@rmutt.ac.th*
[1] Graduate Student, Department of Civil Engineering.
[2] Assistant Professor, Department of Civil Engineering.

Article Info

Article History:
Received: January 23, 2020
Revised: June 1, 2020
Accepted: June 4, 2020

Keywords:
Elastica / Postbuckling / Shooting Method / Elastic-Plastic / Rotational Spring Joint

Abstract

This paper reports the investigation on postbuckling behavior of a variable-arc-length elastica connected with a rotational spring joint where three types of the spring joint (i.e., linear elastic, bilinear elastic, and elastic-plastic) were considered. One end of the elastica was attached on the hinged joint while the remote end was placed on the horizontal slider support. The rotational spring joint was located at a given distance apart from the hinged joint. Compression force was exerted at the horizontal slider support to push the arc-length into the system; the postbuckling behavior was then observed. A set of governing differential equations were obtained from the equilibrium equations, moment-curvature relation and geometric relations. Since this problem is a two-point boundary value problem, the shooting method was employed in this study. Numerical integration (i.e., Runge-Kutta method) was performed so that the boundary conditions were satisfied. It was found that the elastica became unstable after buckling and, after yielding of the spring joint, the compression might drop suddenly, depending on the ratio of the stiffness, $r = \bar{k}_2 / \bar{k}_1$. The elastica could turn into stable equilibrium for an interval of total arc-length. Moreover, reverse rotation of the spring joint could occur, representing another interesting aspect of the problem.

1. บทนำ

โครงสร้างหรือชิ้นส่วนอาทิ เช่น สายเคเบิล ท่อลำเลียงของไหล เป็นต้น สามารถเกิดการแอ่นตัวได้มากในขณะที่ความเครียดมีค่าน้อย ทั้งนี้ เนื่องจากโครงสร้างดังกล่าวมีความชะลูด (Slenderness) สูงมาก ซึ่งทำให้ไม่สามารถใช้ทฤษฎีคานแบบ Euler-Bernoulli (ใช้สำหรับกรณีการโก่งตัวมีค่าน้อย) ในการแก้ไขปัญหาได้ ปัญหาในลักษณะที่เกี่ยวข้องกับรูปร่างสมดุลของเส้นโค้งที่โก่งตัวมากและความเครียดมีค่าน้อยเส้นโค้งดังกล่าวเรียกว่า Elastica ซึ่งสามารถใช้ทฤษฎี Elastica ในการแก้ไขปัญหาได้ การศึกษาพฤติกรรมของ Elastica เกิดขึ้นอย่างแพร่หลายและต่อเนื่อง โดยอาจแบ่งการศึกษาพฤติกรรม Elastica ได้สองรูปแบบคือ Elastica ที่มีความยาวคงที่ (Constant Length Elastica) และ Elastica ที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ (Variable-Arc-Length Elastica หรือเรียกโดยย่อว่า VAL Elastica) ลักษณะพิเศษของ VAL Elastica คือปลายด้านหนึ่งอนุญาตให้ความยาวส่วนโค้งสามารถเลื่อนไถลเข้ามาในระบบได้ในขณะที่ความยาวช่วง (Span-Length) มีค่าคงที่ เป็นผลให้ความยาวส่วนโค้งทั้งหมดภายหลังการโก่งเดาะมีความยาวที่เปลี่ยนแปลงไปแบบจำลองแบบ VAL Elastica ได้นำไปประยุกต์ใช้กับการศึกษาพฤติกรรมของท่อลำเลียงของไหลใต้มหาสมุทรซึ่งปลายด้านหนึ่งของท่อยึดอยู่กับหลุมเจาะในขณะที่ปลายด้านหนึ่งที่อยู่บนเรือเดินสมุทรสามารถปล่อยความยาวของท่อลำเลียงให้เพิ่มขึ้นได้ Elastica ทั้งสองแบบนี้มีพฤติกรรมที่แตกต่างกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อถูกกระทำโดยแรงอัดตามแนวแกน (Compression) Elastica ที่มีความยาวคงที่ภายใต้แรงอัดแสดงพฤติกรรมแบบมีเสถียรภาพ (Stable) หลังการโก่งเดาะ [1-4] ในขณะที่ Elastica ที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ภายใต้แรงอัดแบบเดียวกันแสดงพฤติกรรมแบบไร้เสถียรภาพ (Unstable) หลังการโก่งเดาะ [5, 6] ซึ่ง Elastica ที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้นิยมนำไปใช้ในแบบจำลองของท่อลำเลียงใต้ทะเล (Marine Risers) [7] โดยความยาวส่วนโค้งของ Elastica สามารถเพิ่มขึ้นได้เป็นผลให้สติฟเนสการดัดลดลง ดังนั้นเมื่อความยาวส่วนโค้งเพิ่มขึ้นทำให้เกิดสภาวะสมดุลที่ไร้เสถียรภาพภายหลังการโก่งเดาะ โดยความยาวส่วนโค้งที่เพิ่มขึ้นทำให้มีโอกาสที่เกิดการหักงอของท่อลำเลียงได้ ซึ่งในงานวิจัยของ Phungpaingam และ Chucheepsakul [6] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมของ Elastica ที่มีสปริงต้านทานการหมุนภายในช่วงความยาวของ Elastica โดยใช้สปริงต้านทานการหมุนแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นเป็นแบบจำลองการหักงอของ Elastica การศึกษาดังกล่าวเป็นการศึกษาพฤติกรรมของ Elastica สองชิ้นส่วนที่เชื่อมต่อกันด้วยสปริงต้านทานการหมุนแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น และเป็นการศึกษาพฤติกรรมที่ส่งผลกระทบต่อกัน (Interaction) ของ Elastica สองชิ้นส่วนซึ่งมีงานวิจัยที่ค่อนข้างจำกัด อีกตัวอย่างหนึ่งของการศึกษา Elastica สองชิ้นส่วนที่เชื่อมต่อกันด้วยสปริงต้านทานการหมุนคือ Dado และคณะ [8] ซึ่งได้ศึกษาพฤติกรรมของ Elastica ที่เป็นเสายื่น (Cantilever Column) ที่เชื่อมต่อกันด้วยสปริงต้านทานการหมุนแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น ซึ่งเป็นการศึกษาในส่วนของ Elastica ที่มีความยาวคงที่ แต่อย่างไรก็ตามงานวิจัยทั้งสองชิ้นนี้ [6, 8] ยังไม่ได้ศึกษาถึงผลกระทบของลักษณะรูปแบบของสปริงต้านทานการหมุนแบบอื่นๆ จึงเป็นประเด็นที่น่าสนใจสำหรับการศึกษาในบทความนี้

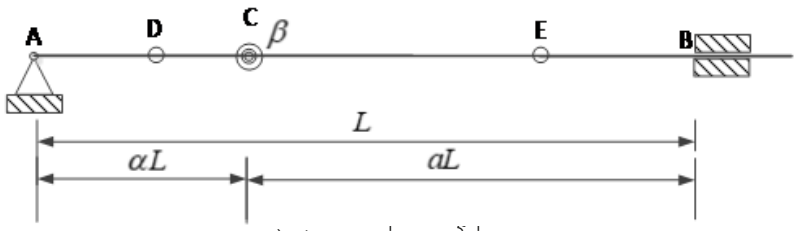
เนื่องจากสปริงต้านทานการหมุนนี้อาจเกิดขนาดของมุมหมุนที่มีขนาดมากได้ในกรณีที่สปริงมีค่าสติฟ-เนสที่ค่อนข้างน้อย ทำให้มีโอกาสเกิดสภาพของพฤติกรรมของจุดหมุนที่เป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ (Bilinear Elastic Behavior) หรือ เป็นแบบอิลาสติก-พลาสติก (Elastic-Plastic Behavior) ได้ ซึ่งในอดีตที่ผ่านมามีบทความที่เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมภายใต้สภาวะที่ชิ้นส่วนของ Elastica เกิดสภาพที่เป็นอิลาสติก-พลาสติกมาแล้ว เช่นในงานวิจัยของ [9-11] และเมื่อไม่นานมานี้ในปี คศ. 2016 Pandit และ Srinivasan [12] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมการแอ่นตัวมากของคานโค้งที่พิจารณาผลกระทบของวัสดุที่เป็นแบบอิลาสโต-พลาสติก (Elasto-Plastic) ภายใต้แรงกระทำที่ติดตามการเสียรูปของคาน โดยจะเห็นได้ว่าในงานวิจัยของ [9-12] มุมลาดเอียงของคานเพิ่มขึ้นในทิศทางเดียว พฤติกรรมการหมุนของหน้าตัดจึงเป็นการหมุนไปในทิศทางเดียว แต่ในบทความนี้มุมหมุนของสปริงต้านทานการหมุนอาจมีการเพิ่มขึ้น และลดลง (หมุนกลับด้าน) ในขณะที่ความความยาวส่วนโค้งของ Elastica จะเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องซึ่งเป็นประเด็นที่น่าศึกษาถึงผลกระทบที่มีต่อพฤติกรรมของ Elastica

ในบทความนี้ใช้กระบวนการเชิงตัวเลขในการคำนวณหาผลเฉลย โดยสร้างระบบสมการอนุพันธ์ครอบคลุมปัญหาจากสมการสมดุลของของ Elastica ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และความโค้ง และความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของ Elastica

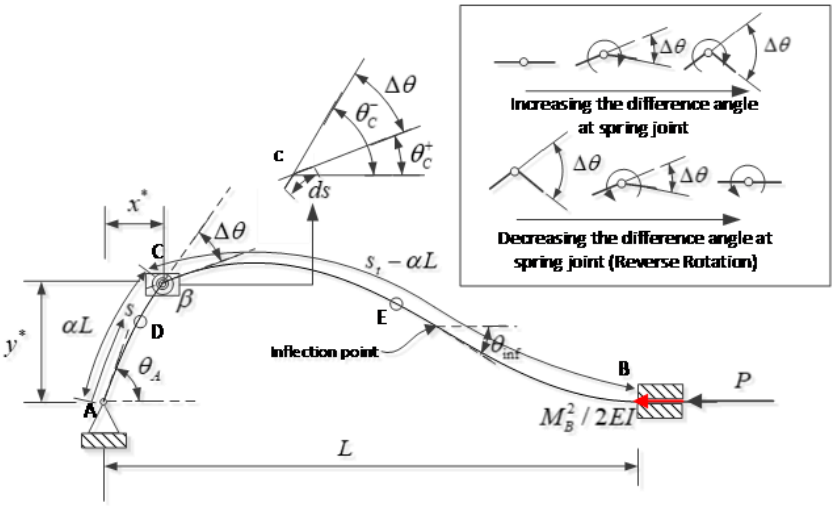
หลังจากนั้นทำการอินทิเกรตด้วยวิธี Runge-Kutta จนกระทั่งสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา แบบจำลองของสปริงต้านทานการหมุนในบทความนี้ได้พิจารณาแบบจำลองทั้งหมดสามแบบคือ 1) ยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear Elastic) 2) ยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ (Bilinear Elastic) และ3) อิลาสติก-พลาสติก (Elastic-Plastic) โดยที่สปริงต้านทานการหมุนแบบแรกได้มีการศึกษาไว้แล้วโดย Phungpaingam และ Chucheepsakul [6] ดังนั้นในงานวิจัยนี้ได้ขยายขอบเขตของพฤติกรรมของสปริงต้านทานการหมุนให้ครอบคลุมได้มากยิ่งขึ้น โดยที่ผลจากการคำนวณได้ถูกเรียบเรียงในรูปของแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ และขนาดการเปลี่ยนแปลงของมุมที่จุดสปริงต้านทานการหมุน $|\Delta\theta|$ กับความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s}_t$ และรูปร่างสมดุลของ Elastica ในสภาวะต่างๆ ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นพฤติกรรมโดยรวมของ Elastica ได้ โดยพบว่าภายหลังจากสปริงต้านทานการหมุนการคราก น้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ ลดลง และจะลดลงอย่างชัดเจนเมื่อสติฟเนสของสปริงต้านทานการหมุนมีค่าเป็นศูนย์ภายหลังการคราก และอาจมีการเพิ่มขึ้นของน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ ได้ซึ่งแสดงให้เห็นถึงการมีเสถียรภาพของ Elastica ในช่วงสั้นๆ ในขณะที่ความยาวส่วนโค้ง $\overline{s}_t$ เพิ่มขึ้น ขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ อาจมีค่าที่เพิ่มขึ้นและลดลงได้ ซึ่งการเพิ่มขึ้นและลดลงของมุม $|\Delta\theta|$ มีผลต่อความสามารถในการถ่ายโมเมนต์ที่แตกต่างกันของสปริงต้านทานการหมุนทั้งสามรูปแบบ ซึ่งงานวิจัยนี้ได้ทำการแสดงเปรียบเทียบผลที่เกิดขึ้น และมีพฤติกรรมที่น่าสนใจอาทิเช่น ผลของการเปลี่ยนแปลงสติฟเนสของสปริงที่จุดครากต่อพฤติกรรมของ Elastica การมีเสถียรภาพของ Elastica ที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ (VAL Elastica) พฤติกรรมของ Elastica เมื่อสปริงหมุนกลับด้าน เป็นต้น

2. สมการครอบคลุมปัญหา

รูปที่ 1 แสดงรูปร่างของ Elastica ในสภาวะก่อนการโก่งเดาะ และภายหลังการโก่งเดาะ โดยที่ก่อนเกิดการโก่งเดาะ Elastica วางตัวในแนวเส้นตรงยึดติดกับจุดรองรับที่จุดแบบหมุนได้อย่างอิสระ ที่ปลายด้าน B วางอยู่บนจุรองรับแบบรางเลื่อนในแนวราบ (Horizontal Slider) ซึ่งอนุญาตให้ชิ้นส่วน Elastica สามารถเลื่อนไหลในแนวราบได้อย่างอิสระ และที่จุด C เป็นจุดต่อของ Elastica ทั้งสองชิ้นส่วนซึ่งเป็นสปริงต้านทานการหมุนแบบอิลาสติก-พลาสติก ความสัมพันธ์ของโมเมนต์ที่จุดสปริงต้านทานการหมุน M_s กับมุมที่เปลี่ยนแปลงไป $\Delta\theta$ ดังแสดงในรูปที่ 2 โดยในส่วนที่สาม (ส่วน III) เป็นส่วนของการหมุนกลับด้าน (Reverse Rotation) (ดังตัวอย่างแสดงลักษณะการหมุนกลับด้านของสปริงในรูปที่ 1b)) และค่าของมุม β_1 และ β_2 เป็นค่ามุมของกราฟความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ของสปริงต้านทานการหมุนกับผลต่างของมุมที่จุด C $(\Delta\theta)$ เมื่อ Elastica เกิดการโก่งเดาะอันเนื่องมาจากแรงที่ปลาย P จะมีรูปร่างหลังการโก่งเดาะดังแสดงในรูปที่ 1b) ภายหลังการโก่งเดาะมุมที่ปลาย A มีค่าเป็น θ_A ตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุนอยู่ที่ (x^*, y^*) และผลต่างของมุมที่สปริงต้านทานการหมุนมีค่าเป็น $\Delta\theta$ ซึ่งเกิดจากการส่งถ่ายโมเมนต์ดัดที่แตกต่างจาก Elastica ที่เชื่อมต่อเป็นเนื้อเดียวกัน ที่จุด B ซึ่งเป็นจุดรองรับแบบรางเลื่อนในแนวราบ เมื่อเกิดแรงอัด P ทำให้ชิ้นส่วนของ Elastica ถูกดันเข้าไปในระบบและความยาวส่วนโค้งทั้งหมดเพิ่มขึ้น และในขณะที่เกิดการเลื่อนอย่างอิสระนั้นมีแรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากการดัดที่ปลาย B ซึ่งเรียกว่า Configurational Force มีค่าเท่ากับ $M_B^2 / 2EI$ แรงดังกล่าวได้รับการพิสูจน์ทั้งในเชิงทฤษฎีและการทดลองในห้องปฏิบัติการโดย Bosi และคณะ [13-14] โดยที่แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ และชิ้นส่วนอิสระของ Elastica แสดงในรูปที่ 3

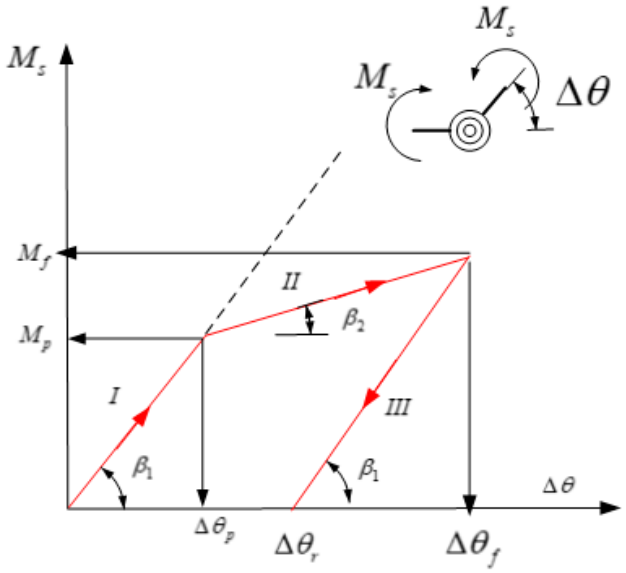


a) Elastica ก่อนการโก่งเดาะ

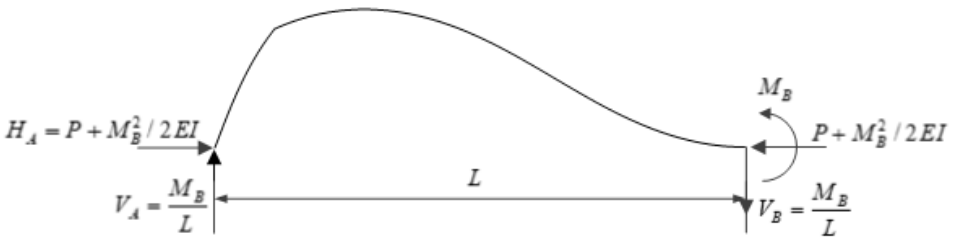


b) Elastica ภายหลังการโก่งเดาะและแสดงการหมุนของสปริงต้านทานการหมุน

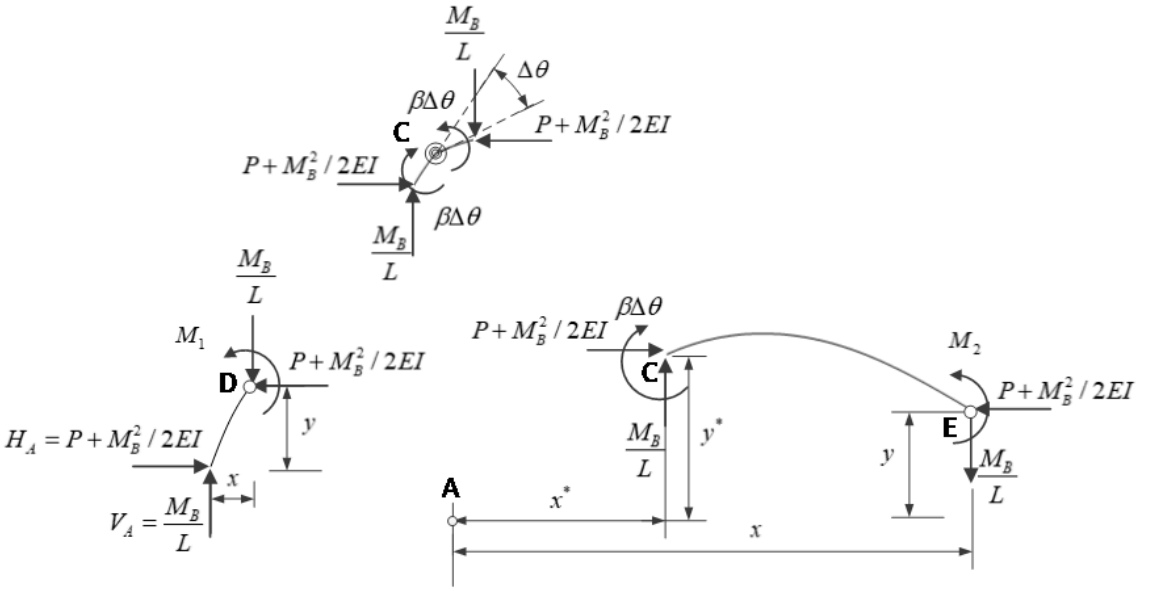
รูปที่ 1 รูปร่างของ Elastica ก่อนและภายหลังการโก่งเดาะ



รูปที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ของสปริงต้านทานการหมุน M_s และมุม $\Delta\theta$ แบบอิลาสติก-พลาสติก



รูปที่ 3 แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับของ Elastica



รูปที่ 4 แสดงชิ้นส่วนอิสระของ Elastica

สมการโมเมนต์ในในด้านซ้ายมือและขวามือของสปริงต้านทานการหมุนสามารถแสดงได้ดังนี้

ที่จุด D

$$M_1 = \frac{M_B}{L}x - \left(P + \frac{M_B^2}{2EI}\right)y \qquad s \le \alpha L \tag{1}$$

ที่จุด E

$$M_2 = \frac{M_B}{L}\left(x - x^*\right) + \left(P + \frac{M_B^2}{2EI}\right)\left(y^* - y\right) + M_s \qquad \alpha L \le s \le s_t \tag{2}$$

โดยที่ s_t คือความยาวส่วนโค้งทั้งหมด s คือความยาวส่วนโค้งของ Elastica x คือระยะในแนวราบของ Elastica y คือระยะในแนวดิ่งของ Elastica และ M_s คือความสามารถในการส่งถ่ายโมเมนต์ที่จุดต้านทานการหมุนของสปริง ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าสติฟเนส (Stiffness) ของสปริงต้านทานการหมุน มีค่าเท่ากับ $k_1 = \tan(\beta_1)$ และ $k_2 = \tan(\beta_2)$ สำหรับช่วงที่ *I* และ *II* ตามลำดับ ในขณะที่ช่วงที่ *III* ค่าสติฟเนส ของสปริงต้านทานการหมุนจะกลับมาเป็น $k_1 = \tan(\beta_1)$ อีกครั้งโดยเป็นการหมุนกลับด้าน ซึ่งพฤติกรรมดังกล่าวจะทำให้การส่งถ่ายโมเมนต์ดัดผ่านจุดต้านทานการหมุนของสปริงขึ้นอยู่กับผลต่างของมุมที่จุด *C* ดังแสดงในสมการด้านล่าง

$$M_s = \begin{cases} \Delta\theta k_1 & 0 \le \Delta\theta \le \Delta\theta_p \\ M_p + \left(\Delta\theta - \Delta\theta_p\right)k_2 & \Delta\theta_p \le \Delta\theta \le \Delta\theta_f \\ \left(\Delta\theta - \Delta\theta_r\right)k_1 & \Delta\theta_r \le \Delta\theta \le \Delta\theta_f \end{cases} \quad (3)$$

โดยที่ M_p คือโมเมนต์เมื่อสปริงเกิดการคราก $\Delta\theta_p$ คือมุมที่สปริงเกิดการคราก และมุม $\Delta\theta_r$ สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\Delta\theta_r = \Delta\theta_f - \frac{M_f}{k_1} \quad (4)$$

$\Delta\theta_f$ และ M_f คือผลต่างของมุมของสปริงที่เริ่มหมุนกลับด้านและความสามารถในการส่งถ่ายโมเมนต์เมื่อสปริงเริ่มหมุนกลับด้านตามลำดับ ภายหลังจากเขียนสมการความสัมพันธ์ของโมเมนต์ดัดภายในช่วงของ Elastica แล้ว ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้งของ Elastica และความสัมพันธ์ทางด้านเรขาคณิตได้แสดงในสมการที่ (5) ถึง (7) ดังนี้

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_i}{EI} \qquad i = 1,2 \quad (5)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta \quad (6)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\theta \quad (7)$$

สมการ (5) ถึง (7) ทั้งหมดประกอบกันเป็นสมการครอบคลุมปัญหา เพื่อความสะดวกในการคำนวณตัวแปรทั้งหมดจะอยู่ในรูปของตัวแปรไร้หน่วยดังต่อไปนี้

$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = \bar{M}_i, \qquad i = 1,2 \quad (8)$$

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = \cos\theta \quad (9)$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} = \sin\theta \quad (10)$$

$$\bar{M}_1 = \bar{M}_B\bar{x} - \left(\bar{P} + \frac{\bar{M}_B^2}{2}\right)\bar{y} \qquad \bar{s} \le \alpha \quad (11)$$

$$\bar{M}_2 = \bar{M}_B\left(\bar{x} - \bar{x}^*\right) + \left(\bar{P} + \frac{\bar{M}_B^2}{2}\right)\left(\bar{y}^* - \bar{y}\right) + \bar{M}_s \qquad \alpha \le \bar{s} \le \bar{s}_t \quad (12)$$

$$\bar{M}_s = \begin{cases} \Delta\theta\bar{k}_1 & 0 \le \Delta\theta \le \Delta\theta_p \\ \bar{M}_p + \left(\Delta\theta - \Delta\theta_p\right)\bar{k}_2 & \Delta\theta_p \le \Delta\theta \le \Delta\theta_f \\ \left(\Delta\theta - \Delta\theta_r\right)\bar{k}_1 & \Delta\theta_r \le \Delta\theta \le \Delta\theta_f \end{cases} \quad (13)$$

$$\Delta\theta_r = \Delta\theta_f - \frac{\bar{M}_f}{\bar{k}_1} \quad (14)$$

โดยที่

$$\bar{s}=\frac{s}{L},\bar{s}_t=\frac{s_t}{L},\bar{x}=\frac{x}{L},\bar{x}^*=\frac{x^*}{L},\bar{y}=\frac{y}{L},\bar{y}^*=\frac{y^*}{L},\bar{M}_i=\frac{M_iL}{EI},\bar{M}_s=\frac{M_sL}{EI}$$
$$\bar{M}_B=\frac{M_BL}{EI},\bar{M}_p=\frac{M_pL}{EI},\bar{M}_f=\frac{M_fL}{EI},\bar{k}_i=\frac{k_iL}{EI},\bar{P}=\frac{PL^2}{EI} \quad (15)$$

ระบบสมการในรูปตัวแปรไร้หน่วย (8) ถึง (10) เป็นสมการครอบคลุมปัญหาที่ใช้ในกระบวนแก้ไขปัญหาเชิงตัวเลขในงานวิจัยนี้ โดยระบบสมการดังกล่าวได้อธิบายการโก่งตัวของ Elastica ในชิ้นส่วนย่อย $d\bar{s}$ หากต้องการทราบพฤติกรรมโดยรวมทั้งหมดจำเป็นต้องอินทิเกรตระบบสมการ (8) ถึง (10) จากจุดเริ่มต้นคือ $\bar{s}=0$ ไปจนถึงจุดปลาย $\bar{s}=\bar{s}_t$ โดยที่การอินทิเกรตต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา ซึ่งแสดงเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาได้ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 เงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

ตัวแปร	ความยาวส่วนโค้ง $\bar{s}$	
	$\bar{s}=0$	$\bar{s}=\bar{s}_t$
$\bar{x}$	0	1
$\bar{y}$	0	0
θ	θ_A	0

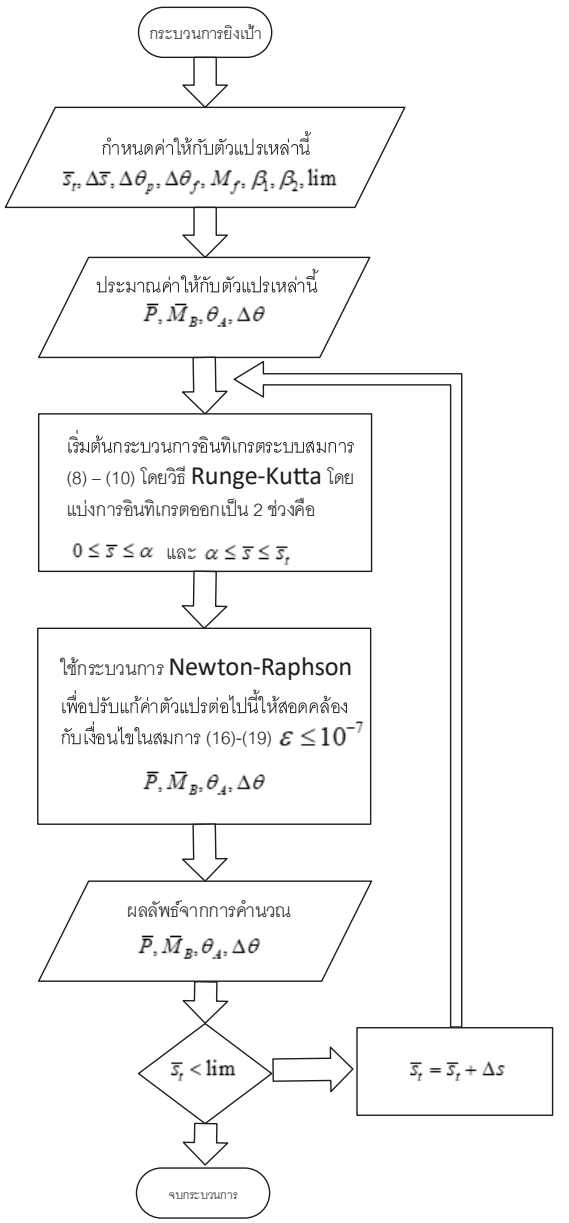
จากตารางที่ 1 สามารถสร้างสมการเพื่อใช้ในกระบวนการแก้ไขปัญหาได้ดังนี้

$$\bar{x}(\bar{s}_t)-1=0 \quad (16)$$
$$\bar{y}(\bar{s}_t)=0 \quad (17)$$
$$\theta(\bar{s}_t)=0 \quad (18)$$
$$\bar{M}_B\bar{x}^*-\left(\bar{P}+\frac{\bar{M}_B^2}{2}\right)\bar{y}^*-\bar{M}_s=0 \quad (19)$$

โดยที่ในสมการที่ (19) เป็นเงื่อนไขของโมเมนต์ดัดที่จุดต้านทานการหมุนของของสปริง $\bar{s}=\alpha$ (ในสมการที่ (11) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\bar{M}_s$)

จากสมการครอบคลุมปัญหา (8) ถึง (10) และสมการโมเมนต์ดัด (11) และ (12) และสมการโมเมนต์ของจุดต้านทานการหมุน (13) จะเห็นได้ว่ามีตัวแปรไม่ทราบค่าทั้งหมด 5 ตัวแปรคือ $\bar{s}_t$, $\bar{P}$, $\bar{M}_B$, θ_A และ $\Delta\theta$ ในกระบวนการคำนวณเชิงตัวเลขได้กำหนดให้ $\bar{s}_t$ เป็นตัวแปรควบคุม ดังนั้นจึงเหลือตัวแปรไม่ทราบค่าอีก 4 ตัวแปร ซึ่งจะอาศัยสมการเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาในสมการที่ (16) ถึง (19) เป็นเงื่อนไขในการหาผลเฉลยของปัญหาต่อไป ในการหาผลเฉลยของปัญหานี้เนื่องจากเป็นปัญหาที่ระบบสมการอนุพันธ์มีความไร้เชิงเส้นสูง ดังนั้นจึงนำกระบวนการเชิงตัวเลขมาใช้ในการแก้ไขปัญหา โดยในบทความนี้ได้ใช้วิธี Shooting Method แสดงดังรูปที่ 5 โดยในกระบวนการในรูปที่ 5 ใช้วิธี Newton-Raphson ในการทำให้เงื่อนไขในสมการที่ (16)-(19) ซึ่งกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์เป็นจริง แต่ในกระบวนการเชิงตัวเลขได้กำหนดค่า ε ซึ่งเป็นค่าความคาดเคลื่อนสูงสุดที่ยอมรับได้โดยกำหนดให้ $\varepsilon \le 10\text{-}7$ เป็นเกณฑ์ในการตรวจสอบการลู่เข้าหาคำตอบ กระบวนการดังกล่าวเป็นกระบวนการเชิงตัวเลขที่เหมาะสมกับการใช้แก้ไข

ปัญหาที่มีค่าขอบเขตชัดเจนเช่นปัญหาที่พิจารณาในบทความนี้ ในระหว่างการอินทิเกรตจาก $\bar{s} = 0$ ถึง $\bar{s} = \bar{s}_t$ ในกรณีที่มุม $\Delta\theta$ มีขนาดเพิ่มขึ้นโมเมนต์ $\bar{M}_s$ จะมีค่าเป็นไปตามสองลำดับแรกของสมการที่ (13) เมื่อ $\Delta\theta$ มีขนาดที่ลดลงโมเมนต์ $\bar{M}_s$ จะมีค่าเป็นไปตามสมการในสองลำดับแรกหากกำหนดให้สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น หรือ ยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ และ $\bar{M}_s$ มีค่าเป็นไปตามสมการลำดับที่สามของสมการที่ (13) เมื่อกำหนดให้สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบอิลาสติก-พลาสติก โดยที่ตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน (จุด C) จะไม่มีความต่อเนื่องของมุม ดังนั้นมุมที่จุดต้านทานการหมุนด้านซ้ายและด้านขวามือมีค่าไม่เท่ากันดังสมการ $\theta_C^+ = \theta_C^- + \Delta\theta$ โดยที่ θ_C^- และ θ_C^+ คือมุมด้านซ้ายมือ และขวามือที่จุด C ตามลำดับ (ดังแสดงในรูปที่ 1b)



รูปที่ 5 แผนผังในการคำนวณวิธีการ Shooting method

3. ผลและการวิเคราะห์ผล

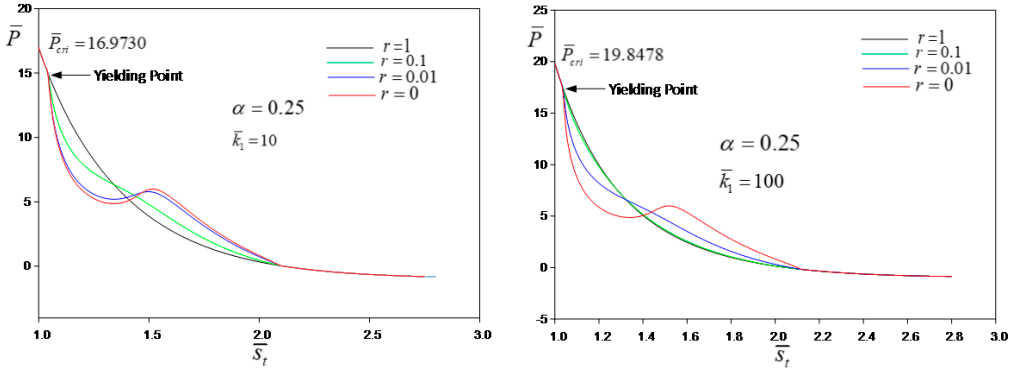
ผลจากการคำนวณได้นำเสนอในรูปแบบกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำที่ปลาย $\overline{P}$ กับความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s}_t$ โดยมีการแปรผันตัวแปรที่ต้องการศึกษาผลกระทบคือ ตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน α ค่าสติฟเนสของสปริงต้านทานการหมุน $\overline{k}_1, \overline{k}_2$ นอกจากกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $\overline{P}$ และ $\overline{s}_t$ แล้ว กราฟความสัมพันธ์ระหว่างมุม $|\Delta\theta|$ และ $\overline{s}_t$ และรูปร่างสมดุลของ Elastica ที่สภาวะต่างๆ ได้นำเสนอในการวิเคราะห์ด้วยเช่นกัน

3.1 พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของ Elastica

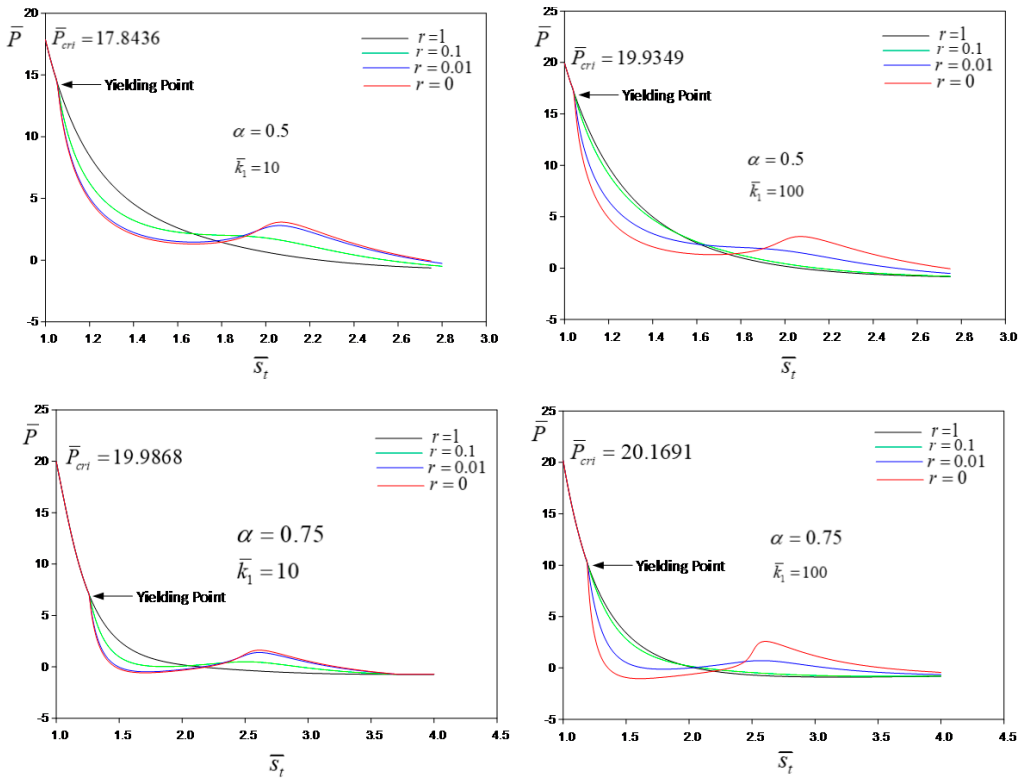
พฤติกรรมหลังการโก่งเดาะของ Elastica ที่มีสปริงต้านทานการหมุนภายในช่วงความยาวของ Elastica ได้มีการศึกษาโดย Phungpaingam และ Chucheepsakul [6] ซึ่งในงานวิจัยดังกล่าวได้พิจารณาสปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear Elastic) โดยมีผลที่น่าสนใจหลายอย่างด้วยกันโดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อสติฟเนสของสปริงมีค่าเป็นศูนย์ อาทิเช่น การเกิดรูปร่างสมดุลได้หลายแบบ (Multiple Equilibrium Shapes) การเกิดการโก่งเดาะในลำดับที่สอง (Secondary Buckling) ซึ่งเป็นการโก่งเดาะครั้งที่สองที่เกิดขึ้นหลังจากการโก่งเดาะในครั้งแรก (Primary Buckling) ในบทความนี้ได้พัฒนาแบบจำลองของสปริงต้านทานการหมุนในลักษณะที่เป็นแบบอิลาสติก-พลาสติก โดยศึกษาพฤติกรรมของ Elastica ในสองกรณีดังนี้ 1) พฤติกรรมเมื่อสปริงต้านทานการหมุนเกิดการครากและมีการเปลี่ยนแปลงสติฟเนส (แบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่) เทียบกับกรณีที่ไม่เกิดการคราก 2) พฤติกรรมของ Elastica เมื่อสปริงเป็นแบบอิลาสติก-พลาสติกและเกิดการหมุนกลับด้าน โดยในกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ อาจไม่พบสปริงต้านทานการหมุนที่มีลักษณะดังกล่าวในทางปฏิบัติ แต่การศึกษาพฤติกรรมของ Elastica ที่มีสปริงต้านทานการหมุนแบบอิลาสติก-พลาสติก มีความจำเป็นในการนำผลการคำนวณของ $\Delta\theta_f$ และ $\overline{M}_f$ ในกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ เพื่อใช้เป็นข้อมูลนำเข้าสำหรับการศึกษาพฤติกรรมของ Elastica ที่มีสปริงต้านทานหมุนเป็นแบบอิลาสติก-พลาสติก ผลจากการคำนวณอาจแบ่งการพิจารณาในกรณีแรกโดยแปรผันอัตราส่วนของสติฟเนสของสปริงหมุน $r = \overline{k}_2 / \overline{k}_1$ ซึ่งได้ทำการแปรผันอัตราส่วน r ระหว่าง 1 ถึง 0 เมื่อ $\overline{k}_1$ = 10 และ 100 ตามลำดับ ที่ตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุนแตกต่างกัน (α = 0.25, 0.50 และ 0.75) ในกรณีที่สองจะเกิดขึ้นเมื่อเกิดการโก่งตัวมากขึ้นซึ่งการเปลี่ยนแปลงของมุมที่สปริงต้านทานการหมุนอาจมีการหมุนกลับด้านได้

3.2 พฤติกรรมของ Elastica เมื่อสปริงต้านทานการหมุนเกิดการคราก

ในการศึกษาพฤติกรรมของ Elastica ในกรณีนี้ ได้แสดงเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ และความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s}_t$ โดยมีการแปรผันอัตราส่วนของสติฟเนสของจุดต้านทานการหมุนภายหลังและก่อนการคราก $r = \overline{k}_2 / \overline{k}_1$ ในแต่ละตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน α ซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 6



รูปที่ 6 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ กับความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s}_t$ เมื่อแปรผันอัตราส่วนของสติฟเนส r ที่ตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน α ที่แตกต่างกัน



รูปที่ 6 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ กับความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\bar{s}_t$ เมื่อแปรผันอัตราส่วนของสติฟเนส r ที่ตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน α ที่แตกต่างกัน (ต่อ)

รูปที่ 6 แสดงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการรับน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนของสติฟเนสของจุดต้านทานการหมุน r โดยได้ทำการแปรผันค่า r ระหว่าง 1 ถึง 0 เมื่อ $r = 1$ (เส้นสีดำ) หมายถึงพฤติกรรมของสปริงแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นซึ่งได้ทำการศึกษาไว้แล้วจากงานวิจัยของ Phungpaingam และ Chucheepsakul [4] ในบทความนี้ได้ใช้เป็นเส้นเปรียบเทียบกับกรณีที่เกิดการคราก และเมื่อ $r = 0$ (เส้นสีแดง) คือกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนมีพฤติกรรมแบบจุดหมุนพลาสติก (Plastic Hinge) ซึ่งสติฟเนสภายหลังการครากมีค่าเป็นศูนย์ ($\bar{k}_2 = 0$) จากเส้นโค้งความสัมพันธ์จะเห็นได้ว่าเริ่มแรก Elastica เกิดการโก่งเดาะเมื่อน้ำหนักบรรทุกมีค่าถึงจุดวิกฤต $\bar{P}_{cri}$ ซึ่ง Wang และคณะ [15] ได้นำเสนอสมการในการคำนวณหาค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต $\bar{P}_{cri}$ โดยแสดงในสมการที่ (20) และได้แสดงค่าดังกล่าวไว้ในกราฟแล้ว (รูปที่ 6)

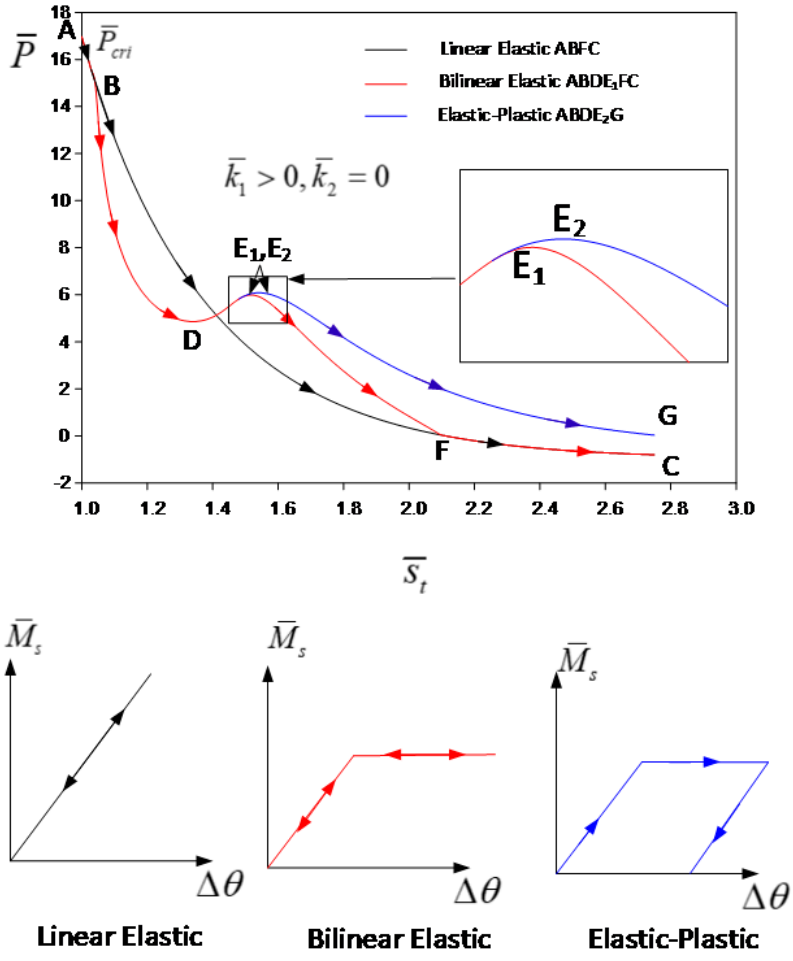
$$\bar{k}_1\left[\sqrt{\bar{P}_{cri}} - \tan\left(\sqrt{\bar{P}_{cri}}a\right)\right] + \left[\bar{P}_{cri} + \bar{k}_1 + \sqrt{\bar{P}_{cri}}\left(\bar{k}_1 - 1\right)\tan\left(\sqrt{\bar{P}_{cri}}a\right)\right]\tan\left[\sqrt{\bar{P}_{cri}}\left(a-1\right)\right] = 0 \qquad (20)$$

เมื่อกำหนดค่าสติฟเนสของสปริงหมุน $\bar{k}_1$ และตำแหน่งของสปริงหมุน $a = 1 - \alpha$ (แสดงในรูปที่ 1a) สามารถคำนวณค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤตได้โดยกระบวนการกระทำซ้ำของ Newton-Raphson

หลังจากการโก่งเดาะของ Elastica แล้วจะสังเกตเห็นว่าน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ ลดลงเมื่อมีการโก่งตัวมากขึ้น (ความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\bar{s}_t$ เพิ่มขึ้น) ลักษณะของความสัมพันธ์เช่นนี้บ่งบอกถึงความไร้เสถียรภาพ (Unstable) ของ Elastica น้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ จะลดลงอย่างต่อเนื่องและเมื่อถึงจุดที่กำหนดให้สปริงต้านทานการหมุนเกิดการคราก ในที่นี้กำหนดให้สปริง

เกิดการครากเมื่อผลต่างของมุมที่จุดสปริงต้านทานการหมุนมีขนาดที่มากกว่าค่าที่กำหนดคือ $|\Delta\theta_p|$ ซึ่งในบทความนี้กำหนดให้เท่ากับ 0.15 เมื่อค่าสติฟเนสก่อนการคราก $\bar{k}_1 = 10$ และกำหนดให้เท่ากับ 0.015 เมื่อ $\bar{k}_1 = 100$ การกำหนดค่าที่แตกต่างกันเช่นนี้ไม่ทำให้พฤติกรรมโดยรวมเปลี่ยนแปลงไป การกำหนดค่าที่แตกต่างกันเป็นผลมาจากเมื่อค่าสติฟเนส $\bar{k}_1 = 10$ สปริงจะมีลักษณะแบบอ่อน ความสามารถในการถ่ายโมเมนต์ดัดที่จุดสปริงต้านทานการหมุนไม่มีประสิทธิภาพทำให้เกิดผลต่างของมุมที่จุดดังกล่าวได้มากกว่าในกรณีที่ $\bar{k}_1 = 100$ ดังนั้นเพื่อความเหมาะสมจึงได้กำหนดขนาดของมุมที่ทำให้เกิดการครากแตกต่างกัน เมื่อสปริงต้านทานการหมุนเกิดการครากจะเห็นได้ว่าน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ มีค่าที่ลดต่ำลงมากกว่าในกรณีที่ไม่เกิดการคราก (เส้นสีดำ) การลดลงจะเกิดมากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของสติฟเนสภายหลังและก่อนการคราก r โดยที่อัตราส่วน r เมื่อลดลงหมายถึงค่าสติฟเนสภายหลังการคราก $\bar{k}_2$ ลดลงตามไปด้วย ดังนั้นน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ จะมีค่าที่ลดลงมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับอัตราส่วน r (สังเกตการลดลงของเส้นสีดำ เขียว น้ำเงิน และแดง) และภายหลังจากการลดลงของน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ อาจเป็นการลดลงแบบต่อเนื่อง หรืออาจเกิดการเพิ่มขึ้นของน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ ในช่วงสั้นๆ อีกครั้งก็เป็นไปได้ขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของสติฟเนส r และตำแหน่งของจุดต้านทานการหมุน α เช่นในกรณีที่ α = 0.25 เมื่อค่าอัตราส่วน r ลดลงเป็น 0.1 จะสังเกตเห็นว่าหลังจากจุดครากน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ ยังคงลดลงอย่างต่อเนื่อง ในขณะที่ความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\bar{s}_t$ มีค่าเพิ่มขึ้นทั้งในกรณีที่ $\bar{k}_1 = 10$ และ 100 แสดงถึงสภาวะที่ไร้เสถียรภาพ แต่เมื่อกำหนดให้อัตราส่วน r ลดลงเป็น 0.01 หรือ 0 (เส้นสีน้ำเงินและแดงตามลำดับ) จะสามารถสังเกตได้ว่าในบางกรณีมีช่วงที่น้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ มีค่าที่เพิ่มขึ้นเมื่อความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\bar{s}_t$ เพิ่มขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่ r = 0 ซึ่งสปริงต้านทานการหมุนมีพฤติกรรมเป็นจุดหมุนพลาสติก โดยสามารถสังเกตเห็นพฤติกรรมการเพิ่มขึ้นของน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ ได้อย่างชัดเจนในทุกกรณีของค่าสติฟเนส $\bar{k}_1$ และทุกตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน α

อันเป็นสภาวะของ Elastica ที่มีเสถียรภาพ ซึ่งโดยปกติเป็นที่ทราบกันดีว่า Elastica ที่มีความยาวส่วนโค้งแปรเปลี่ยนได้ (VAL Elastica) ภายใต้แรงอัดจะเกิดสภาวะที่ไร้เสถียรภาพหลังจากการโก่งเดาะตลอดช่วงความยาว $\bar{s}_t$ [5] แต่ในกรณีนี้เมื่อเกิดจุดหมุนภายในช่วงความยาวของ Elastica หากเป็นจุดหมุนโดยทั่วไป (Hinged Joint) จะเกิดการโก่งเดาะลำดับที่สอง (Secondary Buckling) [6] และถ้าหากเป็นจุดหมุนแบบพลาสติก จะเกิดสภาวะที่มีเสถียรภาพขึ้นมาอีกครั้งหนึ่ง การลดลงและเพิ่มขึ้นของน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ เมื่อ Elastica มีจุดหมุนแบบพลาสติกคล้ายกับพฤติกรรมของ Elastica ที่ปรากฏในงานวิจัยของ Monasa [9] ซึ่งสติฟเนสโดยรวมของ Elastica เพิ่มขึ้นเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของ Elastica นั่นเอง เมื่อน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ เพิ่มขึ้นจนกระทั่งถึงจุดสูงสุดหลังจากนั้นน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ จะลดลงอย่างต่อเนื่อง ซึ่งพฤติกรรมดังกล่าวสามารถแสดงได้อย่างชัดเจนในรูปที่ 7 โดยได้นำเสนอพฤติกรรมของ Elastica 3 กรณีด้วยกันคือ กรณีที่แบบจำลองของสปริงต้านทานการหมุนไม่เกิดการคราก สปริงต้านทานการหมุนเกิดการครากและมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ และสปริงต้านทานการหมุนเกิดการครากและมีพฤติกรรมแบบอิลาสติก-พลาสติก ซึ่งพฤติกรรมทั้งสามแบบได้ถูกนำมาเปรียบเทียบกันเพื่อแสดงถึงผลกระทบของพฤติกรรมของสปริงต้านทานการหมุนในแต่ละแบบที่มีต่อพฤติกรรมโดยรวมของ Elastica โดยที่เส้น ABFC คือกรณีที่ไม่เกิดการครากของสปริงต้านทานการหมุน เส้น $ABDE_1FC$ เป็นกรณีที่เกิดการครากและจุดหมุนเป็นแบบจุดหมุนพลาสติกซึ่งสามารถสังเกตพฤติกรรมได้อย่างชัดเจน ในขณะที่เส้น $ABDE_2G$ สำหรับกรณีที่จุดต้านทานการหมุนเกิดการครากและภายหลังการครากเมื่อสปริงต้านทานการหมุนมีการหมุนกลับด้านโดยที่สติฟเนสในขณะหมุนกลับด้านมีค่าเท่ากับช่วงเริ่มแรกคือ $\bar{k}_1$ จะทำให้น้ำหนักบรรทุกเพิ่มขึ้น (เส้นสีน้ำเงิน) เมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนหมุนกลับด้านบนเส้นทางเดิม (เส้นสีแดง) อันเนื่องจากสติฟเนสที่เพิ่มขึ้นเป็น $\bar{k}_1$ ($\bar{k}_1 > \bar{k}_2$)



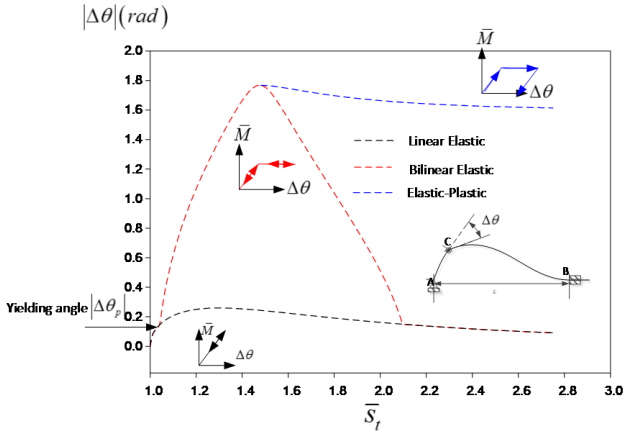
รูปที่ 7 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ ความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\bar{s}_t$

3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมที่สปริงต้านทานการหมุน $|\Delta\theta|$ และความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\bar{s}_t$

จากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมที่จุดสปริงต้านทานการหมุน $|\Delta\theta| = |\theta_C^+ - \theta_C^-|$ และความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\bar{s}_t$ ในรูปที่ 8a) จะเห็นได้ว่าของมุม $|\Delta\theta|$ สามารถเพิ่มขึ้นและลดลง (หมุนกลับด้าน) โดยเส้นสีดำแสดงการเพิ่มขึ้นและลดลงของมุม $|\Delta\theta|$ เมื่อสปริงไม่เกิดการคราก (สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น) ซึ่งสอดคล้องกับความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{M}_s$ และ $\Delta\theta$ ในกรณีที่ 1 ในขณะที่เส้นสีแดงแสดงถึงสปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ (Bilinear Elastic) เมื่อขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ มีค่ามากกว่า $|\Delta\theta_p|$ จะเกิดการคราก และสติฟเนสของสปริงเปลี่ยนเป็น $\bar{k}_2$ ซึ่งสามารถสังเกตถึงการเพิ่มขึ้นและลดลงของขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ ได้อย่างชัดเจน เนื่องจากค่าสติฟเนสภายหลังการครากในกรณีนี้กำหนดให้มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อสติฟเนสภายหลังการครากเป็นศูนย์ขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ จึงสามารถเปลี่ยนแปลงได้อยากมากทั้งการเพิ่มขึ้นและลดลง (หมุนกลับด้าน) ซึ่งขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ ลดลงบนเส้นทางเดียวกันกับการเพิ่มขึ้นของขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ และสอดคล้องกับความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{M}_s$ และ $\Delta\theta$ ในกรณีที่ 2 (สปริงต้านทานการหมุนแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่) เส้นสีน้ำเงินแสดงให้เห็นถึงการลดลงของขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ ที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{M}_s$ และ $\Delta\theta$ ในกรณีที่ 3 (สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบอิลาสติก-พลาสติก) ซึ่งเมื่อเกิดการหมุนกลับ

ด้านสติฟเนสของสปริงจะมีค่าเท่ากับค่าสติฟเนสเริ่มแรกคือ $\bar{k}_1$ อีกครั้ง (เส้นตรงคู่ขนาน สีน้ำเงินของกราฟความสัมพันธ์ $\bar{M}_s - \Delta\theta$)

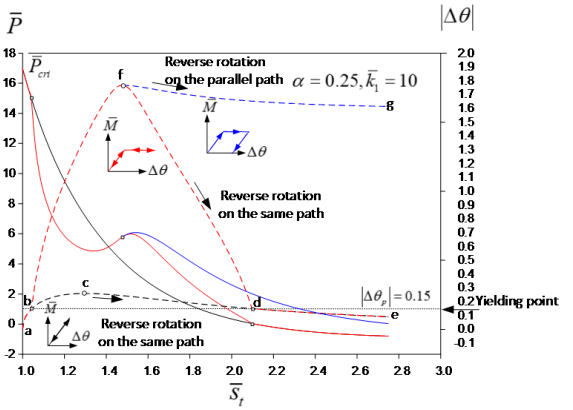
รูปที่ 8b) แสดงการเปรียบเทียบระหว่างขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ กับน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ ซึ่งแสดงถึงจุดที่มีการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมที่สำคัญเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น (เส้น abcde) กล่าวคือในกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ ที่จุดครากเมื่อขนาดของมุม $|\Delta\theta| > |\Delta\theta_p|$ ค่าสติฟเนสของสปริงลดลง (ในที่นี้ลดลงจนเป็นศูนย์) ขนาดของมุมของสปริงต้านทานการหมุนมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างมากภายหลังการคราก (เส้น bf) ในขณะที่น้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ ลดลงอย่างมากเช่นกัน แสดงให้เห็นว่าจุดหมุนไม่สามารถถ่ายโมเมนต์ดัดที่เกิดเพิ่มขึ้นได้อีกต่อไป ในระหว่างเกิดการโก่งตัวมากภายใต้สปริงต้านทานการหมุนที่เป็นจุดหมุนแบบพลาสติก (Plastic Hinge) ขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ มีการเปลี่ยนแปลงที่ค่อนข้างมากทั้งในส่วนของมุมที่เพิ่มขึ้น (เส้น bf) และลดลง (เส้น fde) ซึ่งเป็นการหมุนกลับด้านนั่นเอง โดยในระหว่างนั้นอาจมีการเพิ่มขึ้นของน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ ในช่วงสั้นๆ อันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของ Elastica และภายหลังจากนั้นน้ำหนักบรรทุกจะมีค่าที่ลดลงอย่างต่อเนื่องและขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ ลดลงเช่นกัน เมื่อขนาดของมุมของสปริงต้านทานการหมุนลดลงจนน้อยกว่าขนาดของมุมที่ทำให้เกิดการคราก $|\Delta\theta_p|$ (เส้น de) จะเห็นได้อย่างชัดเจนในรูปที่ 8b) ว่าน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ ในกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบเชิงเส้นคู่ ซ้อนทับกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น ทั้งนี้เนื่องจากเมื่อขนาดของมุม $|\Delta\theta| \le |\Delta\theta_p|$ พฤติกรรมของสปริงต้านทานการหมุนของทั้งสองกรณีเป็นแบบเดียวกัน ในกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนมีลักษณะเป็นแบบอิลาสติก-พลาสติก (Elastic-Plastic) ในช่วงที่ขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ มีค่าที่เพิ่มขึ้น (เส้น abf) มีพฤติกรรมที่เหมือนกับกรณีของสปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบเชิงเส้นคู่ แต่เมื่อขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ เริ่มลดลงสังเกตเส้น fg (หมุนกลับด้าน) จะมีพฤติกรรมที่แตกต่างออกไปกล่าวคือสปริงจะกลับมามีสติฟเนสเท่ากับ $\bar{k}_1$ $(\bar{k}_1 > \bar{k}_2)$ ทำให้ต้องการน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ ที่มากกว่าสปริงต้านทานการหมุนในสองแบบแรก (แบบยืดหยุ่นเชิงเส้น และแบบเชิงเส้นคู่) และขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ จะมีการลดลงที่น้อยกว่าเมื่อเทียบกับสปริงต้านทานการหมุนในสองแบบแรกเนื่องจากสปริงมีค่าสติฟเนสที่เพิ่มมากขึ้นนั่นเอง ในกรณีที่ $\bar{k}_1$ หรือ α เปลี่ยนแปลงไปพฤติกรรมโดยรวมยังคงเป็นไปในลักษณะเช่นเดิมซึ่งแสดงในรูปที่ 9 (เมื่อทำการแปรผันค่า $\bar{k}_1$ =10 และ 100 โดยแปรผันค่า α =0.25, 0.5 และ 0.75) และมีข้อสังเกตเล็กน้อยคือเมื่อค่า $\bar{k}_1$ = 100 ซึ่งสปริงต้านทานการหมุนมีค่าสติฟเนสที่ค่อนข้างสูงทำให้มุม $|\Delta\theta|$ มีค่าที่น้อยมากในรูปที่ 9 (เส้นประสีดำในกรณีที่ $\bar{k}_1$ 100)



a) มุม $|\Delta\theta|$ กรณีที่สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบ

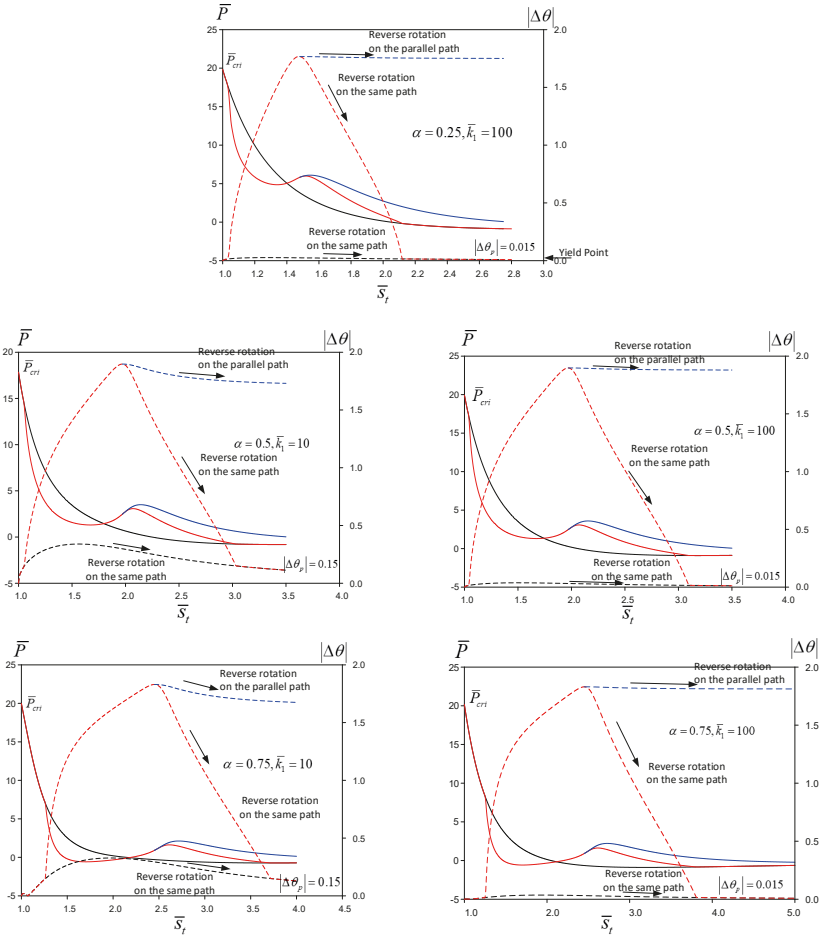
1. ยืดหยุ่นเชิงเส้น (สีดำ) 2. ยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ (สีแดง) 3. อิลาสติก-พลาสติก (สีน้ำเงิน)

รูปที่ 8 ความสัมพันธ์ของมุม $|\Delta\theta|$ และความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\bar{s}_t$ และการหมุนกลับด้านของมุม $|\Delta\theta|$



b) ความสัมพันธ์ของมุม $|\Delta\theta|$ เปรียบเทียบกับการรับน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ เส้นทึบเป็นคู่ความสัมพันธ์ $\bar{P}$ และ $\bar{s}_t$ เส้นประเป็นคู่ความสัมพันธ์ $|\Delta\theta|$ และ $\bar{s}_t$

รูปที่ 8 ความสัมพันธ์ของมุม $|\Delta\theta|$ และความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\bar{s}_t$ และการหมุนกลับด้านของมุม $|\Delta\theta|$ (ต่อ)

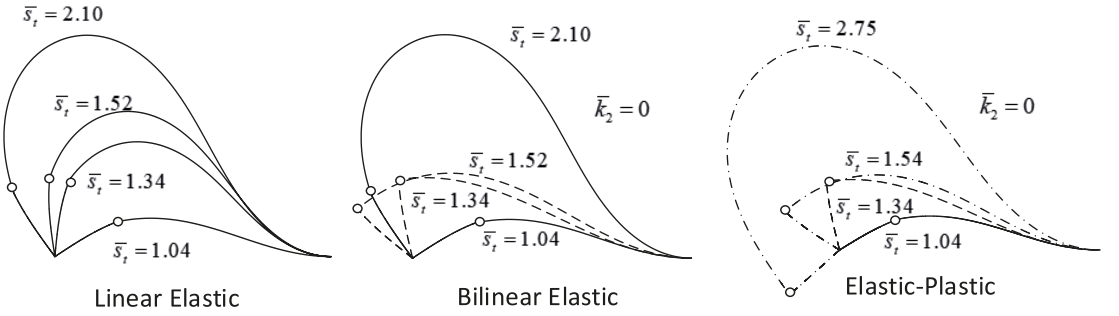


รูปที่ 9 เปรียบเทียบความสัมพันธ์ของน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ ขนาดของมุม $|\Delta\theta|$ เมื่อแปรผันค่าของ $\bar{k}_1$ และ α เส้นทึบเป็นคู่ความสัมพันธ์ $\bar{P}$ และ $\bar{s}_t$ เส้นประเป็นคู่ความสัมพันธ์ $|\Delta\theta|$ และ $\bar{s}_t$

3.4 รูปร่างสมดุลของ Elastica

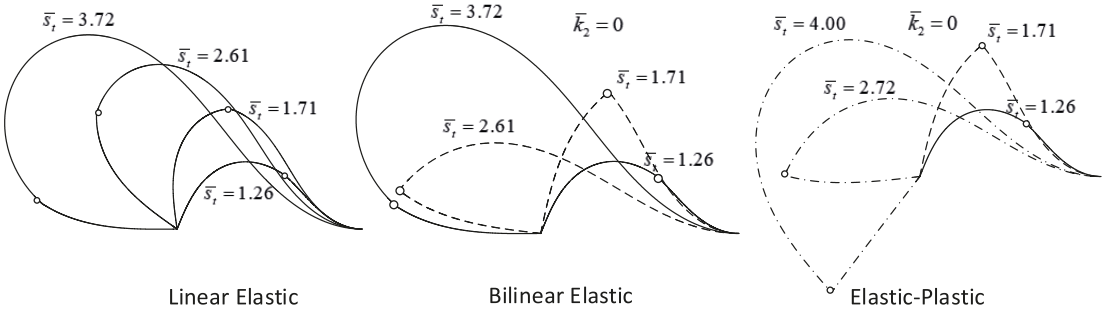
รูปร่างสมดุลของ Elastica ที่สอดคล้องกับตำแหน่งต่างๆ บนเส้นโค้งความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ และความยาวส่วนโค้งทั้งหมด $\overline{s}_t$ แสดงดังในรูปที่ 7 โดยเปรียบเทียบรูปร่างสมดุลของ Elastica ในสามกรณีเมื่อสปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบ 1) ยืดหยุ่นเชิงเส้น 2) ยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ และ 3) อิลาสติก-พลาสติกดังแสดงในรูปที่ 10a) และ 10b) ในที่นี้ได้นำเสนอรูปร่างสมดุลที่ตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุนสองตำแหน่งได้แก่ α = 0.25 และ 0.75 โดยเส้นทึบแสดงถึงรูปร่างของ Elastica ที่สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น (พฤติกรรมตามช่วงที่ I ในรูปที่ 2) เส้นประหมายถึงรูปร่างของ Elastica ที่สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ (พฤติกรรมตามช่วงที่ II ในรูปที่ 2) และเส้นประจุดแสดงถึงรูปร่างของ Elastica เมื่อเกิดการหมุนกลับด้านของมุม $|\Delta\theta|$ และสปริงต้านทานการหมุนมีพฤติกรรมแบบอิลาสติก-พลาสติก (พฤติกรรมตามช่วงที่ III ในรูปที่ 2) เมื่อได้สังเกตการเปลี่ยนแปลงของรูปร่างสมดุลของ Elastica ที่เกิดการครากและสติฟเนส $\overline{k}_2$ = 0 ในกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ จะเห็นได้ว่ามุมของสปริงหมุนเกิดการหักงออย่างชัดเจนอันเนื่องมาจากจุดหมุนได้กลายสภาพเป็นจุดหมุนพลาสติก (Plastic Hinge) และเมื่อทำการเพิ่มความยาวส่วนโค้งต่อไปจะพบว่ามุม $|\Delta\theta|$ เพิ่มขึ้นจนถึงจุดสูงสุดและลดลงจนกระทั่งมุม $|\Delta\theta| \le |\Delta\theta_p|$ ซึ่งหลังจากจุดนี้พฤติกรรมของ Elastica จะเหมือนกับกรณีที่สปริงหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น ลักษณะของการหมุนกลับด้านของสปริงต้านทานการหมุนในกรณีนี้สามารถแสดงให้เห็นได้ในรูปที่ 10c) ซึ่งแสดงรูปร่างสมดุลของ Elastica และมุม $|\Delta\theta|$ ในรูปร่างของ Elastica ที่ 1 ถึง 4 มุม $|\Delta\theta|$ มีค่าที่เพิ่มขึ้นเมื่อการโก่งตัวเพิ่มขึ้น และเมื่อการโก่งตัวเพิ่มขึ้นมุม $|\Delta\theta|$ มีค่าที่ลดลงแสดงให้เห็นถึงการหมุนกลับด้านของสปริงต้านทานการหมุนในรูปร่างของ Elastica ที่ 5 และ 6

ในกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนมีพฤติกรรมแบบอิลาสติก-พลาสติก ซึ่งมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นในช่วงแรก แบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ในช่วงที่สอง และในช่วงที่สามเมื่อมุม $|\Delta\theta|$ หมุนกลับด้านจะหมุนกลับด้วยสติฟเนสของสปริงที่เท่ากับสติฟเนสในช่วงแรกคือ $\overline{k}_1$ ซึ่งเห็นได้ว่ามีพฤติกรรมที่แตกต่างจากกรณีของสปริงเชิงเส้นคู่คือในการหมุนกลับด้านของสปริงพบว่ามีการเปลี่ยนแปลงของมุมค่อนข้างน้อยเนื่องจากสปริงมีค่าสติฟเนสที่สูงขึ้น และด้วยเหตุผลนี้ทำให้น้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ เพิ่มขึ้นเช่นกัน

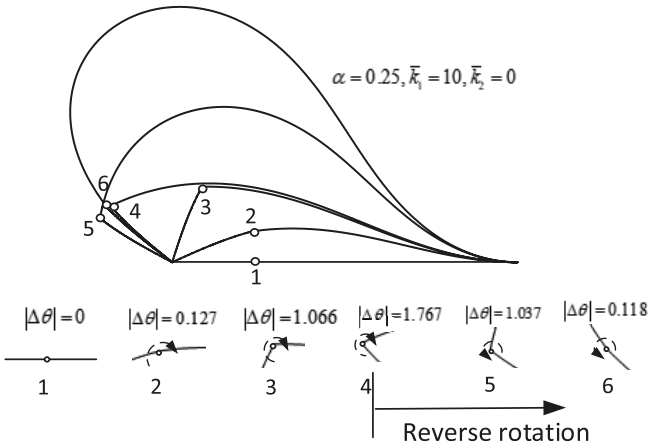


a) $\alpha = 0.25, \overline{k}_1 = 10$ เส้นทึบคือการโก่งตัวในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้น เส้นประคือการโก่งตัวในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ เส้นประจุดเป็นการโก่งตัวเมื่อสปริงหมุนกลับด้านในช่วงอิลาสติก-พลาสติก

รูปที่ 10 รูปร่างสมดุลของ Elastica



b) $\alpha = 0.75, \bar{k}_1 = 10$ เส้นทึบคือการโก่งตัวในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้น เส้นประคือการโก่งตัวในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ เส้นประจุดเป็นการโก่งตัวเมื่อสปริงหมุนกลับด้านในช่วงอิลาสติก-พลาสติก



c) แสดงหมุนกลับด้านของสปริงต้านทานการหมุน

รูปที่ 10 รูปร่างสมดุลของ Elastica (ต่อ)

4. สรุปผล

การศึกษาพฤติกรรมของ Elastica ที่มีสปริงต้านทานการหมุนอยู่ภายในช่วงความยาวของ Elastica ในบทความนี้ได้ใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยวิธี Shooting Method โดยการอินทิเกรตระบบสมการอนุพันธ์ครอบคลุมปัญหา ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดขึ้น โดยมีการแปรผันตัวแปรที่สำคัญ คือ ค่าสติฟเนส และตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน โดยที่ค่าสติฟเนสของสปริงต้านทานการหมุนได้ถูกจำลองให้สอดคล้องกับพฤติกรรมการหมุนของสปริงในสามรูปแบบคือ 1) แบบยืดหยุ่นเชิงเส้น 2) แบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ และ 3) แบบอิลาสติก-พลาสติก ซึ่งสามารถสรุปผลได้ดังนี้

1. ในช่วงแรกหลังการโก่งเดาะ Elastica มีสมดุลที่ไร้เสถียรภาพในทุกกรณี
2. ภายหลังการเกิดการคราก ของสปริงต้านทานการหมุน น้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ มีค่าที่ลดลง (เทียบกับกรณียืดหยุ่นเชิงเส้น) ในขณะที่มุม $|\Delta\theta|$ มีขนาดที่เพิ่มมากขึ้น เนื่องจากค่าสติฟเนสที่ลดลง และการลดลงของน้ำหนักบรรทุก $\bar{P}$ (การเพิ่มขึ้นของมุม $|\Delta\theta|$) จะสังเกตได้ชัดเจนมากขึ้นเมื่อสติฟเนสหลังการครากมีค่าเป็นศูนย์ ($\bar{k}_2 = 0$)
3. จากการแปรผันค่าของอัตราส่วน r จาก 1 ถึง 0 พบว่าในทุกตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน α มีพฤติกรรม

ที่คล้ายคลึงกัน กล่าวคือมีการลดลงของน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ ภายหลังการคราก (เมื่อเทียบกับกรณีที่สปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น) แต่เมื่อ $r = 0$ ($\overline{k}_2 = 0$) จะสามารถสังเกตพฤติกรรมได้ชัดเจนที่สุด

4. สติฟเนสในช่วงเริ่มต้น $\overline{k}_1$ มีผลต่อค่าน้ำหนักบรรทุกวิกฤต $\overline{P}_{cri}$ (เช่นเดียวกับตำแหน่งของสปริงต้านทานการหมุน α) และภายหลังการโก่งเดาะค่าสติฟเนส $\overline{k}_1$ ที่มากกว่าเช่น $\overline{k}_2$ =100 จะมีน้ำหนักบรรทุก $\overline{P}$ ที่สูงกว่ากรณีที่ $\overline{k}_1$ มีค่าน้อย และเนื่องจากค่าสติฟเนสที่สูงจะทำให้ค่าของมุม $|\Delta\theta|$ มีค่าที่ต่ำลง
5. หลังการครากเมื่อสปริงต้านทานการหมุนเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นคู่ หรือแบบอิลาสติก-พลาสติก อาจพบลักษณะสมดุลที่มีเสถียรภาพได้ในช่วงสั้นๆ ซึ่งสามารถสังเกตได้ชัดเจนเมื่อ $r = 0$
6. การหมุนกลับด้านของสปริงต้านทานการหมุนในกรณีของสปริงต้านทานการหมุนแบบอิลาสติก-พลาสติกจะทำให้น้ำหนักบรรทุกมีค่าที่มากกว่ากรณีของสปริงต้านทานการหมุนแบบเชิงเส้นคู่ อันเนื่องจากค่าสติฟเนสที่กลับมาเท่ากับค่าสติฟเนสในช่วงเริ่มต้น

5. เอกสารอ้างอิง

1. Kunetsov, V.V. and Levyakov, S.V., 2002, "Complete Solution of the Stability Problem for Elastica of Euler's Column," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 37 (6), pp. 1003-1009.

2. Phungpaingam, B. and Chucheepsakul, S., 2005, "Post-buckling of an Elastic Column with Various Rotational End Restraints," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 5 (1), pp. 113-123.

3. Mahasuwanchai, P., Athisakul, C., Chucheepsakul, S. and Phungpaingam, B., 2016, "Effect of Material Nonlinearity on the Large Deflections of Cantilever Beam made of Generalized Ludwick Material Subjected to Tension from Guyed Cable," *KMUTT Research and Development Journal*, 39 (4), pp. 511-531. (In Thai)

4. Supperm, S. and Phungpaingam, B., 2017, "Application of Differential Transformation Method to Study Postbuckling Behavior of Cantilever Column under End Loading," *KMUTT Research and Development Journal*, 40 (1), pp. 73-90. (In Thai)

5. Phungpaingam, B., Athisakul, C. and Chuhceepsakul, S., 2009, "Large Deflections of Spatial Variable-Arc-Length Elastica under Terminal Forces," *Structural Engineering and Mechanics, An International Journal*., 32 (4), pp. 501-516.

6. Phungpaingam, B. and Chucheepsakul, S., 2018, "Postbuckling Behavior of Variable-Arc-Length Elastica Connected with Rotational Spring Joint Including the Effect of Configurational Force," *Meccanica*, 53 (10), pp. 2619-2636.

7. Klaycham, K., Athisakul, C. and Chucheepsakul, S., 2014, "Finite Element Method for Critical Top Tension Analysis of Naturally Buoyant Riser," *KMUTT Research and Development Journal*, 37 (4), pp. 429-446. (In Thai)

8. Dado, M., Al-Sadder, S. and Abuzeid, O., 2004, "Post-Buckling Behavior of Two Elastica Columns Linked with a Rotational Spring," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 39 (10), pp. 1579-1587.

9. Monasa, F.E., 1974, "Deflections and Stability Behavior of Elasto-Plastic Flexible Bars," *Journal of Applied Mechanics*, 41 (2), pp. 537-538.

10. Yu, T.X. and Johnson, W., 1982, "The Plastic: The Large Elastic-Plastic Deflection of a Strut," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 17 (3), pp. 195-209.

11. Luan, F. and Yu, T.X., 1991, "An Analysis of the Large Deflection of an Elastic-Plastic Cantilever Subjected to an Inclined Concentrated Force," *Applied Mathematics and Mechanics*, 12 (6), pp. 547-555.

12. Pandit, D. and Srinivasan, S.M., 2016, "Numerical Analysis of Large Elasto-Plastic Deflection of Constant Curvature Beam under Follower Load," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 84, pp. 46-55.

13. Bosi, F., Misseroni, D., Dal Corso, F. and Bigoni, D., 2015, "Development of Configurational Force during the Injection of an Elastic Rod," *Extreme Mechanics Letters*, 4, pp. 83-88.

14. Bosi, F., Misseroni, D., Dal Corso, F., Neukirch, S. and Bigoni, D., 2016, "Asymptotic Self-Restabilization of a Continuous Elastic Structure," *Physical Review E*, 94 (6),063005.

15. Wang, C.Y., Wang, C.M. and Aung, T.M., 2004, "Buckling of a Weakened Column," *Journal of Engineering Mechanics*, 130 (11), pp. 1373-1376.